KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN WETENSCHAPPEN
-:- TE AMSTERDAM -:-



VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERINGEN DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

-:- VAN 26 MEI 1906 -:-
TOT 24 NOVEMBER 1906

DEEL XV
(1STE GEDEELTE)

JOHANNES MÜLLER :—: AMSTERDAM
:———: DECEMBER 1906 :———:

INHOUD.



				Blz
Verslag	Vergadering	26 Mei	1906	1
„	„	30 Juni	»	47
„	„	29 September	„	171
„	„	27 October	„	311
„	„	24 November	„	363



KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 26 Mei 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 1.

H. KAMERLINGH ONNES: „Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof", p. 2.

F. M. JAEGER: „Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistof-phasen der Cholesterylderivaten". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 2.

J. L. E. BROUWER: „Meerdimensionale vectordistributies". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE) p. 14.

F. M. JAEGER: „Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders". (Aangeboden door de Heeren H. A. LORENTZ en P. ZEEMAN) p. 27.

J. STEIN: „Waarnemingen der totale zonsverduistering van 30 Augustus 1905 te Tortosa in Spanje". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 37.

Aanbieding van Boekgeschenken, p. 45.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken dd. 14 Mei 1906, waarbij bericht wordt dat de benoeming van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF, hoogleeraar te Delft en F. A. H. SCHREINEMAKERS, hoogleeraar te Leiden, tot gewone leden en van de Heeren TH. VALETON, Chef der 1e Afdeeling (Herbarium en Museum) van het Departement van Landbouw te Buitenzorg (tijdelijk in Nederland) en S. H. KOORDERS, houtvester te Poerworedjo (Kedoe) tot Corres-

pondenten door H. M. de Koningin is bekrachtigd, benevens bericht van de Heeren G. A. F. MOLENGRAAFF, F. A. H. SCHREINEMAKERS en TH. VALETON dat zij gaarne bereid zijn de hun aangeboden benoeming te aanvaarden. Genoemde Heeren worden ter vergadering binnengeleid en door den Voorzitter verwelkomd.

2°. Brief van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, mededeeling gevende van bij de Internationale Associatie der Akademiën ingekomene stukken voor de vergadering van 30 Mei a. s.

Voor kennisgeving aangenomen.

3°. Circulaire van den Directeur van het Musée Océanographique te Monaco, waarbij hij namens den Vorst van Monaco de Akademie vraagt in principe haar adhaesie te betuigen voor een te Monaco bijeen te roepen Congrès international d'Océanographie.

In handen gesteld van de Heeren WEBER, WIND en VAN DER STOK om advies.

4°. Circulaire van de American philosophical Society te Philadelphia, waarbij dank betuigd wordt, voor de bewijzen van waardeering van de Akademie ontvangen bij de herdenking van den 200sten geboortedag van BENJAMIN FRANKLIN.

Naar aanleiding daarvan heet de Voorzitter den Heer LORENTZ welkom ter vergadering na zijn reis naar Amerika en spreekt hem den dank der Akademie uit voor de wijze waarop hij haar heeft vertegenwoordigd. De Heer LORENTZ doet een korte mededeeling omtrent de feesten te Philadelphia en de aanbieding van het adres van gelukwensch.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES doet eene mededeeling: *„Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof."*

(Deze mededeeling zal later verschijnen).

Kristallografie. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over de vetzure esters van het Cholesterine en het Phytosterine, en over de anisotrope vloeistof-fasen der Cholesteryl-derivaten".*

(Mede aangeboden door den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM).

§ 1. Reeds voor meerdere jaren werd door mij opgemerkt, dat het uit raapolie verkregen *phytosterine* door eene geringe toevoeging

van *cholesterine* eene smeltpunts*verhooging* ondergaat. De geringe hoeveelheid der eerstgenoemde stof, welke mij ten dienste stond, in verband met andere omstandigheden, maakten, dat ik een verder onderzoek der hier plaats hebbende verschijnselen niet instelde.

Door kennisname van eenige zeer verdienstelijke publikatie's van BÖMER [1]) over de smeltpuntsverhoogingen van *phytosterine* door *cholesterine*, en evenzoo van *cholesterylacetaat* door *phytosterylacetaat*, werd mijne aandacht opnieuw op dit onderwerp gevestigd. Behalve namelijk, dat de door O. MÜGGE verstrekte kristallografische gegevens mij tot 't besluit voerden, dat hier ononderbroken mengbaarheid tusschen heterosymmetrische komponenten aanwezig was, scheen mij een nader onderzoek der binaire smeltlijn van de twee acetaten zeer gewenscht, daar de beschouwingen van BÖMER hierover geenszins overal duidelijk zijn; hetgeen van des te meer belang is, aangezien door BÖMER, zooals bekend is, op deze smeltpuntsverhoogingen eene methode gebaseerd werd, om vervalschingen van dierlijke met plantaardige vetten te konstateeren. Voorts was mijn doel, om na te gaan, in hoeverre de invoering van vetzuur-resten in 't molekuul van het *cholesterine* het gedrag der esters ten aanzien van het verschijnsel der *optisch-anisotrope vloeistoffasen*, dat aan 't *acetaat*, 't *propionaat* en 't *benzoaat* het eerst ontdekt werd, — met toenemend koolstofgehalte der zuren gewijzigd zou worden. Ten slotte hoopte ik te kunnen nagaan, of er van eene dergelijke smeltpuntsverhooging als bij de acetaten, ook bij de andere termen der reeks sprake was.

§ 2. In de eerste plaats was eene bereiding der cholesteryl-, en der phytosteryl-esters eene vereischte.

Het cholesterine, door mij gebezigd, smolt na herhaalde omkristallisatie uit absoluten alkohol + aether scherp bij 149°.2 C. Het gebezigde phytosterine werd door MERCK volgens de methode van HESSE uit Calabar-vet bereid, en op overeenkomstige wijze gezuiverd. Het smolt bij 137° C. Een mikroskopisch onderzoek deed in geene der beide preparaten ongelijksoortige bestanddeelen erkennen.

Vooreerst heb ik de kristallografische onderzoeking der twee verbindingen ondernomen. Zij stemt volkomen overeen met de door MÜGGE verstrekte gegevens, waarnaar ik hier verwijs. Meetbare kristallen werden door mij tot dusverre niet verkregen; op grond der

[1]) BÖMER, Zeits. f. d. Unters. d. Nahr. u. Genussm. (1898). 21, 81; (1901). 865, 1070; in deze laatste verhandeling (met WINTER samen) is een volledig litteratuuroverzicht gegeven, waarnaar ik hier verwijzen kan.

[2]) HESSE, Annal. der Chemie, 192, 175.

optische eigenschappen kan het cholesterine slechts trikliene, het phytosterine slechts monokliene symmetrie bezitten.

Ofschoon voor den kristallograaf het mikroskopisch onderzoek eene ondubbelzinnige onderscheiding der beide verbindingen toelaat, zoo gelijken de uit oplosmiddelen afgezette kristalletjes zóózeer op elkaar, dat voor den minder geoefenden scheikundige verwarring der beide lichamen niet uitgesloten is. Het leek mij daarom praktisch wel van belang een duidelijker kriterium voor beider identifikatie met het mikroskoop, op te sporen.

Zulks blijkt op zeer eenvoudige wijze mogelijk te zijn, als men, in stede van uit oplosmiddelen, zich de kristalletjes uit de op een objektglaasje gesmolten stoffen door afkoeling en stolling laat vormen. Ik heb in de fig. 1 en 2 schematisch de konstant terugkeerende wijze van stolling der beide lichamen weergegeven.

Deze is in beide gevallen in zóó hooge mate verschillend, en daarbij zóó typisch, dat eene verwarring hier geheel en al is uitgesloten.



Fig. 1.
Cholesterine,
gesmolten en dan gestold.



Fig. 2.
Phytosterine,
gesmolten en bij afkoeling gestold.

Het phytosterine nl. kristalliseert steeds in aaneengesloten sferolithen. Tusschen gekruiste nicols schitteren deze in een levendig kleurenspel, en zijn elk voor zich, door een donker kruis doorsneden, zoodat het geheel den indruk maakt van aan elkaar grenzende interferentiebeelden van éénassige kristallen, loodrecht op de as bezien, en zonder cirkulaire polarisatie. Het optisch karakter der schijnbaar enkelvoudige kristallen is negatief.

Daarentegen vertoont 't cholesterine een totaal ander beeld. Bij smelting op een objekt-glaasje trekt zich de stof tot kleine drup-

peltjes samen, welke sporadisch gelegen zijn, en bij stolling zich als klompjes, met geschubde randen voordoen, welke meestal alleen 't wit van hooger orde vertoonen.

Dat eene onderscheiding langs dezen weg mikroskopisch veel zekerder is dan langs dien door MÜGGE aangegeven, moge nog uit fig. 3 blijken, waar phytosterine en cholesterine afgebeeld zijn, zooals zij zich onder den mikroskoop, na kristallisatie uit alkohol, voordoen; *A* is 't cholesterine, *B* het phytosterine.

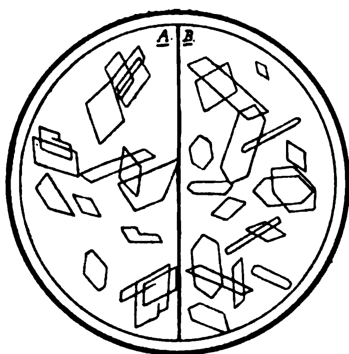


Fig. 3.
Phytosterine en Cholesterine uit 95% Alkohol.

§ 3. Van de vetzure esters heb ik de *acetaten*, *propionaten*, *butyraten* en *isobutyraten* door verhitting der beide alkoholen met de zuivere zuur-anhydrieden aan een terugvloeikoeler, bereid. Een 2 à 3-urig verhitten met kleine vlam, en voor de cholesteryl-esters liefst in 't donker, geeft eene zeer goede opbrengst. Na bekoeling werd de massa met $NaHCO_3$ van 't overtollige zuur bevrijd, en vervolgens uit alkohol + aether, later uit aethylacetaat + ligroïne, of uit een mengsel van aceton en ligroïne, omgekristalliseerd, tot het smeltpunt konstant bleef. Gewoonlijk wendde ik gelijke gewichtsdeelen anhydriede en alkohol aan.

De *formiaten*, *valeraten*, *isovaleraten*, *capronaten*, *caprylaten* en *caprinaten*, werden uit de verbindingen i. c. door middel der zuivere, watervrije zuren bereid. Deze (valeriaan-, capryl-, en caprine-zuur) waren synthetisch door KAHLBAUM bereid; 't isovaleriaanzuur was 't, door hem onder 't merk „KAHLBAUM" als 't zuiverste in den handel gebrachte zuur; evenzoo het watervrije mierenzuur. Gewoonlijk was een zes-urig verhitten van iets meer dan de gelijke gewichtshoeveelheid van het zuur en den alkohol voldoende, om eene behoorlijke opbrengst te krijgen. Echter is 't stof-verlies bij de zuivering der produkten door de talrijke omkristallisatie's veel aanzienlijker dan bij de boven beschreven bereidingswijze.

Beide reeksen van esters kristalliseeren goed. De phytosteryl-esters in weeke, buigzame, glinsterende schubben; echter vertoonen 't formiaat en de valeraten hier bij 't kristalliseeren moeilijkheden, aangezien ze hardnekkig een weinig van een als bijprodukt gevormde kleefstof vasthouden, welke moeilijk te verwijderen is. De cholesterylesters kristalliseeren veel mooier; 't formiaat, acetaat en benzoaat

zijn makroskopisch gemeten; de overige derivaten kristalliseeren in fijne naaldjes of zeer dunne schubvormige kristalletjes, welke niet meetbaar zijn; 't butyraat hoop ik nog in meetbaren vorm te kunnen verkrijgen. [1]) Vooral bij het caprylaat werd de zuivering door de groote neiging der verbinding om te kristalliseeren, zeer vergemakkelijkt. Moeilijker was de zuivering daarentegen bij den caprine-zuren ester; tenslotte echter is ook deze zuiver verkregen, en zelfs in fraaie kleurlooze plaatvormige kristallen, uit kokende ligroïne [2]).

De phytosteryl-esters blijven aan 't licht wit; de cholesteryl-esters kleuren zich daarentegen bij langer liggen in 't helle daglicht geelachtig; door omkristallisatie zijn ze weer wit te verkrijgen.

De bepaling der smeltpunten, en bij de cholesteryl-esters óók die der overgangstemperaturen: vast → anisotroop-vloeibaar, werd steeds zóó uitgevoerd, dat de thermometer *in* de stof geplaatst was, welke het kwikreservoir geheel omhulde. Bij gebrek aan een thermostaat heb ik bij de bepalingen niet de grafische konstruktie der afkoelings-kromme benuttigd, maar gewoon de temperaturen bepaald, waarbij bij langzaam warmer wordend buitenbad, de nieuwe fasen 't eerst optreden; later werden echter ook bepalingen langs den eerstgenoemden weg gedaan, en met de verkregen resultaten in overeenstemming bevonden.

Wat de analyse der esters aangaat, zoo kan eene elementair-analyse in dit geval, waar de formules voor cholesterine en phytosterine nog twijfelachtig zijn, en waar de molekulen van 28 tot 37 C-atomen bevatten, weinig of niets leeren. Ik heb mij er daarom mee tevreden gesteld, om eene geringe hoeveelheid der esters met alkoholische kali te verzeepen, waaruit dan telkens 't cholesterine of phytosterine, met de bekende smeltpunten, werd teruggewonnen. Uit de met HCl zuur gemaakte oplossing der *K*-zouten van de vetzuren, werden deze aan hun kenmerkenden reuk herkend. De esters werden als zuiver beschouwd, wanneer de smeltpunten, en bij de cholesteryl-esters *beide* temperaturen bij verder omkristalliseeren konstant bleven.

---

[1]) Het formiaat heb ik zelfs voor korten tijd in groote, waterheldere kristallen kunnen verkrijgen uit een mengsel van ligroïne, aethylaccetaat en weinig alkohol.

[2]) De kristallen van 't caprinaat zijn lange, platte naalden. Zij stellen monokliene, naar de *b*-as verlengde, en naar {001} afgeplatte individuën voor. De hoek β is 88° à 89°; voorts komen nog de vormen {100} en {$\bar{1}01$} voor, met ($\bar{1}00$) : ($\bar{1}01$) = ± 20°. 't Optisch assenvlak is {010}; geneigde dispersie, $\rho > \nu$ om de 1e Midd. Dubbelbr. negatief. Op *c* is éene as aan den rand van het gezichtsveld waar te nemen. Overigens kromvlakkige kristallen.

§ 4. Ik laat in de volgende tabellen de waargenomen temperaturen, etc. volgen.[1]) Naast mijn gegevens zijn die van Bömer geplaatst, voor zooverre hij die verstrekt. De in [ ] ingesloten temperaturen worden later meer in 't bijzonder beschouwd.

I. VETZURE ESTERS VAN HET CHOLESTERINE.

	t_1	t_2	t_3	Bömer's opgaven:	
Chol. Formiaat	—	[± 90°]	96°.5	—	96°.
» Acetaat	—	[80 à 90°][1])	112°.8	—	113°.5
» Propionaat	93°.0	107°.2	—	96°	111°
» -*n*-Butyraat	96°.4	107°.3	—	96°	108°
» Isobutyraat	—	—	126°.5	—	—
» -*n*-Valeraat	91°.8	99°.2	—	—	—
» Iso-valeraat	—	[± 109°]	110°.6	—	—
» Capronaat	91°.2	100°.1	—	—	—
» Caprylaat	—	[± 101°]	106°.4	—	—
» Caprinaat	82°.2	90°.6	—	—	—
» Benzoaat	145°.5	178°.5	—	146°	178°.5
» Phtalaat [2])	—	—	—	—	182°.5
» Stearinaat [3])	—	—	—	65°	

Ofschoon geen vetzure esters, zijn benzoaat en phtalaat ook maar volledigheidshalve opgenomen.

[1]) Volgens Schönbeck, Diss. Marburg. (1900).

[2]) Volgens Bömer loco cit.

[3]) Volgens Berthelot. 't Blijft onuitgemaakt of hier vl. kristallen aanwezig zijn; wellicht is dit geval analoog met dat van 't caprylaat.

De in [ ] ingesloten temperaturen zijn niet nauwkeurig te bepalen; zie den tekst hieromtrent.

---

[1]) Opgemerkt moet worden, dat bij deze lichamen eigenlijk *drie* temperaturen in beschouwing genomen moeten worden, nl. 1. overgang: vast → anisotroop-vloeibaar; 2. overgang: anisotroop-vloeibaar → isotroop-vloeibaar; 3. overgang: vast → isotroop-vloeibaar.

Vooral met het oog op de hier ontdekte gevallen van labiele vloeibare kristallen, is deze onderscheiding vastgehouden.

§ 5. Hoogst opvallend zijn bij deze merkwaardige lichamen de prachtige kleurverschijnselen bij 't afkoelen der heldere, isotrope gesmolten massa tot hare stollingstemperatuur, en evenzoo bij de in omgekeerde richting gaande verhitting. Deze kleurverschijnselen vinden hare oorzaak in interferentie van het opvallende licht, telkens wanneer de troebele, anisotrope vloeistof-fase optreedt of in de isotrope vloeistof overgaat. Bij dezen laatsten overgang treden er bij 't roeren met den thermometer de reeds door REINITZER destijds beschrevene „olieachtige slieren" op, totdat de temperatuur t_2 overschreden is. Ook als uit de anisotrope vloeistof de vaste fase zich afzet, dus beneden t_1, treden deze kleuren op. Het schitterendst, in ongeëvenaarde violette en blauwe kleurenpracht, vertoonen het butyraat, en 't norm. valeraat dit verschijnsel, en evenzoo 't capronaat en 't caprinaat.

De in [ ] ingesloten temperaturen t_2 beantwoorden aan anisotrope vloeistof-fasen, welke *labiel* zijn ten aanzien der isotrope vloeistof, en *welke dubbelbrekende vloeistoffen dus alleen in onderkoelde gesmolten stof realizeerbaar zijn.* Van dit geval, dat vergelijkbaar is met de door LEHMANN onderscheiden *monotropie* tegenover 't geval der *enantiotrope* omzettingen, — was tot dusverre alleen 't *acetaat* als zoodanig bekend. Thans is 't aantal gevallen met *drie* vermeerderd, t. w. 't *formiaat,* 't *caprylaat,* en zonder eenigen twijfel ook het *isovaleraat,* waarop ik verder beneden nog terug kom. Het cholesterylformiaat en 't caprylaat smelten derhalve bij verhitting *volkomen scherp* tot eene heldere vloeistof bij $96^1/_2$°, resp. 106.°2 C. Wanneer men echter de heldere vloeistof in koud water plotseling afkoelt, ziet men 't optreden der troebele, anisotrope, labielere fase, vergezeld van de bekende kleurverschijnselen. Vooral 't acetaat vertoont een en ander met groote pracht. Het is wel mogelijk, dat vele organische stoffen, welke tot dusverre als „scherp smeltend" opgegeven zijn, tot deze kategorie van stoffen behooren, en bij plotselinge afkoeling, al is 't ook maar één enkel moment, eene dubbelbrekende vloeistoffase bezitten. Het verschijnsel der „vloeibare kristallen" ware dan algemeener, dan men tot nu toe gemeend heeft.

Prof. LEHMANN, dien ik een weinigje der cholesteryl-esters heb toegezonden, heeft mijne waarnemingen in alle opzichten kunnen bevestigen. Daarbij heeft genoemde onderzoeker nog gevonden, dat het *cholesteryl-caprinaat* waarschijnlijk merkwaardigerwijze *twee anisotrope vloeistof-fasen* zou vertoonen. Ofschoon ik zelve nimmer méér dan eene enkele fase zag optreden, en de heer LEHMANN deze bepalingen ook nog slechts als voorloopige mededeelt, zoo zou dit geval zeker tot de merkwaardigste verschijnselen te rekenen zijn, welke er voor eene chemisch-homogene stofsoort verwacht kunnen worden, vooral, omdat

toch de waarneembaarheid dier *twee* fasen insluit, dat ze *niet* in alle verhoudingen met elkaar mengbaar zouden zijn!

Verder vertoonen het formiaat, 't isovaleraat en het norm. valeraat bovendien ieder *twee* vaste modifikatie's.

§ 6. Zeer merkwaardig is bij dit alles het gedrag van het *cholesteryl-isobutyraat.* Mikroskopisch zoowel als makroskopisch onderzoek doet hier absoluut niets van eene anisotrope vloeistof-fase erkennen, óók bij snelle afkoeling, en dat wel, terwijl het *normale* butyraat 't verschijnsel met grooten luister vertoont. Deze, in gedrag afwijkende ester, is uit *dezelfde* hoeveelheid cholesterine bereid, als waaruit de anderen gesyntheseerd zijn. De oorzaak van 't verschil kan dus alleen in de *struktuur der vetzuur-rest* gelegen zijn, welke hier, in tegenstelling met de overige esters, *vertakt* is.

Een en ander bracht mij op 't denkbeeld, om den analogen ester van 't *isovaleriaanzuur* te bereiden; wellicht zou ook hier blijken, dat de vertakking der *C*-keten van 't zuur, het verschijnsel der anisotrope vloeistof-fase te niet deed. Eerst meende ik inderdaad, dat dit het geval was. Maar nauwkeuriger observatie leerde, dat hier bij de snelle afkoeling één ondeelbaar moment eene *labiele* anisotrope vloeistof optreedt; de duur is echter zóó kort, dat ik zelfs langen tijd in twijfel ben geweest, of deze fase *stabiel*, dan wel, als bij 't formiaat en caprylaat, *labiel* moet heeten! Al heeft de *C*-vertakking dus hier niet eene algeheele opheffing van 't fenomeen der vloeibare kristallen ten gevolge, — zoo blijkt 't realizeerbaar trajekt toch door die vertakking zóó verkleind te worden, dat het bijna tot nul nadert, en is de verwachte fase bovendien zelfs nog *labiel.* Ik meen uit een en ander te mogen afleiden, dat inderdaad, zooals ook anderzijds reeds meermalen gezegd werd, het optreden der anisotrope vloeistof-fasen eene *konstitutieve* eigenschap der materie is, welke niet door vreemde bijmengingen, etc. (Tammann, c. s.) mag verklaard worden.

§ 7. Hier volgen thans de smeltpunten der analoge *phytosteryl*-esters, welke, op één na, het verschijnsel der dubbelbrekende vloeistoffen niet vertoonen. Aangezien de phytosterinen uit verschillende plantaardige vetten van elkaar verschillend schijnen te zijn, en Bömer geen phytosteryl-esters uit *Calabar*-vet in 't bijzonder vermeldt, zoo heb ik in de tweede kolom de *grenzen* aangegeven, waarbinnen de diverse, door hem uit verschillende oliën bereidde esters, wat betreft hun smeltpunt, slingeren.

II. VETZURE ESTERS VAN HET PHYTOSTERINE.

		Grenzen volgens BÖMER:
Phytosteryl-Formiaat	110°	103°—113°
Phytosteryl-Acetaat	129°.1	123°—135°
Phytosteryl-Propionaat	105°.5	104°—116°
Phytosteryl-Butyraat	91°.2	85°— 90°
Phytosteryl-Isobutyraat	117°.	—
Phytosteryl-norm.-Valeraat	$t_1 = 67°$; $t_2 = 30°$	—
Phytosteryl-Isovaleraat	100°.1	—

Uit de vergelijking der beide tabellen is te zien, dat de smeltpuntsdaling van 't phytosterine door invoering van vetzuurresten van klimmend *C*-gehalte *veel sneller* plaats vindt, dan bij 't cholesterine. Daarentegen is de opeenvolging van de smeltpunten van acetaat, propionaat, butyraat en *n*-valeraat *regelmatiger* dan bij de cholesteryl derivaten.

Alle phytosteryl-esters hebben met het phytosterine zèlve gemeen de groote neiging om uit de smelt in *sferolithen* te kristalliseeren; met toenemend *C*-gehalte der vetzuurrest schijnen deze echter in 't algemeen kleiner van omvang te worden.

Het formiaat doet 't bijzonder fraai; bovendien bezit dit lichaam twee vaste modifikatie's, zooals ook de heer LEHMANN heeft gekonstateerd, die van meening is, dat deze twee met de beide vaste fasen van 't cholesteryl-derivaat zouden korrespondeeren; de sferolitenvorm is bij den phytosteryl-ester de *labielere*.

Daarentegen vormen zij, uit monobroomnaftaline of amandelolie omgekristalliseerd, onder het mikroskoop goed gevormde, naaldvormige kristalletjes, welke echter steeds klein zijn. Waarschijnlijk heeft men in al deze gevallen met polymorfie te doen. Ook grillige groeiingsvormen en dendriten nam ik dikwijls waar.

Bij de smeltpuntsbepaling van 't norm. valeraat deed zich eene moeilijkheid voor. Het smelt, over een trajekt, bij cirka 67°.1 C; koelt men de gesmolten massa af, totdat ze weer vast geworden is, dan smelt de ester echter reeds bij 30° C. tot eene heldere vloeistof. Dit gedrag is geheel analoog aan dàt, hetwelk bij enkele glyceriden der hoogere vetzuren is waargenomen, zoo o.a. door SCHEY [1]) bij 't *Trilaurine* en 't *Trimyristine*.

[1]) SCHEY, Over synthetisch bereide neutrale esters van 't glycerine, etc Dissertatie, Leiden (1899) p. 51, 54.

Na een half uur was de smelttemperatuur weer gestegen tot $53^1/_2$° C., na een etmaal tot 67° C. In de voorheen schubvormig afgezette, zwak dubbelbrekende samenhangende laag op 't objektglaasje, hebben zich na 24 uren kleine witte *sferolithen* afgezet, welke 't donkere kruis, als bij 't phytosterine (zie daar) vertoonen. Ik meen tot verklaring van het verschijnsel eene *dimorfie* der vaste stof te mogen aannemen. Bovendien treden hier vloeibare kristallen op, zooals ook de heer LEHMANN kon konstateeren.

Volgens prof. LEHMANN vormt het norm. Phytosteryl-Valeraat zeer schoone vloeibare kristallen, welke analoog zijn aan die van het cholesteryl-oleaat; zooals deze, ontstaan zij eerst uit onderkoelde smelt. Derhalve is ook hier de anisotrope vloeistoffase *labiel* ten opzichte der isotrope.

Ik acht de mogelijkheid geenszins klein, dat de door SCHEY aan zijne hoogere triglyceriden waargenomen smeltpuntsveranderingen evenzeer aan 't optreden van labiele, dubbelbrekende vloeistoffasen hun ontstaan danken. Nader onderzoek is hier zeker gewenscht.

§ 8. Thans komen wij tot de bespreking van 't wederzijdsche gedrag der beide reeksen van vetzure esters ten opzichte van elkaar.

Door BÖMER is genoegzaam bewezen dat de smeltlijn van *cholesterine* en *phytosterine* eene *stijgende* lijn is. In verband met MÜGGE's en mijne kristalbepalingen zou hier dus inderdaad kontinue menging tusschen heterosymmetrische komponenten voorhanden zijn! Het mikroskopisch onderzoek blijkt echter bij mengels, welke ± 3 dln. cholesterine op 1 dl. phytosterine bevatten, te wijzen op eene nieuwe vaste fase, welke in trigonale prisma's schijnt te kristalliseeren. Ook bij grooter cholesterine-gehalte treedt deze verbinding (?) op [1]). Of hier mengbaarheid moet aangenomen worden van deze nieuwe kristalsoort met beide komponenten, of dat eene eventueele omzetting in de vaste mengfasen zóó langzaam verloopt, dat een overgangspunt in de smeltlijn aan de waarneming ontsnapt, moet daargelaten worden.

Van meer belang is de zaak bij de esters van beide lichamen. De formiaten geven volgens BÖMER [2]) eene smeltlijn met een eutektisch punt; de acetaten echter eene kontinu-stijgende smeltlijn.

De wijze van proefneming, en de theoretische interpretatie is echter eenigszins dubbelzinnig, aangezien *B.* gemengde oplossingen der komponenten bereidt, deze laat kristalliseeren, en het smeltpunt der

1) Zie BÖMER, Z. f. Nahr. u. Gen. M. (1901) 546.

2) BÖMER, Z. f. Nahr. u. Gen. Mitt. (1901) 1070. Echter is hier, in verband met de dimorfie der formiaten, eene mengingsreeks met gaping, zeer waarschijnlijk.

eerst afgezette vaste fase bepaalt, en door zijne opgave van de mengverhouding der komponenten in de gebezigde oplossing een onvolledig en verwarrend beeld der afhankelijkheid van smeltpunt en samenstelling geeft.

Ofschoon eene *stijging* der binaire smeltlijn op deze wijze natuurlijk evengoed als anders te konstateeren valt, en Bömer's verdienste zeker gelegen is in de ontdekking vat 't feit zèlve, — zoo is de bepaling der binaire smeltlijn ten eenenmale als onvoldoende te oordeelen, zoodra ze ook *kwantitatieve* diensten zal moeten bewijzen; hetgeen van belang is voor de praxis der boter-contrôle, aangezien bij nauwkeurig bekende smeltkromme, de bijgemengde hoeveelheid phytosterine uit de smeltpuntsverhooging van 't cholesteryl-acetaat kan worden berekend. Ik heb daarom thans de binaire smeltlijn op de juiste wijze

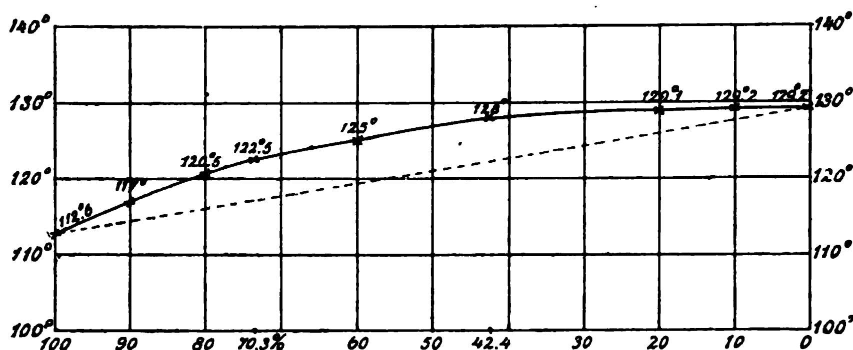


Fig. 4.
Cholesterine-, en Phytosterine-Acetaat.

bepaald, en in fig. 4 afgebeëld. Ofschoon de kromme een stijgend verloop heeft, zoo wijkt ze toch aanzienlijk af van de rechte lijn, die de twee smeltpunten verbindt. Aangezien het verloop der kromme lijn van af 40 °/₀ cholesterine-acetaat tot 0 °/₀ *bijna horizontaal* is, zoo volgt hieruit, dat de samenstelling van mengsels alleen dàn voldoende nauwkeurig door het smeltpunt te verificeeren is, wanneer de bijmenging aan phytosterine bij 't dierlijke vet 60 °/₀ niet te boven gaat; 't nauwkeurigst, als 't gehalte van 0 °/₀ tot ± 40 °/₀ phyfosteryl-ester bedraagt [1]). Voor de praktijk is deze methode in de meeste

[1]) Opgemerkt zij, dat hoewel Bömer op meerdere plaatsen zijner verhandeling, de genoemde methode slechts als kwalitatief wil aanbevelen, toch op andere plaatsen duidelijkt blijkt, dat ook kwantitatieve bepalingen bij kleine koncentraties door hem als geoorloofd worden beschouwd. Bij zijne interpretatie der smeltlijn is dit echter *niet* zoo: want zijne proeven geven geen uitsluitsel omtrent de mengverhouding der komponenten bij mengsels van bepaald waargenomen smeltpunt. Eerst door algeheele bekendheid van de binaire smeltlijn worden kwantitatieve proeven mogelijk gemaakt.

gevallen dus wel bruikbaar. Het bij deze proeven gebezigde cholesteryl-acetaat smolt, goed gekristalliseerd bij 112.°8 C.; 't phytosteryl-acetaat bij 129.°2 C.

Een	**mengsel**	**van**	**90**	**%**	**Chol.**	**Acet.**	**+ 10**	**%**	**Phyt.**	**Acet.**	**smelt**	**bij**	**117° C.**
»	»	»	80	»	»	»	+ 20	»	»	»	»	»	120.°5 C.
»	»	»	73.3	»	»	»	+ 26.7	»	»	»	»	»	122.°5 C.
»	»	»	60	»	»	»	+ 40	»	»	»	»	»	125° C.
»	»	»	42.4	»	»	»	+ 57.6	»	»	»	»	»	128° C.
»	»	»	20	»	»	»	+ 80	»	»	»	»	»	129.°1 C.
»	»	»	10	»	»	»	+ 90	»	»	»	»	»	129.°2 C.

Waarschijnlijk is hier bij de acetaten een geval van isomorfotrope verwantschap aanwezig; beide esters zijn waarschijnlijk monoklien, ofschoon dit voor den cholesteryl-ester niet geheel zeker is uit te maken. Deze is pseudotetragonaal, en wel:

Volgens Von Zepharovich: *monoklien*, met $\beta = 73°38'$.

Volgens Obermayer: *triklien*, met $\beta = 106°17'$, en $\alpha = 90°20'$, $\gamma = 90°6'$, de assenverhoudingen zijn: 1,85 : 1 : 1,75.

De phytosteryl-ester is door Beykirch mikroskopisch benaderend gemeten, en schijnt eene monokliene, of althans eene trikliene symmetrie met monokliene grenswaarde te bezitten. Isomorf zijn beide verbindingen zeer zeker *niet*, volgens mijne meening. In ieder geval zou het mogelijk kunnen zijn, dat, al bestaat eene direkte isomorfie ook bij de twee reeksen van esters niet, er toch méér termen waren, welke isomorfotrope mengbaarheid vertoonen, op analoge wijze, als dit bij de acetaten door Bömer gevonden werd. Ik heb het onderzoek, tot de isovaleraten inklusief, uitgestrekt; 't resultaat echter is ontkennend, en schijnt 't geval der azijnzure esters in deze reeks vrijwel alleen te staan.

Om enkele getallen te noemen, kan 't volgende voorbeeld dienen:

31.8 % Cholesteryl-Bütyraat + 68,2 % Phytosteryl-Butyraat wijzen voor t_1 aan 81° C., en voor t_2 83° C. enz. enz.

Bij de formiaten werd de verlaging al door Bömer gekonstateerd; de overige esters, die van de iso-zuren insgelijks, gedragen zich analoog: aan beide zijden van 't smeltdiagram eene verlaging van de begin-smeltpunten. Echter is 't hoogst waarschijnlijk, dat in enkele, misschien in alle gevallen, er iso*di*morfotrope menging, met gaping in de reeks der mengkristallen, aanwezig is.

De anisotroop-vloeibare fase der cholesteryl-esters geeft in deze gevallen aanleiding tot anisotroop-vloeibare mengkristallen. Ik wil hier nog opmerken, dat voor enkele der lager smeltende esters, zooals

't butyraat, capronaat, caprinaat, norm. valeraat, enz., de temperatuur t_1 bij deze mengkristallen tot circa 40° à 50° C., en lager, te brengen is, en dus de mogelijkheid wordt geschapen, om vloeibare mengkristallen bij dergelijke temperaturen te bestudeeren, wat het mikroskopisch experiment aanzienlijk vergemakkelijkt.

Naar alle waarschijnlijkheid zal ik eene dergelijke studie dezer lichamen over eenigen tijd ondernemen. Theoretisch van belang is ook de mogelijkheid, waarop mij Prof. BAKHUIS ROOZEBOOM opmerkzaam maakte, dat bij die lichamen, waar t_2 aan den labieleren toestand beantwoordt, door bijmenging van eene vreemde stof, de eerst labielere vloeibare mengkristallen, ten slotte stabiel worden ten opzichte der isotrope smelt. Proeven in dien zin, met deze praeparaten, zullen van andere zijde ondernomen worden. Wellicht dat ook eene beschouwing der laagsmeltende derivaten met het ultramikroskoop, of anders eene zoodanige bestudeering van de laagsmeltende vloeibare mengkristallen, als boven genoemd, wel het een en ander belangrijks kan opleveren.

Zaandam, 1 Mei 1906.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer L. E. J. BROUWER: „*Meerdimensionale Vectordistributies.*"

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

De vlakke ruimte, waarin geopereerd wordt, noemen we R_n; we denken daarin een rechthoekig coördinatenstelsel aangebracht, waarin een C_p voorstelt een coördinaatruimte van p dimensies. Zij dan in R_n gegeven een ${}^pX$-distributie, d. w. z. er zij in elk punt van R_n een p-dimensionaal vectorstelsel aangebracht. Onder $X_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$ wordt verstaan de vectorontbondene evenwijdig aan de met de indices aangewezen C_p, terwijl als positieve zin wordt aangenomen die, welke overeenkomt met de door de volgorde der indices aangewezen indicatrix. Door twee der indices met elkaar van plaats te doen verwisselen, verandert de zin dier indicatrix, dus het teeken van den vectorcomponent.

Stelling I. De integraal van ${}^pX$ in R_n over een willekeurige gebogen tweezijdige gesloten R_p is gelijk aan de integraal van ${}^{p+1}Y$ over een willekeurige gebogen R_{p+1}, die door de R_p als be-

grenzing wordt ingesloten; hierin is ${}^{p+1}Y$ bepaald door

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}} = \sum_{\alpha_{q_1}=\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{q_2} \alpha_{q_3} \ldots \alpha_{q_{p+1}}}}{\partial x_{\alpha_{q_1}}},$$

waar voor elk der termen van het tweede lid de indicatrix $(\alpha_{q_1} \alpha_{q_2} \ldots \alpha_{q_p} \alpha_{q_{p+1}})$ denzelfden zin heeft als $(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{p+1})$.

We noemen den vector Y de *eerste afgeleide* van ${}^{p}X$.

Bewijs. We denken de begrensde R_{p+1} voorzien van kromlijnige coördinaten $u_1 \ldots u_{p+1}$, bepaald als snijding van gebogen C_p's, d.w.z. gebogen coördinaatruimten van p-dimensies. We denken het kromlijnige coördinatenstelsel binnen de begrenzing zonder singulariteiten, en de begrenzing ten opzichte dier coördinaten overal convex.

Het integraalelement van ${}^{p+1}Y$ wordt, uitgedrukt in differentiaalquotienten van ${}^{p}X$:

$$\sum_{Y_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}}} \sum_{\alpha_{q_1}=\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{q_2} \ldots \alpha_{q_{p+1}}}}{\partial x_{\alpha_{q_1}}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_{\alpha_{p+1}}}{\partial u_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{\alpha_1}}{\partial u_{p+1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_{\alpha_{p+1}}}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1}$$

We nemen nu samen alle termen, die een der componenten van ${}^{p}X$, b. v. $X_{123\ldots p}$ bevatten. Dan komt:

$$\frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial x_{p+1}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{p+1}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{p+1}}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial x_{p+2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{p+2}}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_{p+2}}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \ldots\ldots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \ldots (n - p \text{ termen}).$$

Tellen we hierbij op de volgende termen met waarde 0:

$$\frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial x_1}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial x_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_{p+1}} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} \end{vmatrix} du_1 \ldots du_{p+1} +$$

$$+ \ldots (p \text{ termen}),$$

dan zijn de n termen te sommeeren tot:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial u_1} du_1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial X_{123\ldots p}}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{vmatrix}$$

Denken we dezen determinant ontwikkeld naar de eerste kolom, en integreeren we dan elk der termen van de ontwikkeling partieel naar het er in optredend differentiaalquotient van $X_{123\ldots p}$, dan blijven onder het $(p+1)$-voudige integraalteeken staan $p(p+1)$ termen, die elkaar twee aan twee vernietigen. Zoo b.v.:

$$du_1 \ldots du_{p+1} \begin{vmatrix} & \frac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial^2 x_p}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} \\ & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_2} \\ & \vdots & & \vdots \\ & \frac{\partial x_1}{\partial u_p} & \cdots\cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_p} \\ X_{123\ldots p} & & & \end{vmatrix}$$

$$\text{en } du_1 \ldots du_{p+1} \quad \left| \begin{array}{l} X_{123\ldots p} \\ \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_2} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial x_p}{\partial u_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_p} & \ldots\ldots\ldots & \dfrac{\partial x_p}{\partial u_p} \\ \dfrac{\partial^2 x_1}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial^2 x_p}{\partial u_1 \partial u_{p+1}} \end{array} \right. \end{array} \right|$$

daar ze uit elkaar ontstaan door verwisseling van twee rijen van den hoofddeterminant.

Er blijft dus alleen over de p-voudige integraal, en die geeft onder het integraalteeken:

$$X_{123\ldots p} \left| \begin{array}{ccc} \pm\, 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 \ldots\ldots & \dfrac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \pm\, 1 & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \ldots & \dfrac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{array} \right| ,$$

te integreeren over de begrenzing, terwijl in een bepaald punt dier begrenzing de h^{de} term der eerste kolom het $+$ teeken krijgt, als het punt voor de coördinaat u_h aan den positieven kant der begrenzing ligt.

Zoeken we nu de integraal van $X_{123\ldots p}$ over de begrenzing, en denken we ons vooreerst op dat gedeelte er van, dat voor alle u's aan den positieven kant ligt. De indicatrix loopt daar in den zin $u_1\, u_2 \ldots u_{p+1}$ en als we $X_{123\ldots p}$ achtereenvolgens integreeren over de ontbondenen der begrenzingselementjes volgens de gebogen C'_p's, vinden we:

$$\sum \int X_{123\ldots p} \left| \begin{array}{ccc} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{\alpha_1}} du_{\alpha_1} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial x_p}{\partial u_{\alpha_1}} du_{\alpha_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial u_{\alpha_p}} du_{\alpha_p} & \ldots\ldots & \dfrac{\partial x_p}{\partial u_{\alpha_p}} du_{\alpha_p} \end{array} \right| ,$$

waar $(\alpha_{p+1}\, \alpha_1 \ldots \alpha_p) = (1\, 2\, 3 \ldots p\,(p+1))$; zoodat we ook kunnen schrijven:

$$\sum_{q=1,2\ldots(p+1)} \int \left| X_{123\ldots p} \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{q-1}} du_{q-1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{q-1}} du_{q-1} \\ \hline \frac{\partial x_1}{\partial u_{q+1}} du_{q+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{q+1}} du_{q+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{array} \right| \right.$$

of: $$\int X_{123\ldots p} \left| \begin{array}{cccc} 1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_1} du_1 & \cdots\cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_1} du_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \frac{\partial x_1}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} & \cdots & \frac{\partial x_p}{\partial u_{p+1}} du_{p+1} \end{array} \right|$$

Bewegen we ons nu naar andere gedeelten der begrenzing, dan zien we telkens waar we een schijnbaren omtrek ten opzichte van een der coördinaten u overschrijden, de projectie der indicatrix op de bijbehoorende gebogen C_p van zin veranderen.

In een willekeurig punt der begrenzing wordt dus de integraal op dezelfde wijze gevonden als aan den volkomen positieven kant; alleen zal voor elke coördinaat u_q, waarvoor we aan den negatieven kant zijn, de bijbehoorende term onder het Σ-teeken negatief moeten worden genomen; waarmee de gelijkheid van de p-voudige integraal van ${}^pX$ over de begrenzing en de $(p+1)$-voudige integraal van ${}^{p+1}Y$ over de begrensde R_{p+1} is aangetoond.

We kunnen de scalarwaarden van ${}^pX$ ook uitgezet denken langs de normaal-R_{n-p}'s. Als zoodanig kan dan de integraal over een willekeurige gebogen tweezijdige gesloten R_{n-p} worden herleid tot de integraal van een $(n-p+1)$-dimensionalen vector over een gebogen R_{n-p+1}, die door de R_{n-p} wordt begrensd. Zetten we de scalarwaarden van dien vector weer uit langs zijn normaal-R_{p-1}, dan ontstaat de vector ${}^{p-1}Z$, dien we noemen de *tweede afgeleide* van ${}^pX$. Voor de ontbondenen van ${}^{p-1}Z$ wordt gevonden:

$$Z_{\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}} = \sum_{\alpha_q=\alpha_p,\alpha_{p+1}\ldots\alpha_n} \frac{\partial X_{\alpha_q\alpha_1\ldots\alpha_{p-1}}}{\partial x_{\alpha_q}}.$$

De bijzonderheid kan zich voordoen, dat een der beide afgeleiden 0 wordt. Is de eerste afgeleide van een ${}^{m}X$ nul, dan zullen we spreken van een ${}^{\;m}_{m-1}X$; is de tweede nul, van een ${}^{\;m}_{m+1}X$.

Stelling 2. De eerste afgeleide van een ${}^{p}X$ is een ${}^{p+1}_{\;p}X$; de tweede afgeleide een ${}^{p-1}_{\;p}X$; m. a. w. zoowel het proces van eerste afleiding als dat van tweede afleiding geeft, tweemaal achtereen toegepast, 0.

Het bewijs is analytisch eenvoudig, maar ook meetkundig blijkt de stelling als volgt:

Zoek de integraal van de eerste afgeleide van ${}^{p}X$ over een gesloten R_{p+1}, dan kunnen we de bijdrage, die een R_{p+1}-element daartoe geeft, vervangen door de integraal van ${}^{p}X$ langs de begrenzende R_p van dat element. Over de geheele R_{p+1} wordt dan elk element van die R_p-begrenzingen tweemaal geteld met tegengestelde indicatrix, zoodat de integraal moet wegvallen.

Het analoge voor de tweede afgeleide blijkt, als we de integraal van den normaalvector over een gesloten R_{n-p+1} opmaken.

Onder *totale afgeleide* zullen we verstaan de som van de eerste en tweede afgeleide, en de bewerking van totale afleiding voorstellen door ∇.

Stelling 3. $\nabla^2 = \sum_{h=1}^{h=n} \frac{d^2}{dx_h^{\,2}}$.

Bewijs. Vooreerst is uit stelling 2 duidelijk, dat de vector ∇^2 weer een ${}^{p}X$ is. Zoeken we dus zijn ontbondene $X_{12\ldots p}$.

De eerste afgeleide levert daarvoor de termen

$$T_1 = \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\partial Y_{q\,1\ldots p}}{\partial x_q},$$

waarin

$$Y_{q1\ldots p} = \sum_{u=1}^{u=p} \pm \frac{\partial X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u}$$

$\Big(+$ teeken voor $(uq\,12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p) = (q\,1\ldots p)\Big)$

$$+ \frac{\partial X_{12\ldots p}}{\partial x_q}.$$

Dus

$$T_1 = \sum_{u=1}^{u=p} \sum_{q=p+1}^{q=n} \pm \frac{\partial^2 X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u \, \partial x_q}$$

$\Big(+$ teeken voor $(uq\,12 \ldots (u-1)(u+1) \,..p) = (q\,1 \ldots p)\Big)$

$$+ \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\partial^2 X_{12\ldots p}}{\partial x_q^2}.$$

De tweede afgeleide levert de termen

$$T_2 = \sum_{u=1}^{u=p} \pm \frac{\partial Z_{12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u}$$

$\Big(+$ teeken voor $(u\,12 \ldots (u-1)(u+1) \ldots p) = (12 \,..\, p)$

of voor $(qu\,1 \ldots (u-1)(u+1) \ldots p) = (q\,12 \ldots p)\Big)$,

waarin $Z_{12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p} = \sum_{q=p+1}^{q=n} \frac{\partial X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_q} \pm$

$\pm \frac{\partial X_{12\ldots p}}{\partial x_u} \Big(+$ teeken voor $(u\,12 \,..\, (u-1)(u+1) \ldots p) = (12 \ldots p)\Big)$.

Dus $$T_2 = \sum_{u=1}^{u=p} \sum_{q=p+1}^{q=n} \pm \frac{\partial^2 X_{q12\ldots(u-1)(u+1)\ldots p}}{\partial x_u \partial x_q}$$

$\Big(+$ teeken voor $(qu1 \,..\, (u-1)(u+1) \,..\, p) = (q12 \,..\, p)\Big)$

$$+ \sum_{u=1}^{u=p} \frac{\partial^2 X_{12\ldots p}}{\partial x_u^2}.$$

De termen onder het $\Sigma\,\Sigma$-teeken van T_1 worden vernietigd door die van T_2, zoodat we alleen overhouden

$$\sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2 X_{12\ldots p}}{\partial x_h^2}.$$

Gevolg. Is gegeven een vectordistributie ${}^pV$, dan heeft de vectordistributie $\int \frac{V dv}{k_n \pi r^{n-2}}$, over de geheele ruimte geintegreerd, tot tweede afgeleide V. (als $k_n \pi r^{n-1}$ het boloppervlak in R_n uitdrukt.)

De stelling gaat ook door voor een distributie van sommen van vectoren van verschillend aantal dimensies, bv. quaternionen.

We zullen zeggen, dat een vectordistributie de *potentiaaleigenschap* heeft, als haar scalarwaarden voldoen aan de eischen van verdwijnen in 't oneindige, die aan een scalarpotentiaalfunctie in R_n moeten gesteld worden. [1]) En we zullen in het volgende onderstellen, dat de vectordistributie van uitgang de potentiaaleigenschap bezit. Dan geldt:

Stelling 4. Een vectordistributie V is door haar totale afgeleide der tweede orde Z eenduidig bepaald.

Immers de scalarwaarden van V zijn elk eenduidig bepaald door de scalarwaarden van Z, waaruit ze door de operatie $\int \frac{scal.\ Z\, dv}{k_n\, \pi r^{n-2}}$ worden afgeleid.

Stelling 5. Een vectordistributie is door haar totale afgeleide der eerste orde eenduidig bepaald.

Immers uit de eerste totale afgeleide volgt de tweede, en daaruit volgens de vorige stelling de vector zelf.

We zullen zeggen, dat een vectordistributie de *veldeigenschap* heeft, indien de scalarwaarden van de totale afgeleide der eerste orde voldoen aan de eischen, die aan een agensdistributie van een scalarpotentiaalfunctie in R_n moeten gesteld worden. En we zullen in het volgende onderstellen, dat de vectordistributie van uitgang de veldeigenschap bezit. Dan geldt:

Stelling 6. Elke vectordistributie is te beschouwen als een totale afgeleide, m. a. w. elke vectordistributie heeft een potentiaal, en die potentiaal is door haar eenduidig bepaald.

Bewijs. Zij V de gegeven distributie, dan is:

$$P = \int \frac{\nabla V . dv .}{k_n\, \pi r^{n-2}}$$

haar potentiaal. Immers $\nabla^2 P = \nabla V$ of $\nabla(\nabla P) = \nabla V$, of $\nabla P = V$. Verder volgt uit de veldeigenschap van V, dat P eenduidig bepaald is als ∇^{-2} van ∇V, dus als ∇ van V. Duidelijk heeft P de potentiaal-eigenschap, de veldeigenschap behoeft ze echter niet te hebben.

N.B. Een distributie, die hier buiten beschouwing blijft, omdat

[1]) Gewoonlijk wordt de eisch gesteld, dat de functie moet worden oneindig klein van de n—2de orde t. o. v. de afstand tot het eindige. Men kan echter bewijzen, dat oneindig klein worden zonder meer voldoende is.

ze niet de veldeigenschap, ofschoon wel de potentiaaleigenschap heeft, is b.v. het fictieve krachtveld van een enkel agenspunt in R_2. Immers hier is niet een in 't oneindige verdwijnende — en als zoodanig dan eenduidig bepaalde — potentiaal. Het magnetisch veld in R_3 heeft wèl de veldeigenschap, en ook alle velden van een enkel agenspunt in R_3 en hoogere ruimten.

Noemen we de eerste afgeleide van ${}^{p}V$: $\overset{1}{\nabla}V$, de tweede: $\overset{2}{\nabla}V$, dan is ${}^{p}V$ te splitsen in:

$$\nabla\int\frac{\overset{1}{\nabla}V\,.\,dv}{k_n\,\pi r^{n-2}} = \nabla P_1 = \overset{2}{\nabla}P_1 = {}^{\;\;p}_{p+1}V.$$

en

$$\nabla\int\frac{\overset{2}{\nabla}V\,.\,dv}{k_n\,\pi r^{n-2}} = \nabla P_2 = \overset{1}{\nabla}P_2 = {}^{\;\;p}_{p-1}V.$$

Uit het voorgaande volgt ook direct:

Stelling 7. Elke ${}^{\;\;p}_{p-1}V$ heeft als potentiaal een ${}^{p-1}_{\;\;p}V$. Elke ${}^{\;\;p}_{p+1}V$ heeft als potentiaal een ${}^{p+1}_{\;\;p}V$.

We kunnen als volgt, vooreerst van de ${}^{\;\;p}_{p+1}V$, aangeven de elementairdistributie, d. w. z. die bijzondere ${}^{\;\;p}_{p+1}V$, waarvan de willekeurige R_n-integraal moet worden genomen, om de meest algemeene ${}^{\;\;p}_{p+1}V$ te krijgen.

Immers de algemeene ${}^{\;\;p}_{p+1}V$ is $\overset{2}{\nabla}$ van de algemeene ${}^{p+1}V$, is dus de algemeene R_n-integraal van de $\overset{2}{\nabla}$ van een geïsoleerden $(p+1)$-dimensionalen vector, die, zooals we licht meetkundig zien, bestaat uit gelijke ^{p}vectoren in het oppervlak van een ^{p}bol, met oneindig kleinen straal om het punt van den gegeven geïsoleerden vector, en in de R_{p+1} van den vector beschreven.

Evenzoo is de algemeene ${}^{\;\;p}_{p-1}V$ de $\overset{1}{\nabla}$ van de algemeene ${}^{p-1}V$, is dus de algemeene R_n-integraal van de $\overset{1}{\nabla}$ van een geïsoleerden ${}^{p-1}$vector, die bestaat uit gelijke ^{p}vectoren loodrecht op het oppervlak van een ${}^{n-p}$bol, met oneindig kleinen straal beschreven om het punt van den gegeven geïsoleerden vector in de R_{n-p+1}, loodrecht op dien vector.

Stelling 8. We kunnen nu de algemeene ${}^{p}V$ denken als willekeurige integraal van elementairvelden E_1 en E_2, waar:

$$E_1 = \nabla \cdot \int \frac{{}^{p-1}_{\;p} Z dv}{k_n \pi r^{n-2}}$$, waar ${}^{p-1}_{\;p} Z$ bestaat uit de ${}^{p-1}$vectoren in het oppervlak van een oneindig kleinen ${}^{p-1}$bol B_z . . . . . (1)

$$E_2 = \nabla \cdot \int \frac{{}^{p+1}_{\;p} Y dv}{k_n \pi r_{n-2}}$$, waar ${}^{p+1}_{\;p} Y$ bestaat uit de ${}^{p+1}$ vectoren loodrecht op het oppervlak van een oneindig kleinen ${}^{n-p-1}$bol B_y. . (2)

Overigens moeten op eindigen afstand van hun oorsprong de velden E_1 en E_2 volkomen identiek gebouwd zijn; immers twee velden E_1 en E_2 met denzelfden oorsprong moeten zijn te sommeeren tot een geïsoleerden ^{p}vector in dien oorsprong.

We kunnen de bollen B_y en B_z met hun indicatrices noemen *elementairwervelstelsels* W_y en W_z. Een veld is dan door zijn elementairwervelstelsels eenduidig bepaald, en kan beschouwd worden als door die wervelstelsels veroorzaakt.

We gaan nu de theorie op eenige voorbeelden toepassen.

Het krachtveld in R_2.

Het veld E_1. De elementairbol B_z wordt hier twee vlak bij elkaar gelegen punten, het elementairwervelstelsel W_z gaat over in twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden, in die beide punten geplaatst. Het geeft een scalarpotentiaal $\frac{\cos \varphi}{r}$, waarin φ de hoek is van den voerstraal met de R_1 van W_z, d.i. de verbindingslijn der beide punten van W_z. Het elementairveld is de (eerste) afgeleide van de potentiaal (de gradient); het is het veld van een agensdubbelpunt in 2 dimensies.

Het veld E_2. De elementairbol B_y bestaat weer uit twee vlak bij elkaar gelegen punten, het elementairwervelstelsel W_y stelt in die twee punten twee gelijke en tegengestelde planivectoren. De planivectorpotentiaal (door een scalarwaarde bepaald) wordt ook hier weer $\frac{\cos \varphi}{r}$; het veld zelf wordt dus verkregen door alle vectoren van een veld E_1 90° te draaien. Daar het aan den anderen kant buiten den oorsprong met E_1 identiek gebouwd moet zijn, kunnen we het veld E_1 resp. E_2 „zichzelf duaal" noemen.

In onze ruimte is het veld E_1 te verwerkelijken als dat van een vlakke oneindig lange en smalle magnetische band met polen langs de randen; het veld E_2 als dat van twee oneindig lange evenwijdige rechte electrische stroomen, vlak bij elkaar en tegengesteld gericht.

Het planivector-(wervel-)veld in R_4.

Het veld E_1. De elementairbol B_z is een cirkeltje, het elementairwervelstelsel W_z een stroompje daarlangs. Het levert en lijnvectorpotentiaal $= \frac{\sin\varphi}{r^3}$, gericht volgens de cirkels, die zich op het vlak van W_z als met W_z concentrische cirkels projecteeren, en waar φ is de hoek van den voerstraal met het normaalvlak van W_z. Het veld is de eerste afgeleide (rotatie) van deze potentiaal.

Het veld E_2. De elementairbol B_y is weer een cirkeltje, het elementairwervelstelsel W_y stelt in de punten van dat cirkeltje gelijke R_2-vectoren er loodrecht op. De R_2-potentiaal bestaat uit de R_2's loodrecht op de potentiaalvectoren van een veld E_1: het veld E_2 wordt dus verkregen door van alle planivectoren van een veld E_1 de normaalvlakken te nemen. Daar aan den anderen kant E_1 en E_2 buiten den oorsprong identiek gebouwd zijn, kan men ook hier weer zeggen, dat het veld E_1 resp. E_2 zichzelf duaal is.

We kunnen dus het wervelveld in R_4 beschouwen als teweeggebracht door elementaircirkelstroompjes van tweeërlei aard; twee gelijke stroomen van verschillende soort brengen gelijk gebouwde wervelvelden te weeg, maar het eene veld staat volkomen loodrecht op het andere.

Zijn dus van een veld de beide voortbrengende stroomstelsels gelijk, dan bestaat het uit gelijkbeenige dubbelwervelingen.

Het krachtveld in R_3.

Het veld E_1. W_z geeft een dubbelpunt; hierbij komt een scalarpotentiaal $\frac{\cos\varphi}{r^2}$, waar φ de hoek van den voerstraal met de as van het dubbelpunt is; de afgeleide (gradient) geeft het bekende veld van een elementairmagneet,

Het veld E_2. W_y bestaat uit gelijke planivectoren, loodrecht op een cirkelstroompje. Representeeren we de planivectorpotentiaal door den lijnvector er loodrecht op, dan vinden we voor dien lijnvector: $\frac{\sin\varphi}{r^2}$, gericht volgens de cirkels, die zich op het vlak van W_z als met W_z concentrische cirkels projecteeren, en waar φ is de hoek van den voerstraal met de loodlijn op het cirkelstroompje. Het veld E_2 is de tweede afgeleide van de planivectorpotentiaal, d.i. de rotatie van den normaal-lijnvector.

Volgens het vroeger afgeleide is het veld E_2 van een cirkelstroompje

buiten den oorsprong gelijk aan het veld E_1 van een elementairmagneet loodrecht op het stroompje.

We hebben zoo het principe afgeleid, dat een willekeurig krachtveld kan worden beschouwd als teweeggebracht door elementairmagneten en elementairstroompjes. Een continu agglomeraat in het eindige van elementairmagneten geeft een stelsel eindige magneten; een continu agglomeraat in het eindige van elementairstroompjes geeft een stelsel eindige gesloten stroomen, d. w. z. van eindige afmetingen; de lineaire lengte der aparte stroomen kan oneindig zijn.

Men kan natuurlijk volgens stelling 6 de scalarpotentiaal ook opbouwen uit die van enkele agenspunten ($\frac{1}{4\pi} \times$ de tweede afgeleide van het veld), en de vectorpotentiaal uit die van stroomelementen (loodlijn op $\frac{1}{4\pi} \times$ de eerste afgeleide van het veld), maar het fictieve „veld van een stroomelement" heeft overal rotatie, is dus het werkelijke veld van een vrij gecompliceerde stroomdistributie. Een veld, dat als eenige stroom een stroomelement zou hebben, is niet alleen physisch, maar ook mathematisch onbestaanbaar. Een veld van een enkel agenspunt, hoewel physisch misschien even onbestaanbaar, is mathematisch in de Euclidische ruimte tengevolge van haar oneindige uitgestrektheid toevallig mogelijk als het veld van een magneet, waarvan de eene pool zich oneindig ver heeft verwijderd.

Ook in de hyperbolische ruimte is om dezelfde reden het veld van een enkel agenspunt bestaanbaar, maar in de elliptische en sferische ruimten, die eindig zijn, is het even onbestaanbaar geworden als het veld van een stroomelement. De wijze waarop Schering (Göttinger Nachr. 1870, 1873; vergel. ook Fresdorf diss. Göttingen 1873; Opitz diss. Göttingen 1881) en Killing (Crelle's Journ. 1885) de potentiaal der elliptische ruimte opbouwen, uitgaande van de onderstelling, dat als eenheid van veld moet mogelijk zijn het veld van een enkel agenspunt, voert dan ook tot ongerijmde consequenties, waarop Klein (Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie) gewezen heeft, zonder evenwel een verbetering voor te slaan. Om de potentiaal der elliptische en sferische ruimten op te bouwen, kan niet anders dan het veld van een dubbelpunt als eenheid van veld worden genomen, wat hier te ver zou voeren, maar in een volgende mededeeling nader zal worden uitgevoerd.

Met het krachtveld in R_3 is tegelijk het er mee duale wervelveld in R_3 behandeld. Het is een integraal van wervelvelden, zooals die om de krachtlijnen van een elementairmagneet en zooals die om de inductielijnen van een elementairkringstroom loopen.

Het krachtveld in R_n.

Het veld E_1. W_z geeft weer een dubbelpunt; dit geeft een scalarpotentiaal $\frac{\cos\varphi}{r^{n-1}}$, waar φ is de hoek tusschen voerstraal en dubbelpuntsas; de gradient hiervan geeft wat we kunnen noemen het veld van een elementairmagneet in R_n.

Het veld E_2. W_y bestaat uit gelijke planivectoren, loodrecht op een ${}^{n-2}$bolletje B_y. Om nu de planivectorpotentiaal in een punt P te vinden, noemen we OL de loodlijn op de R_{n-1}, waarin B_y gelegen is, noemen het vlak LOP het „meridiaanvlak" van P, stellen $\angle LOP = \varphi$, en noemen OQ de in het meridiaanvlak getrokken loodlijn op OL. We zien dan, dat alle planivectoren van W_y de richting OL met het meridiaanvlak gemeen hebben, dus ontbonden kunnen worden volgens dat meridiaanvlak en een vlak, dat het meridiaanvlak loodrecht snijdt. De laatste ontbondenen heffen, als ze, gedeeld door de $n-2^{de}$ macht van hun afstand tot P, in P worden geplaatst, elkaar twee aan twee op, en de eerste geven paren van gelijke en tegengestelde planivectoren, gericht evenwijdig aan het meridiaanvlak, en van elkaar op oneindig kleinen afstand verwijderd volgens de richting OQ. Deze veroorzaken in P een planivectorpotentiaal volgens het meridiaanvlak $= c\frac{\sin\varphi}{r^{n-1}}$. Het veld E_2 is van deze potentiaal de $\nabla = \overline{\nabla}^2/$, en is buiten den oorsprong identiek met het veld van een elementairmagneet volgens OL.

Het krachtveld in R_n kan dus worden beschouwd als teweeggebracht door 1°. magneten 2°. wervelstelsels bestaande uit de vlakke werveltjes loodrecht op een ${}^{n-2}$bolletje opgericht. We kunnen de oorzaak ook zoeken in de bolletjes zelf met hun indicatrices, en zeggen dat het veld wordt teweeggebracht door magneten en wervelbolletjes van $n-2$ dimensies, (zooals in R_3 de oorzaak wordt gezocht in den gesloten electrischen stroom, in plaats van in de wervelingen daaromheen).

Velden van een enkel vlak wervelelement zijn ook hier onbestaanbaar. Toch kan men spreken van het fictieve „veld van een enkele wervel", hoewel dat feitelijk overal in de ruimte werveling heeft. Men kan n.l. zeggen:

Is van een krachtveld in elk punt de divergentie (een scalar) en de rotatie (een planivector) gegeven, dan is het de ∇ van een potentiaal: $\int \frac{div.\, dv}{k_n \pi r^{n-2}} + \int \frac{rot.\, dv}{k_n \pi r^{n-2}}$; deze formule beschouwt het veld als een integraal van fictieve velden van agenspunten, en van enkele wervels.

Natuurkunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER, getiteld: *„Onderzoekingen over het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van gekristalliseerde geleiders"*. (1e Mededeeling).

(Mede aangeboden door den Heer P. ZEEMAN).

§ 1. In de laatste jaren is van verschillende zijden beproefd, om langs theoretischen weg een numeriek verband op te sporen tusschen de verschijnselen der thermische en elektrische geleidbaarheid van metallieke geleiders, en wel met behulp der meer en meer veldwinnende theorie der elektronenbeweging.

Zoo achtereenvolgens in 1900 door P. DRUDE [1]), J. J. THOMSON [2]) en E. RIECKE [3]), en in het afgeloopen jaar door H. A. LORENTZ [4]).

Een der merkwaardige resultaten van deze onderzoekingen is dit, dat *genoemde theorie tusschen het electrisch en thermisch geleidingsvermogen van alle metalen, onafhankelijk van hunne bijzondere chemische geaardheid, eene konstante, en met de absolute temperatuur recht evenredige verhouding heeft doen kennen.*

Onder aanname, dat zich de elektronen in zulk een metaal vrij kunnen bewegen, met eene van de temperatuur afhankelijke snelheid, zooals zulks in ideale gassen met de molekulen plaats heeft, en voorts onder aanname, dat deze elektronen alleen tegen de veel zwaardere metaal-atomen botsen, zoodat m. a. w. hunne onderlinge kollisie verwaarloosd wordt, terwijl beide soorten van deeltjes als volkomen veerkrachtige bollen beschouwd worden, — laat zich inderdaad de verhouding van het thermisch geleidingsvermogen λ tot het elektrisch geleidingsvermogen σ, als eene met de absolute temperatuur T evenredige konstante voorstellen.

Slechts in de absolute waarde van 't verhoudingsgetal gaan de theorieën van DRUDE en LORENTZ uiteen; volgens DRUDE toch zal: $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{4}{3}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$ zijn; volgens LORENTZ is: $\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{8}{9}\left(\frac{\alpha}{e}\right)^2 T$. In deze uitdrukkingen hebben λ, σ en T de boven aangegeven beteekenis, terwijl α eene konstante is, en e de elektrische lading van het elektron voorstelt.

---

[1]) P. DRUDE, Ann. Phys. (1900). **1.** 566; **3.** 369.

[2]) J. J. THOMSON, Rapport du Congrès de physique Paris (1900). **3.** 138.

[3]) E. RIECKE, Ann. Phys. Chem. (1898). **66.** 353, 545, 1199; Ann. Phys. (1900). **2.** 835.

[4]) H. A. LORENTZ, Verslagen Kon. Akad. v. Wet. Amst. (1904—1905). p. 493, 565, 710.

Door JAEGER en DIESSELHORST [1]) zijn naar eene van KOHLRAUSCH afkomstige methode, de waarden voor $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij verschillende metalen experimenteel bepaald. De overeenstemming tusschen theorie en waarneming is in de meeste gevallen alleszins bevredigend; slechts hier en daar, zooals o.a. [2]) bij het bismuth is de afwijking aanzienlijker. Uit hunne metingen aan 't zilver bij 18° C. laat zich voor de uitdrukking: $\frac{aT}{e}$ de waarde: 47×10^6 in C.G.S.-eenheden afleiden. (Zie LORENTZ, loco cit. p. 505); volgens DRUDE's formule: 38×10^6.

§ 2. In den eerstkomenden tijd wensch ik eene experimenteele bijdrage tot deze theorieën te leveren door eene reeks van bepalingen van analogen aard, maar meer in het bijzonder aan *gekristalliseerde* geleiders, en wel in verschillende richtingen van die kristalfasen.

Nemen wij het meest algemeene geval, waarin dus drie onderling loodrechte thermische en elektrische hoofdrichtingen in zulke kristallen zijn aan te wijzen, dan maken de genoemde theorieën het voor alle zulke geleidende kristallen tamelijk waarschijnlijk, dat:

$$\frac{\lambda_x}{\sigma_x} = \frac{\lambda_y}{\sigma_y} = \frac{\lambda_z}{\sigma_z}, \text{ en dus ook: } \lambda_x : \lambda_y : \lambda_z = \sigma_x : \sigma_y : \sigma_z.$$

Niet slechts, dat dus in geleidende kristallen de richtingen van grootere elektrische geleidbaarheid ook tevens die van grootere thermische geleidbaarheid zouden moeten zijn, — theoretisch zou de verhouding der elektrische hoofd-geleidbaarheden numeriek *gelijk* moeten zijn aan die der thermische hoofd-geleidbaarheden.

Tot dusverre is van dergelijke gegevens nog zeer weinig bekend.

---

[1]) W. JAEGER und DIESSELHORST, Berl. Sitz. Ber. (1899). 719 e. v. Verg. REINGANUM, Ann. Phys. (1900) **2**, 398.

[2]) Bij Al, Cu, Ag, Ni, Zn, varieert de waarde voor $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij 18° C. tusschen 636×10^8 en 699×10^8; bij Cd, Pb, Sn, Pt, Pd, tusschen 706×10^8 en 754×10^8; bij Fe tusschen 802 en 832×10^8, dus reeds meer. Bij het *bismuth* is $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij 18° C. 962×10^8. Terwijl bij de overige genoemde metalen de waarden van $\frac{\lambda}{\sigma}$ bij 100° C. en bij 18° C. zich verhouden als gemiddeld: 1,3 : 1, is bij 't *bismuth* deze verhouding slechts 1.12. JAEGER en DIESSELHORST bezigden bij hunne proeven staafjes, en met 't oog op de groote neiging van 't *Bi* om te kristalliseeren, kunnen hunne uitkomsten bij dit metaal niet als geheel ondubbelzinnig worden aangemerkt, daar de waarden van elektrisch en thermisch geleidingsvermogen in de hoofdrichtingen van 't gekristalliseerde bismuth zeer aanzienlijk verschillen.

Het best onderzochte geval is dat van den ijzerglans, $Fe_2 O_3$, en wel van een, een weinig titaandioxyd-houdend mineraal van Zweedsche herkomst, hetwelk door H. Bäckström en K. Angström [1]) op zijn thermisch en elektrisch geleidingsvermogen onderzocht werd. Zij vonden voor de verhouding van het thermisch geleidingsvermogen bij dit ditrigonale mineraal in de richting der hoofd-as (c) en in die, loodrecht daarop (a), bij 50° C.:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1.12.$$

Voor de verhouding der elektrische weerstanden w bij diezelfde temperatuur vonden zij:

$$\frac{w_c}{w_a} = 1.78, \text{ en dus: } \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 1.78.$$

Hieruit volgt, dat bij genoemden geleider de theorie wèl, voor zoover het den *kwalitatieven* samenhang der geleidingsvermogens aangaat, met de observatie overeenstemt, doch kwantitatief *niet*, en wel is, — in tegenstelling met de meest-voorkomende afwijkingen, — hier de verhouding der grootheden λ *kleiner* dan die der grootheden σ.

Ook de empirische regel van Jannettaz, volgens welke de geleidbaarheid voor warmte, parallel de richtingen van volkomener splijtbaarheid in kristallen tevens 't grootst is, gaat hier slechts in zóóverre op, als de ijzerglans, welke eene uitgesproken splijtbaarheid *niet* bezit, zich dan toch nog 't best laat klieven volgens de basis {111} (Miller), d. w. z. parallel aan het vlak der boven met a aangeduide richtingen.

§ 3. Om onze kennis in dit opzicht derhalve wat te verrijken werd het plan opgevat, om in eene reeks van bepalingen, het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen voor eenige hooger-, en ook voor lager-symmetrische kristallijne geleiders, en wel als 't kon, voor metalen, te onderzoeken. Voorloopig stel ik mij ten doel de verhouding dier geleidbaarheden in de verschillende hoofdrichtingen te bepalen en vervolgens later wellicht ook metingen dier geleidingsvermogens zelve in absolute maat uit te voeren.

I. Over de thermische en elektrische geleidbaarheden bij het gekristalliseerde Bismuth, en bij den Haematiet.

Metingen van het thermisch en elektrisch geleidingsvermogen van het bismuth zijn reeds bekend.

---

[1]) H. Bäckström en K. Ångström, Ofvers. K. Vetensk. Akad. Förh. (1888). No. 8, 533; Bäckström, ibid. (1894), No. 10, 545.

MATTEUCCI [1]) bepaalde de thermische geleidbaarheid volgens de bekende methode van INGENHOUSZ, door meting van de lengte der afgesmolten waslaag, welke was aangebracht aan 't oppervlak van cylindrische staafjes, uit bismuth, // en ⊥ op de hoofd-as gesneden, terwijl 't eene uiteinde in op 150° C. verhit kwik gedompeld werd. Hij vond als gemiddelde waarde voor de verhouding der hoofdgeleidbaarheden, loodrecht en normaal op de hoofd-as, de waarde 1,08. Hier gaat de regel van JANNETTAZ op, aangezien de volkomen splijtbaarheid van het ditrigonale bismuth plaats heeft langs {111} (MILLER), dus loodrecht op de hoofd-as. JANNETTAZ [2]) heeft de SÉNARMONT'sche methode op 't bismuth toegepast. Hij deelt mede, dat de ellipsen bij het bismuth eene groote excentriciteit hebben, exakte metingen echter voerde hij niet uit.

Kort geleden heeft LOWNDS [3]) de SÉNARMONT'sche methode opnieuw op 't bismuth toegepast. Hij vindt voor de verhouding der halve ellips-assen: 1.19, en dus voor de verhouding der geleidbaarheden: 1.42.

Het laatste onderzoek is van PERROT [4]). Volgens de SÉNARMONT'sche methode vindt hij als assenverhouding der ellipsen ongeveer 1.17, en dus voor de verhouding der geleidbaarheden ⊥ en // as: 1.368, hetgeen met het door LOWNDS gevonden getal vrij goed overeenstemt. Ten tweede bepaalde PERROT de genoemde verhouding volgens eene door C. SORET aangegeven methode, welke reeds vroeger ook door THOULET [5]) was voorgesteld, en wel door meting van den tijd, welke er verloopt tusschen de momenten, waarop twee stoffen met bekende smeltpunten ϑ_1 en ϑ_2, aan verschillende zijden van een blok der te onderzoeken stof op gegeven afstand geplaatst, beginnen te smelten. Als indices werden gebezigd: *a-Naftylamine* ($\vartheta = 50°$ C.), *o-Nitro-Aniline* ($\vartheta = 66°$ C.), en *Naftaline* ($\vartheta = 79°$ C.).

Als gemiddelde van alle waarnemingen vindt PERROT aldus als verhouding der hoofdgeleidbaarheden: 1,3683, hetgeen volkomen met zijn resultaat volgens SÉNARMONT's methode overeenstemt.

Echter wordt door hem terecht opgemerkt, dat deze overeenstemming tusschen beide uitkomsten *eene geheel toevallige* is, en dat de methode van THOULET en SORET *niet* als van algemeene geldigheid mag beschouwd worden. Het bewijs daarvan is door den Heer

---

1) MATTEUCCI, Ann. Chim. et Phys. (3). **43**. 467. (1855).

2) JANNETTAZ, Ann. de chim. phys. **29**. 39. (1873).

3) L. LOWNDS, Phil. Magaz. V. 152. (1903).

4) L. PERROT, Archiv. d. Science phys. et nat. Génève (1904). (4). **18**. 445.

5) THOULET, Ann. de Chim. Phys. (5). **26**. 261. (1882).

C. CAILLER, langs theoretischen weg geleverd[1]); de overeenkomst wordt hier bewerkt door de toevallige *kleine* waarde van een quotient: $\frac{hl}{k}$, waarin l de dikte van het plaatje bismuth is, en h en k de koëfficienten zijn van uitwendige en inwendige geleidbaarheid.

§ 4. Ik heb getracht, de verhouding der hoofdgeleidingsvermogens te bepalen volgens de door W. VOIGT aangegeven methode.

Zooals bekend is, berust deze methode op de meting van den hoek, welke de twee isothermen met elkaar maken aan de grenslijn tusschen twee plaatjes, welke tot eene kunstmatige tweeling zijn samengevoegd, wanneer de warmtestrooming langs de grenslijn voortschrijdt. Zijn λ_1 en λ_2 de beide hoofdgeleidbaarheden van een aan de kristallografische hoofd-as parallel gesneden bismuthplaatje, en is de hoek φ, welke beide hoofdrichtingen met de grenslijn maken, gelijk aan 45°, dan is volgens eene vroeger[2]) afgeleide formule:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = tg\left(45° + \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

§ 5. Het door mij gebezigde bismuth werd mij door den Heer Dr. F. L. PERROT op de meest welwillende wijze afgestaan.

Ook hièr betuig ik den genoemden geleerde nogmaals mijn hartelijken dank.

Het door mij onderzochte prisma is dàt, hetwelk de Heer PERROT in zijne publikatie's[3]) met M aanduidt, en voor hetwelk hij volgens de SÉNARMONT'sche methode voor $\frac{\lambda_a}{\lambda_c}$ de waarde 1,390 vond. Het aan Dr. VAN EVERDINGEN destijds afgestane prisma A, leverde op dezelfde wijze voor $\frac{\lambda_a}{\lambda_c}$ de waarde 1,408.

Parallel aan de kristallografische as, en wel in twee, onderling 90° verschillende richtingen van het basis-vlak {111}, werden twee plaatjes gesneden, en deze tot tweelingsplaatjes, met $\varphi = 45°$, vereenigd.

Al spoedig bleek, dat de VOIGT'sche methode[4]) hier bijzondere moeilijkheden opleverde, hetgeen, zooals Prof. VOIGT mij mededeelde, bij *metalen* juist het algemeen-optredende euvel is. Vooreerst is 't moeilijk, een samenhangenden overtrek van elaïdine-zuur + was

[1]) C. CAILLER, Archiv. de Scienc. phys. et nat. Genève (1904). (4). 18. 457.
[2]) Deze Verslagen. (1906). Maart p. 799.
[3]) Zie pag. 4, noot 10.
[4]) VOIGT, Göttinger Nachr. (1896). Heft 3, p. 1—16; ibid. (1897). Heft 2. 1—5.

te vinden; meestal trekt zich het gesmolten mengsel op de gladgepolijste oppervlakte tot druppeltjes samen, in stede van te stollen tot eene gelijkmatige laag. Ten tweede vallen de isothermen meest kromlijnig uit, en treden er in hun vorm allerlei onregelmatigheden op, welke wel met de groote specifieke geleidbaarheid der metalen in verband met de zooeven genoemde eigenaardigheid, hun oorzaak zullen hebben. Op raad van den Heer VOIGT heb ik eerst 't metaaloppervlak met een uiterst dun laagje vernis bedekt; deze lost in 't gesmolten zuur op, en doet dit in vele gevallen beter hechten. Erg beste resultaten leverde ook dit hier niet op. Daarentegen gelukte het mij tenslotte eene behoorlijke bedekking der oppervlakte te verkrijgen, door de witte was te vervangen door de *gele* was der apotheken. Deze bevat n.l. eene, waarschijnlijk uit de honig afkomstige kleefstof, en levert, in goede verhouding met elaïdinezuur gemengd, de gewenschte oppervlakte-laag.

Dan heb ik verder de onderzijde van het plaatje, en de zijkanten, behalve de twee, welke $\perp$ op de grenslijn staan, met een dikke laag vernis, met b. v. kwikjodide-koperjodide aangemengd, bestreken [1]). De verwarming werd dan bij het overtrekken niet hooger dan tot beginnend zwart-worden ($\pm$ 70° C.) voortgezet.

De plaatjes moeten rechthoekigen of vierkanten vorm hebben, aangezien anders de isothermen meestal krom worden.

Verder is 't eene vereischte, *snel* te verhitten, dus de koperen bout op vrij hooge temperatuur te brengen; ook dàn hebben de isothermen rechteren vorm en leveren meer konstante waarden voor ε.

De metingen verrichtte ik op de dubbele objekttafel van een LEHMANN'sch kristallisatie-mikroskoop, en wel op een met dik zeemleder overtrokken objektglaasje, om de te snelle afkoeling en stolling van 't overtrek-laagje tegen te gaan.

Na tallooze vergeefsche pogingen gelukte het ten slotte eene langere reeks van konstante waarden te verkrijgen. Als gemiddelde uit een 30-tal observatie's vond ik: $\varepsilon = 22°12'$, en dus:

$$\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1,489.$$

§ 6. De thans gevonden waarde is wat grooter dan die, welke de Heer PERROT heeft gevonden. Het leek mij niet van belang ontbloot, te onderzoeken, in hoeverre eene dergelijke afwijking ook in andere

---

1) De door RICHARZ (Naturw. Rundschau, **17**, 478 (1902)) voorgeslagen methode van experimenteeren leverde in dit geval geene genoegzaam scherp begrensde isothermen, en werd dus opgegeven.

gevallen aanwezig was, en of zij steeds, vergeleken met de, langs den door SÉNARMONT, JANETTAZ en ROENTGEN voorgeslagen weg verkregen uitkomsten, dezelfde richting heeft.

Inderdaad heeft het onderzoek aan vele mineralen mij geleerd, dat alle vroeger verkregen waarden *kleiner* zijn dan die, welke langs den hier gevolgden weg verkregen worden.

Eerst meende ik zelfs, dat deze verschillen nòg grooter waren, dan die, welke hier medegedeeld worden. Ofschoon meer uitgebreid onderzoek, ook aan eenige, mij door Prof. VOIGT welwillend geleende plaatjes, deed erkennen, dat deze verschillen niet zulk een omvang hadden, als ik eerst vermoedde, zoo *blijft* toch de afwijking steeds in *dezelfde* richting bestaan.

Zoo mat ik aan een plaatje, uit een *Apatiet*-kristal van Stillup in Tyrol, den hoek ε, en vond dien $= 17°$. Uit de ligging der isothermen volgt bovendien nog dat $\lambda_c > \lambda_a$ is, zoodat: $\frac{\lambda_c}{\lambda_a} = 1{,}35$ wordt.

Aan een *kwarts*plaatje, van Prof. VOIGT afkomstig, vond ik: $\varepsilon = 30\frac{1}{2}°$, zoodat hier $\frac{\lambda_c}{\lambda_a} = 1{,}75$ wordt. Aan een plaatje uit *Antimoniet* van Skikoku in Japan, parallel aan het vlak {010} gesneden, werd $\frac{\lambda_c}{\lambda_a}$ zelfs veel grooter gevonden dan 1,74, welke waarde uit DE SÉNARMONT's en JANNETTAZ' proeven volgt, daar zij voor de verhouding der halve ellips-assen : 1.32 vinden.

Voor *Apatiet* vinden zij evenzoo 1,08, voor kwarts 1,73, terwijl TUCHSCHMIDT de warmtegeleiding van dit laatste mineraal volgens de WEBER'sche methode in absolute maat bepaalde, en de waarde 1,646 voor de verhouding $\frac{\lambda_c}{\lambda_a}$ uit zijne proeven volgt.

Steeds liggen de afwijkingen in dien zin, dat de waarden van het quotient $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$, als $\lambda_1 > \lambda_2$ is, *grooter* uitvallen, wanneer de VOIGT'sche methode wordt aangewend, dan in 't geval van die van DE SÉNARMONT. Toch is de hier gevolgde methode principieel zóó zuiver, en biedt zij in zóóveel mindere mate aanleiding tot waarnemingsfouten, dat zij zeker de voorkeur boven de andere onderzoekingswijze verdient.

Ten slotte werd dus ook de *IJzerglans* van Elba nog op zijn geleidingsvermogen onderzocht. Een plaatje, parallel aan de *c*-as gesneden, bleek inhomogeen te zijn, en gasblaasjes te bevatten. Aan een fraai gepolijst preparaat van Prof. VOIGT werden door mij bij herhaling de hoeken ε gemeten, en vrijwel konstant $10\frac{1}{2}°$ gevonden, terwijl de ligging der isothermen leerde, dat λ_a ook hièr grooter dan λ_c was.

3

Voor den *Yzerglans* volgt hieruit de waarde : $\frac{\lambda_a}{\lambda_c} = 1{,}202$. De waarde, door Bäckström en Angström aan hun materiaal gevonden, met behulp der door Christiansen aangegeven methode, was 1,12. Ook hier ligt de afwijking in den boven omschreven zin.

Uit de medegedeelde proeven vindt men voor de verhouding : $\varkappa_a : \varkappa_c$ bij beide kristalfasen, als daaronder verstaan wordt : $\left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)_a : \left(\frac{\lambda}{\sigma}\right)_c$, de waarden :

Bij *Bismuth* : $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c} = 1{,}128$.

Bij *Haematiet* : $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c} = 1{,}480$.

Hierbij zijn mijne metingen van $\frac{\lambda_a}{\lambda_c}$ gekombineerd met de beste waarde door van Everdingen aan het Perrot'sche prisma gevonden,[1]) nl.: $\frac{\sigma_a}{\sigma_c} = 1{,}68$, en met de door de Zweedsche onderzoekers aan den haematiet gevonden waarde : 1,78 bij 50° C.

§ 7. Ware de overeenstemming tusschen theorie en waarneming volkomen, dan zou in beide gevallen $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c} = 1$ zijn. De genoemde waarden 1,128 en 1,480 zijn dus in zekeren zin eene maat voor de grootte van afwijking tusschen de waarneming en de gevolgtrekking, die door de elektronentheorie waarschijnlijk wordt gemaakt.

In de eerste plaats valt dan op, dat de overeenstemming veel beter is bij het *bismuth* dan bij den *ijzerglans*. Dit is ook wel duidelijk, als men bedenkt, dat de theorie toch in eerste instantie voor *metallische* geleiders is opgesteld. De invloed van de bijzondere geaardheid der materie bij het *oxyde*, in vergelijk met het ware *metaal*, doet zich hier duidelijk gelden.

Men zou zich kunnen afvragen, of wellicht ook eenige samenhang tusschen de kristalstruktuur en de chemische geaardheid eenerzijds, en de genoemde waarden van $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}$ anderzijds, is aan te toonen. Een dergelijk verband zou dáárom van beteekenis zijn, omdat het wellicht een wegwijzer kan zijn ter opsporing van de bijzondere, in de

---

[1]) van Everdingen, Archives Néerland. (1901) 371 ; Versl. Akad. v. Wet. (1895—1900) ; Comm. Phys. Lab. Leiden, 19, 26, 37, 40 en 61. Zie Archiv. Néerl. p. 452 ; staafjes No. 1 en No. 5.

kristallijne struktuur gelegene faktoren, welke hier eene volledige aansluiting van elektronentheorie en observatie in den weg staan.

§ 8. Vooreerst valt op te merken, dat eene vergelijking van de strukturen beider fasen hier als van zelf aangewezen is. Beide onderzochte stoffen kristalliseeren ditrigonaal-skalenoëdrisch, en hebben analoge assenverhoudingen: voor *bismuth*: $a : c = 1 : 1,3035$ (G. Rose), voor *ijzerglans*: $a : c = 1 : 1,3654$ (Melczer). Bij beide lichamen is de habitus die van 't rhomboëder, hetwelk bij elk hunner zeer dicht tot het regulaire hexaëder nadert. De karakteristieke hoek α is nl. voor het *bismuth* $= 87°34'$, voor den *ijzerglans* $= 85°42'$. Vooral aan 't bismuth is de pseudo-kubische bouw zeer duidelijk: de vlakken van volkomene splijtbaarheid, welke aan die der vormen {111} en $\{11\bar{1}\}$ beantwoorden, naderen in hooge mate door hunne kombinatie tot het regulaire oktaëder. Ofschoon de ijzerglans geene volkomen splijtbaarheid bezit, zoo laat hij zich toch in elk geval, met schelpachtig scheidingsvlak, 't best klieven volgens {111}. Het lijdt wel geen twijfel, of de elementair-parallelepipeda der beide kristalstrukturen zijn in beide fasen pseudo-kubische, rhomboëdrische konfiguratie's, en de vraag is dan vooreerst, in welke verhouding de molekulaire dimensie's dier cellen in beide kristallen tot elkaar staan.

Denkt men zich in alle kristalfasen op zoodanige wijze de geheele ruimte in volume-eenheden verdeeld, dat elk dier, alom aaneensluitende, onderling kongruente, b.v. kubische elementen juist één enkel chemisch molekuul omvat, dan volgt daaruit, dat bij verschillende kristallen de grootte dier volume-elementen evenredig is met $\frac{M}{d}$, waarin M 't molekuulgewicht der stoffen, en d 't specifiek gewicht der kristallen is. Stelt men nu in elke kristalfase den inhoud van de elementaircellen der struktuur gelijk aan dit aequivalent-volume $\frac{M}{d}$, dan zullen de afmetingen dier cellen voor alle kristallen op eene zelfde lengteeenheid herleid zijn, n.l. alle op de lengte van eene kubus-ribbe die aan 't volume-element eener kristalfase toebehoort, wier dichtheid door hetzelfde getal wordt uitgedrukt als haar molekuulgewicht; want in dat bijzonder geval toch, is $V = \frac{M}{d} = 1$. Berekent men nu de afmetingen van zulk een elementair-parallelopipedon der Bravais'sche struktuur, welks inhoud gelijk is aan het quotient $\frac{M}{d}$, en welks ribben zich verhouden als de kristalparameters $a : b : c$, dan zijn de aldus gevonden dimensie's χ, ψ en ω, de zgn. *topische parameters*

der fase, welke, tegelijk onafhankelijk van elkaar door BECKE en MUTHMANN ingevoerd, bij de onderlinge vergelijking van chemisch-verschillende kristalfasen al groote diensten bewezen hebben. In het bijzonder geval, dat de elementair-cellen der kristalstruktuur *rhomboëdrischen* vorm hebben, zooals zulks bij ditrigonale kristallen het geval is, worden de parameters χ, ψ en ω aan elkaar gelijk ($=\rho$). De in dit geval geldige relatie's zijn :

$$\rho=\left(\frac{V}{sin^2\,\alpha\,.\,sin\,A}\right)^{\frac{1}{3}},\quad \text{met}\quad sin\,\frac{A}{2}=\frac{sin\,\frac{\alpha}{2}}{sin\,\alpha}.$$

Voert men thans deze berekeningen uit met de hier geldende waarden: $Bi=207{,}5$; $Fe_2O_3=159{,}64$; $d_{Bi}=9{,}851$ (PERROT); $d_{Fe_2O_3}=4{,}98$, dan worden dus:

$$V_{Bi}=21{,}064 \quad \text{en} \quad V_{Fe_2O_3}=32{,}06,$$

en vindt men met behulp der gegeven betrekkingen, en de waarden van α en A voor elke fase: [1])

$$\frac{\rho_{Bi}}{\rho_{Fe_2O_3}}=\frac{2{,}7641}{3{,}1853}.$$

Vergelijkt men nu eens deze waarden voor de ribben der rhomboëdrische elementair-cellen van de kristalstruktuur met die van de verhoudingen $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}$ in beide fasen, dan blijkt merkwaardigerwijze de volgende betrekking tusschen hen te bestaan:

$$\left(\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}\right)_{Fe_2O_3}:\left(\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}\right)_{Bi}=\rho^2_{Fe_2O_3}:\rho^2_{Bi}=1{,}32.$$

De overeenstemming is zoo goed, als men met het oog op de waarnemings-fouten wenschen mag: bij den eersten term der vergelijking is de waarde volkomen zuiver: 1.312, bij den laatsten term: 1,328.

Voor beide fasen laat zich met andere woorden in ons geval de verhouding $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_c}$ schrijven in den vorm: $C.\rho^2$, waarin C eene konstante is, die van de bijzondere chemische geaardheid der fase onafhankelijk is.

In plaats van de verhouding: $\rho_1^2:\rho_2^2$, voldoet misschien nog beter: $\rho_1^2\,sin\,\alpha_1:\rho_2^2\,sin\,\alpha_2=1.305$. Deze uitdrukkingen echter stellen niets

---

[1]) Voor bismuth is: $\alpha=87°34'$ en $A=87°40'$; voor den haematiet is: $\alpha=85°42'$ en $A=86°0'$. De hoek A is 't supplement van den standhoek op de poolribben der rhomboëdrische cellen, en α is de, tusschen de poolribben ingesloten, vlakke hoek.

anders voor dan de *oppervlakte der elementaire mazen van de drie hoofdvlakken der trigonale molekuulstruktuur*, want deze toch zijn in ons geval ruiten, wier vlakke hoek $= \alpha$ is. Dan zou dus de verhouding van $\frac{\varkappa_a}{\varkappa_o}$ in beide fasen recht evenredig zijn met de retikulaire dichtheid van de hoofd-netvlakken der BRAVAIS'sche strukturen. Eene keuze tusschen deze en bovengenoemde opvatting kan hier nog niet gedaan worden, omdat α_1 en α_2 te weinig van 90° verschillen. Bovendien zal verder onderzoek aan andere kristallen moeten leeren, of men hier met iets meer dan met eene toevallige overeenkomst te doen heeft. Dergelijke onderzoekingen, ook aan lager-symmetrische geleiders, worden op dit oogenblik met dit doel ondernomen; naar ik hoop zal ik over niet te langen tijd daaromtrent nadere mededeelingen kunnen doen.

Zaandam, Mei 1906.

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer J. STEIN. S.J.: „*Waarnemingen der totale zonsverduistering van* 30 *Aug.* 1905 *te Tortosa (Spanje)*".

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN).

Tegen het einde van Juni 1905 begaf ik mij op uitnoodiging van den Heer R. CIRERA S.J., Directeur van het nieuwe „Observatorio del Ebro" naar Tortosa, om te gaan deelnemen aan de waarneming der totale zonsverduistering. Mij werd opgedragen metingen te verrichten der gemeenschappelijke koorde van zon en maan bij begin en einde der verduistering en tevens de oogenblikken der vier contacten te bepalen. De resultaten konden eene bijdrage leveren ter verbetering der betrekkelijke plaatsen van zon en maan.

De bepaling der coordinaten van de waarnemingsplaats werd ten zeerste vergemakkelijkt door de omstandigheid, dat vandaar uit de signalen der drie punten Espina, Gordo en Montsià van 't Spaansche geodesische net zichtbaar zijn. De hoekmetingen met een theodoliet gaven tot resultaat:

$$\varphi = 40°49'\ 13''.43 \quad ; \quad \lambda = 1^m\ 58^s\ 18\ O \text{ van Greenwich.}$$

Hierbij is streng rekening gehouden met den spheroïdalen vorm der aarde.

Latere metingen, door den Heer J. UBAGH uitgevoerd, gaven een

identiek resultaat. Electrische tijdsignalen van de Madridsche sterrenwacht rechtstreeks overgeseind, gaven voor de lengte $1^m\ 58^s.8$ *O* van Greenw. Als meest waarschijnlijke waarde is aangenomen $1^m\ 58^s.8$, het gemiddelde der beide bepalingen. Ter controle deed ik nog een 30-tal poolshoogte-bepalingen met een geïmproviseerd Talcott-instrument, en vond daaruit als gemiddelde: $\varphi = 40°49'\ 14''.8$. De hoogte boven 't zee-niveau is 55 M.

Het instrument, dat mij ten dienste stond voor de eclips-waarneming, was een nieuwe aequatoriaal van MAILHAT (Parijs), van $2^m.40$ brandpuntsafstand en 16 cM. opening, voorzien van een oculair met dubbelen mikrometer. De schroefwaarde van een der beide schroeven werd door mij bepaald uit 18 doorgangen van circumpolair-sterren in de nabijheid van den meridiaan. Ik vond daarvoor:

$$R_1 = 60''.3534 \quad \pm 0''.0117$$

De waarde der andere schroef werd bepaald, door de intervallen met behulp der eerste uit te meten:

$$R_2 = 1.00010 \,.\, R_1$$

Het observatorium is in 't bezit van een goede sterre-klok, waarvan de gang sinds een viertal maanden met zorg werd gecontroleerd met behulp van ster-doorgangen. De Heer B. BERLOTY, geoefend observator, met deze taak belast, heeft in den nacht van 29—30 Aug. een 20-tal tijdsterren geobserveerd, zoodat de kennis van den tijd aan nauwkeurigheid niets te wenschen overliet.

Tijdens de phase-waarnemingen was het objectief met een diaphragma van karton tot 25 mm. gereduceerd. Het oculair, met vergrooting 30, was voorzien van een blauw glas. De waarnemingen der koorden werden voortgezet, zoolang de grootte van het gezichtsveld van het oculair, dat ruim 20′ in diameter was, dit toestond. De momenten der waarnemingen werden op mijn „top"-teeken genoteerd door den Heer BELDA, gezeten voor eene M. T.-standaardklok, die vóór, tijdens en na de waarnemingen werd vergeleken met de sterreklok; een andere assistent noteerde de mikrometer-aflezingen.

Tijdens het begin en het einde der verduistering was de omgeving der zon volmaakt helder, zoodat ik de koorde-metingen ongestoord kon volbrengen, hoewel nu en dan bemoeilijkt door onregelmatigheden in den gang van het drijfuurwerk. Van eenige minuten vóór tot na totaliteit was de zon met lichte wolken bedekt, maar toch waren de oogenblikken van contact nog met voldoende zekerheid te constateeren.

WAARNEMINGEN.

Eerste contact: $11^h 55^m 39^s.1$ (M. Tijd v. Greenw.)

	Lengte der koorde (verbeterd voor refractie)
11 56 28 .2	294″.93
57 12 .1	390.24
57 35 .2	437 22
58 20 .0	507.74
59 8 .2	566.98
59 38 .9	608.94
12 0 9 .2	642 58
1 25 .0	721.69
2 49 .9	798.82
4 18 .3	876.43
4 57 .0	906.12
5 44 .3	935.04
6 15 .9	959.75
6 53 .2	983.94
7 18 .9	1004.93
8 1 .2	1030.37
8 43 .3	1052.59
9 23 .3	1078.17
9 49 .1	1096.89
10 16 .1	1106.16
10 42 .2	1124.37
11 9 .3	1138.90
11 26 .1	1144.49
11 56 .3	1160.37
12 24 .3	1178.82

Tweede contact: $1^h 16^m 13^s.2$

Derde contact: 1 19 7 .2

	Lengte der koorde
$2^h 15^m 53^s.0$	1297″.92

h m s	Lengte der koorde ″
2 17 17 .3	1256.94
18 4 .5	1232.27
18 25 .3	1219.81
18 42 .5	1209.51
19 13 3	1193.25
19 38 .2	1181.49
20 45 .0	1157.42
21 5 .3	1129.77
21 28 .3	1117.78
22 1 .0	1095.75
22 35 .3	1073.82
23 4 .1	1054.40
23 21 .3	1041.52
23 54 .3	1020.90
24 36 .0	993.28
25 2 .2	973.01
25 35 .3	950.47
26 2 .3	920.28
26 29 .3	903.24
26 52 .3	880 81
27 13 .3	863.90
27 36 .2	845.41
28 7 .6	819.14
28 43 .3	779.01
29 5 .3	762.98
29 38 .6	726.38
30 2 .3	697.40
30 22 .3	677.17
30 52 .3	637.13
31 14 .8	610.37
31 40 .6	573 84
32 4 .5	538.62
32 42 .6	480 78
33 3 .3	437.21
33 13 .3	406.92

Vierde contact: 2h 34m 44s .7.

Bij de afleiding der resultaten heb ik de zonne-parallaxe gelijk 8″.80 genomen; voor 't overige heb ik de constanten ontleend aan de publicatie „Observatorio Astronomico de Madrid. Memoria sobre el eclipse total de Sol del dia 30 de Agosto de 1905”. Deze zijn:

Gemiddelde straal der zon $R_0 = 15'59''.63$ (AUWERS)

„ „ „ maan $r_0 = 15'32''.83$ (KUESTNER en BATTERMANN)

Parallaxe der maan $\pi_0 = 57'\ 2''.68$

Rechte klimming der zon, Aug. 30, 12^h M.T. Gr. $\alpha_\odot = 158°10'44''.24$

Declinatie „ „ „ „ $\delta_\odot = 9°\ 9'33''.19$

Rechte klimming der maan, „ „ $\alpha_☾ = 157°42'47''.95$ (HANSEN-NEWCOMB).

Declinatie „ „ „ „ $\delta_☾ = 9°53'\ 3''.48$ (HANSEN-NEWCOMB).

Elke waarneming levert eene voorwaarde-vergelijking ter bepaling van de correcties Δ van de elementen van zon en maan. Noemen wij deze correcties achtereenvolgens:

$$\Delta R,\ \Delta r,\ \Delta\alpha_\odot,\ \Delta\alpha_☾,\ \Delta\delta_\odot,\ \Delta\delta_☾,\ \Delta\pi,$$

dan verkrijgen wij door vergelijking der waargenomen afstanden en koorden met de berekende, de volgende vergelijkingen: (de coefficienten zijn hier tot twee decimalen afgerond)

KOORDEN-VERGELIJKINGEN.

I. Waarnemingen na 't eerste contact.

											W.—B.
										″	″
+7.98	ΔR	+7.97	Δr	+7.14	$\Delta\alpha_{☾-\odot}$	−3.20	$\Delta\delta_{☾-\odot}$	+1.67	$\Delta\pi =$	+50.71	−10.36
+5.50	„	+5.49	„	+4.88	„	−2.19	„	+1.12	„	+36.23	− 5.57
+4.88	„	+4.87	„	+4.30	„	−1.93	„	+1.01	„	+37.59	+ 0.70
+4.10	„	+4.09	„	+3.56	„	−1.60	„	+0.81	„	+32.40	+ 1.78
+3.58	„	+3.57	„	+3.10	„	−1.39	„	+0.69	„	+22.49	− 2.13
+3.34	„	+3.32	„	+2.87	„	−1.29	„	+0.64	„	+24.96	+ 0.27
+3.15	„	+3.13	„	+2.69	„	−1.20	„	+0.59	„	+22.45	− 0.67
+2.78	„	+2.76	„	+2.34	„	−1.05	„	+0.51	„	+19.66	− 0.49
+2.50	„	+2.48	„	+2.06	„	−0.92	„	+0.43	„	+16.66	− 1.12
+2.29	„	+2.26	„	+1.85	„	−0.82	„	+0.38	„	+20.03	+ 4.06
+2.21	„	+2.18	„	+1.76	„	−0.79	„	+0.36	„	+19.60	+ 4.28
+2.13	„	+2.10	„	+1.68	„	−0.75	„	+0.34	„	+13.42	− 1.19
+2.08	„	+2.05	„	+1.63	„	−0.73	„	+0.33	„	+15.60	+ 1.43
+2.02	„	+1.99	„	+1.57	„	−0.70	„	+0.31	„	+14.57	+ 0.47
+1.99	„	+1.95	„	+1.53	„	−0.69	„	+0.30	„	+17.85	+ 4.46
+1.94	„	+1.90	„	+1.48	„	−0.66	„	+0.29	„	+15.73	+ 2.82
+1.89	„	+1.85	„	+1.43	„	−0.64	„	+0.27	„	+11.49	− 0.97
+1.85	„	+1.81	„	+1.38	„	−0.62	„	+0.26	„	+12.97	+ 0.87
+1.82	„	+1.78	„	+1.35	„	−0.60	„	+0.25	„	+16.44	+ 4.68
+1.80	„	+1.76	„	+1.32	„	−0.59	„	+0.25	„	+10.08	− 1.56
+1.77	„	+1.73	„	+1.30	„	−0.58	„	+0.24	„	+13.51	+ 1.19
+1.75	„	+1.71	„	+1.27	„	−0.57	„	+0.24	„	+12.97	+ 1.77
+1.74	„	+1.69	„	+1.26	„	−0.56	„	+0.23	„	+ 9.37	− 1.70
+1.71	„	+1.67	„	+1.23	„	−0.55	„	+0.22	„	+10.37	− 0.50
+1.69	„	+1.65	„	+1.21	„	−0.54	„	+0.22	„	+12.71	+ 2.06

II. Waarnemingen vóór 't laatste contact.

											W.—B.
										"	"
+1.52	ΔR	+1.46	Δr	—0.99	$\Delta \alpha$ (—⊙)	+0.49	$\Delta \delta$ (—⊙)	+0.16	$\Delta \pi$ =	— 5.39	+ 0.51
+1.57	„	+1.51	„	—1.05	„	+0.52	„	+0.18	„	— 5.30	+ 0.97
+1.60	„	+1.55	„	—1.09	„	+0.53	„	+0.19	„	— 5.84	+ 0.67
+1.61	„	+1.56	„	—1.10	„	+0.54	„	+0.19	„	— 7.39	— 0.76
+1.62	„	+1.57	„	—1.12	„	+0.55	„	+0.19	„	— 8.59	— 1.88
+1.64	„	+1.59	„	—1.14	„	+0.56	„	+0.20	„	— 8.19	— 1.31
+1.66	„	+1.62	„	—1.16	„	+0.57	„	+0.20	„	— 6.20	+ 0.81
+1.71	„	+1.67	„	—1.23	„	+0.59	„	+0.22	„	[+ 7.95]	—
+1.74	„	+1.70	„	—1.25	„	+0.61	„	+0.22	„	— 2.58	+ 4.99
+1.75	„	+1.71	„	—1.27	„	+0.62	„	+0.23	„	— 5.97	+ 1.72
+1.78	„	+1.74	„	—1.30	„	+0.64	„	+0.24	„	— 7.71	+ 0.22
+1.82	„	+1.78	„	—1.34	„	+0.66	„	+0.25	„	— 7.88	+ 0.29
+1.85	„	+1.81	„	—1.38	„	+0.67	„	+0.25	„	— 8.47	— 0.07
+1.87	„	+1.83	„	—1.40	„	+0.68	„	+0.26	„	— 9.75	— 1.22
+1.91	„	+1.87	„	—1.44	„	+0.70	„	+0.27	„	— 8.05	+ 0.78
+1.96	„	+1.93	„	—1.50	„	+0.73	„	+0.28	„	— 6.19	+ 3.02
+2.00	„	+1.97	„	—1.54	„	+0.75	„	+0.29	„	— 7.13	+ 2.15
+2.05	„	+2.02	„	—1.60	„	+0.78	„	+0.31	„	— 4.88	+ 4.94
+2.10	„	+2.07	„	—1.64	„	+0.80	„	+0.32	„	—13.04	— 2.92
+2.14	„	+2.12	„	—1.69	„	+0.82	„	+0.33	„	— 9.47	+ 0.96
+2.19	„	+2.16	„	—1.74	„	+0.85	„	+0.34	„	—12.56	— 1.80
+2.24	„	+2.21	„	—1.79	„	+0.87	„	+0.35	„	—11.04	+ 0.04
+2.29	„	+2.26	„	—1.84	„	+0.89	„	+0.36	„	—10.50	+ 0.87
+2.36	„	+2.34	„	—1.91	„	+0.93	„	+0.38	„	— 8.40	+ 3.46
+2.46	„	+2.44	„	—2.01	„	+0.98	„	+0.40	„	—14.81	— 2.31
+2.53	„	+2.51	„	—2.08	„	+1.01	„	+0.42	„	— 9.40	+ 3.53
+2.65	„	+2.63	„	—2.20	„	+1.06	„	+0.44	„	—11.28	+ 2.38
+2.74	„	+2.72	„	—2.29	„	+1.11	„	+0.46	„	—14.62	— 0.37
+2.83	„	+2.81	„	—2.37	„	+1.15	„	+0.48	„	—12.33	+ 2.47
+2.98	„	+2.96	„	—2.52	„	+1.22	„	+0.52	„	—16.88	— 1.15
+3.12	„	+3.10	„	—2.65	„	+1.28	„	+0.55	„	—15.37	+ 1.38
+3.29	„	+3.27	„	—2.81	„	+1.36	„	+0.58	„	—18.89	— 1.29
+3.49	„	+3.48	„	—3.00	„	+1.45	„	+0.63	„	—19.50	— 1.52
+3.90	„	+3.89	„	—3.39	„	+1.64	„	+0.71	„	—18.51	+ 2.74
+4.20	„	+4.19	„	—3.67	„	+1.77	„	+0.78	„	—26.71	— 3.86
+4.37	„	+4.34	„	—3.82	„	+1.85	„	+0.81	„	—38.87	—10.28

Contact-vergelijkingen:

$I \quad \Delta R + \Delta r + 0.903\ \Delta a_{(-\odot} - 0.405\ \Delta \delta_{(-\odot} = +\ 3''.78$

$II \quad \Delta R - \Delta r - 0.9668\ \Delta a_{(-\odot} - 0.2007\ \Delta \delta_{(-\odot} +$
$+ 0.0004\ \Delta^2 a_{(-\odot} - 0.0036\ \Delta a \Delta \delta + 0.0091\ \Delta^2 \delta_{(-\odot} = -\ 6''.52$ [1])

$III \quad \Delta R - \Delta r + 0.3085\ \Delta a_{(-\odot} - 0.9489\ \Delta \delta_{(-\odot} +$
$+ 0.0104\ \Delta^2 a_{(-\odot} + 0.0068\ \Delta a \Delta \delta + 0.0012\ \Delta^2 \delta_{(-\odot} = +\ 4''.02$

$IV \quad \Delta R + \Delta r - 0.889\ \Delta a_{(-\odot} + 0.435\ \Delta \delta_{(-\odot} = -\ 11''.18$

Een enkele blik op de koorden-vergelijkingen leert, dat 't niet mogelijk is, daaruit alle onbekenden te bepalen. Tengevolge van de evenredigheid der coefficiënten kan men de eerste 25 vergelijkingen na het 1e contact vervangen door ééne enkele; evenzoo de 35 overige. Om 't gewicht der waarnemingen onmiddellijk na het eerste en vóór het laatste contact — wanneer de koorde minder scherp begrensd is en snel varieert — te verminderen, heb ik de beide normaalvergelijkingen niet gevormd volgens de methode der kleinste kwadraten, maar eenvoudig door optelling.

Wij schrijven ze in den vorm:

$68.1(\Delta R + \Delta r) + 56.2\Delta a - 25.2\Delta\delta = +489''.46 - 0.35(\Delta R - \Delta r) - 12.9\Delta\pi$

$-81.6(\Delta R + \Delta r) + 65.1\Delta a - 31.6\Delta\delta = +397''.87 + 0.24(\Delta R - \Delta r) + 12.8\Delta\pi$

waaruit wij vinden:

$$\Delta R + \Delta r = +\ 1''.05 \quad - 0.015\ \Delta\delta - 0.003\ (\Delta R - \Delta r) - 0.16\ \Delta\pi.$$
$$\Delta a = +\ 7''.428 + 0.465\ \Delta\delta - 0.001\ (\Delta R - \Delta r) - 0.02\ \Delta\pi.$$

Verwaarloozen wij de laatste termen, dan vinden wij als resultaat uit de koordenvergelijkingen:

$$\Delta R + \Delta r = +\ 1''.05 \quad - 0.015\ \Delta \delta_{(-\odot}$$
$$\Delta a_{(-\odot} = +\ 7''.428 + 0.465\ \Delta \delta_{(-\odot}.$$

Uit de vergelijkingen van het 2e en 3e contact vinden wij:

$$\Delta a_{(-\odot} = +\ 7''.793 + 0.464\ \Delta \delta_{(-\odot}.$$
$$\Delta a_{(-\odot} = +\ 7''.13 + 0.667\ (\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta \delta_{(-\odot} = -\ 1''.43 + 1.437\ (\Delta R - \Delta r).$$

Eindelijk, de vergelijkingen van 't 1ste en 4de contact geven:

$$\Delta a_{(-\odot} = +\ 8''.35 + 0''.468\ \Delta \delta_{(-\odot}$$
$$[\Delta R + \Delta r = -\ 3''.78]$$

Dit laatste resultaat voor $\Delta R + \Delta r$, dat geheel afwijkt van 't

[1]) Het is niet geoorloofd — zooals meestal geschiedt — bij de vergelijkingen van het tweede en derde contact de kwadratische termen te verwaarloozen, daar de correcties Δa en $\Delta \delta$ in vergelijking met den afstand van zon- en maancentrum (in casu 46″) te groot zijn.

boven gevondene, is weinig betrouwbaar. Het wordt volkomen verklaard door aan te nemen, dat 't eerste contact te laat, het laatste te vroeg is geobserveerd. Dat 't eerste contact te laat is genoteerd, is ternauwernood te betwijfelen, daar ik door het te vroeg intreden der zonsverduistering geheel verrast en overrompeld werd. Als bewijs dat 't laatste contact te vroeg is aangegeven dient eene momentopname der zon (diameter = 10 cm.) genomen op hetzelfde oogenblik waarop ik het „top"-teeken gaf. Daarop is werkelijk nog een kleine indeuking in den rand der zon te constateeren.

Ter vergelijking der verkregen uitkomsten hadden de Heeren TH. WULF en J. D. LUCAS de goedheid mij vrije beschikking te laten over het resultaat hunner hoogst interessante waarnemingen van het 2e en 3e contact, met behulp van lichtgevoelige selenium-elementen te Tortosa verkregen. (Men zie hierover Astron. Nachr. N°. 4071). Voor die momenten vonden zij:

Begin der totaliteit $1^u\,16^m\,15^s,6$
Einde „ „ $1\ \ 19\ \ 6,9$.

Deze leveren de vergelijkingen:

$$\left.\begin{aligned}\Delta R - \Delta r - 0.9650\,\Delta\alpha_{☾-\odot} - 0.2117\,\Delta\delta_{☾-\odot} + 0.0004\,\Delta^2\alpha_{☾-\odot} -\\ - 0.0039\,\Delta\alpha\,\Delta\delta + 0.0092\,\Delta^2\delta_{☾-\odot} = -\,5''.73\\ \Delta R - \Delta r + 0.3063\,\Delta\alpha_{☾-\odot} - 0.9493\,\Delta\delta_{☾-\odot} + 0.0105\,\Delta^2\alpha_{☾-\odot} +\\ + 0.0069\,\Delta\alpha\,\Delta\delta + 0.0012\,\Delta^2\delta_{☾-\odot} = +\,4''.10\end{aligned}\right\}\quad (A)$$

Waaruit wij vinden:

$$\Delta\alpha_{☾-\odot} = +\,6''.42 + 0.653\,(\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\delta_{☾-\odot} = -\,1''.76 + 1.404\,(\Delta R - \Delta r).$$

Trekt men de twee vergelijkingen A van elkaar af, dan vindt men:

$$\Delta\alpha_{☾-\odot} = +\,7''.238 + 0.465\,\Delta\delta_{☾-\odot}$$

Dit is in uitmuntende overeenstemming met het resultaat der koorde-vergelijkingen $\Delta\alpha = +\,7''.428 + 0.465\,\Delta\delta$; maar tevens blijkt dat 't niet mogelijk is uit de combinatie der contact- en koorde-vergelijkingen $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$ en $\Delta R - \Delta r$ afzonderlijk te bepalen.

Bij het afleiden van het eindresultaat is aan de uitkomst der koordemetingen en der contact-bepalingen WULF—LUCAS een gelijk gewicht = 1 gegeven, en aan mijne waarnemingen van het 2e en 3e contact het gewicht ½. Zoo vinden wij, met terzijdelating van het eerste en vierde contact:

$$\Delta R + \Delta r = +\,1''.07 - 0.02\,(\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\alpha_{☾-\odot} = +\,6''.66 + 0.66\,(\Delta R - \Delta r)$$
$$\Delta\delta_{☾-\odot} = -\,1''.65 + 1.42\,(\Delta R - \Delta r).$$

De laatste kolom der koorde-vergelijkingen geeft de afwijkingen in den zin Waarn.-Berek., die overblijven, als men deze getalwaarden substitueert. De middelbare fout der eerste 25 waarnemingen (afgezien van de eerste) bedraagt ± 2″.53; die der laatste 35 (afgezien van de laatste) is ± 2″.21.

Voor de Boekerij worden aangeboden: 1°. door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM de dissertatie van den Heer H. E. BOEKE: „De mengkristallen bij natrium-sulfaat, -molybdaat en -wolframaat", 2°. door den Heer ZWAARDEMAKER de dissertatiën van A. DEENIK: „Het onderscheidingsvermogen voor toonintensiteiten; D. J. A. VAN REEKUM: „Quantitatieve onderzoekingen over reflexen"; J. GEWIN: „De woelbewegingen van het hart".

De vergadering wordt gesloten.

(6 Juni, 1906).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING

van Zaterdag 30 Juni 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 48.

Verslag van de Heeren WEBER, WIND en VAN DER STOK over een circulaire van den Directeur van het Oceanographisch Museum te Monaco, p. 49.

P. VAN ROMBURGH: „Over glyceryltriformiaat", p. 51.

P. VAN ROMBURGH en W. VAN DORSSEN: „Over eenige derivaten van het 1-3-5 hexatriëen", p. 54.

H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM: „Driephasenlijnen bij chloralalcoholaat en zoutzuuraniline", p. 58.

H. HAGA: „Over de polarisatie van Röntgenstralen", p. 64.

M. NIEUWENHUIS—VON UEXKÜLL-GÜLDENBAND: „De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten". (Aangeboden door de Heeren J. W. MOLL en F. A. F. C. WENT), p. 69.

L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten". (Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 75.

A. PANNEKOEK: „De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 94.

H. KAMERLINGH ONNES: „Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het Cryogeen Laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met vloeibare waterstof", p. 109. (Met 3 platen). XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus, p. 124. (Met 1 plaat). XII. Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van —252° tot —259° p. 126. (Met 1 plaat). XIII. Bereiding van vloeibare lucht met het Cascadeproces, p. 130. (Met 1 plaat). XIV. Bereiding van zuivere waterstof door distallatie van minder zuivere", p. 132.

H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer", p. 133.

H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficient van Jenaglas en van platina tusschen +16° en —182°, p. 151. XI. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den waterstofthermometer, p. 160. XII. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer", p. 166

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 169.

Errata, p. 169.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren SCHOUTE, KAMERLINGH ONNES, CARDINAAL en WENT dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 29 Juni 1906 met verzoek een onderzoek in te stellen omtrent de vraag, of ten aanzien van de inrichting der op het Rijks-Museum aangebrachte bliksemafleiders en de beproeving daarvan thans andere regels behooren te worden gesteld dan in de jaren 1887 en 1888 zijn aangegeven.

In handen gesteld van de Heeren LORENTZ, ONNES, HAGA en ZEEMAN om daarover advies uit te brengen.

2°. Missive van Z.Exc. den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid d.d. 28 Juni 1906 waarbij bericht wordt dat er geene termen bestaan om aan het verzoek der Geologische Commissie te voldoen. In handen gesteld van de Geologische Commissie.

3°. Missive van den Ingenieur Directeur der Rijksopsporing van Delfstoffen waarin deze naar aanleiding van een vroeger schrijven dezer Afdeeling aan den Minister van Waterstaat, Handel en Nijverheid verzoekt in nadere aanraking te komen met de Geologische Commissie, ten einde samenwerking te verkrijgen tusschen beide instellingen bij het onderzoek van den bodem van Nederland. Gesteld in handen der Geologische Commissie.

4°. Missive van den Heer P. DROSTE, namens administrateuren van het P. W. Korthals-fonds, waarbij bericht wordt dat dit jaar weder een som van *f* 600.— zal worden beschikbaar gesteld tot bevordering der kruidkunde. In handen gesteld van de botanische leden der Afdeeling.

5°. Brief van den Voorzitter van het Congrès international pour l'étude des régions polaires, in September a.s. te Brussel te houden, ter begeleiding van verschillende stukken op dat Congres betrekking hebbende en het verzoek bevattende dat de Akademie zich op dat Congres zal doen vertegenwoordigen.

In handen gesteld van de Heeren LELY en WEBER om daarover te dienen van advies.

6°. Brief van de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen, mededeelende dat de Keiz. Akademie van Wetenschappen te Tokio den wensch heeft te kennen gegeven als lid tot de Internationale Associatie van Akademiën toe te treden.

Hieromtrent zal in overleg met de Letterkundige Afdeeling beslist worden.

7°. Circulaire van het Zentralbureau der Internationalen Seismolo-

gischen Association bericht gevende dat het Bureau te Straatsburg thans geheel voor het doen van onderzoekingen ingericht is. Voor kennisgeving aangenomen.

8°. Circulaire van de University te Aberdeen bericht gevende dat de feestviering zal plaats vinden op Dinsdag 25 September a.s. en waarbij verzocht wordt den naam van den vertegenwoordiger der Akademie op te geven. Bericht is gezonden dat de Heer W. EINTHOVEN de Akademie zal vertegenwoordigen.

Oceanographie. — De Heer VAN DER STOK brengt het volgende verslag uit:

Bij schrijven van 29 Mei 1906, No. 27 is ondergeteekenden om praeadvies in handen gesteld eene missive van Dr. J. RICHARD, Directeur van het Musée océanographique te Monaco, waarin hij het voornemen te kennen geeft van den Vorst van Monaco, om een eerste internationaal oceanographisch congres bijeen te roepen op een later nader vast te stellen tijdstip. Voorloopig wordt slechts gevraagd instemming te betuigen met dit voornemen en eventueele opmerkingen, waartoe de circulaire aanleiding kan geven, mede te deelen.

Tot toelichting van het voorstel moge het volgende onder de aandacht der Akademie worden gebracht.

1. Het blijkt meer en meer, dat de problemen van geophysischen en geobiologischen aard in zulk een phase van ontwikkeling verkeeren, dat internationale samenwerking volstrekt noodzakelijk kan worden geacht voor het verzamelen van nauwkeuriger gegevens dan tot nog toe werden verkregen en voor de organisatie van waarnemingen op plaatsen en tijden, waarop langs toevalligen weg geen observaties kunnen worden verwacht.

Zoowel de voor dit doel aan te wenden methoden als de daarvoor noodzakelijke middelen liggen buiten het bereik van individueelen arbeid en zelfs van Instituten en Observatoria.

Alleen door internationale overeenkomst kunnen de methoden van onderzoek en waarneming, zooal niet gelijk, dan toch onderling vergelijkbaar worden en, vooral bij het aanvatten van nieuwe problemen, kan alleen onderling overleg leiden tot een rationeel gebruik van arbeid en geld.

Niet alleen voor het verkrijgen van nieuw materiaal, ook voor de bewerking van de oude, bij instellingen van verschillende nationaliteit opgestapelde, waarnemingen is internationaal overleg onmisbaar.

Mannen van initiatief, die tevens over ruime middelen kunnen beschikken, als de Vorst van Monaco, TEISSERENC DE BORT, LAWRENCE

ROTCH e. a., hebben den weg gewezen, die gevolgd moet worden om de groote problemen der oceanische en atmosferische circulatie met kans op succes te kunnen aanvatten; op den duur echter kan het wetenschappelijk onderzoek niet afhankelijk zijn van dergelijke alleenstaande pogingen, en reeds hunne toewijding aan dezen pionierarbeid wijst er op, dat alleen van georganiseerde, algemeene samenwerking heil is te verwachten.

2. In de tweede plaats blijkt uit de geschiedenis van het geophysisch onderzoek der laatste jaren, dat de belangstelling in de daarbij op den voorgrond tredende problemen bij voortduring toeneemt, zoodat internationale samenwerking een dringende eisch wordt.

Wij kunnen volstaan met te wijzen op de door HILDEBRANDSSON georganiseerde wolkenwaarnemingen over de geheele aarde, op het internationaal onderzoek der hoogere luchtlagen door middel van ballontochten, op de Noordpoolexpedities in 1882—83, de antarktische expedities in den laatsten tijd en op de Associatie voor de studie van aardbevingen, allen ondernemingen, waaraan internationaal overleg tot grondslag heeft gediend,

Het internationaal onderzoek der Noord- en Oost-zee eindelijk, aanvankelijk ondernomen met het oog op belangen van materieelen aard, waaraan negen belanghebbende Staten deelnemen, heeft tot zooveel nieuwe gezichtspunten en problemen geleid, dat hieruit duidelijk blijkt, dat dergelijke problemen alleen op groote schaal kunnen worden aangevat en behandeld.

3. In de derde plaats eindelijk spreken wij het gaarne als onze meening uit, dat niemand hiertoe beter het initiatief had kunnen nemen dan de Vorst van Monaco. Sedert een lange reeks van jaren heeft hij zijn talenten, zijn persoon en zijn middelen gewijd aan oceanographische studiën. De diepzeekaart der aarde, een model werk, tot stand gekomen door internationale coöperatie, heeft haar ontstaan te danken aan zijn initiatief en materieelen steun. Een omvangrijk werk over de resultaten zijner talrijke expedities in den Atlantischen Oceaan, waarbij hem steeds een staf van geleerden van verschillende nationaliteiten ter zijde stond, wordt door hem uitgegeven. Hij heeft den stoot gegeven tot het houden van de Cours d'océanographie te Parijs en op zijn jacht zijn de bekende waarnemingen met vliegers verricht tot peiling van de hoogte der passaatwinden, ook is hij de stichter van het museum voor oceanographie, dat eerlang te Monaco zal worden geopend, en zeer onlangs heeft hij het voornemen te kennen gegeven een Instituut voor Oceanographie te Parijs te stichten.

Op grond van het medegedeelde waaruit blijken moge:

1°. dat internationale organisatie van den arbeid noodzakelijk is,

2°. dat het oogenblik om nu een congres te organiseeren, waar overleg kan worden gepleegd en vanwaar leiding kan uitgaan, gelukkig is gekozen, en

3°. dat de voorsteller de aangewezen persoon is om het voorgestelde plan te opperen en tot een goed einde te brengen,

meenen de ondergeteekenden, dat het voornemen van den Vorst van Monaco groote waardeering en krachtige aanbeveling verdient en dat het op den weg der Akademie ligt een blijk te geven van hare ingenomenheid met dit voornemen, onder mededeeling dat zij hoopt, dat, als het Congres in beginsel tot stand gekomen zal zijn, een of meerdere harer leden bereid zullen gevonden worden haar op het eerste internationaal congres voor Oceanographie te Monaco te vertegenwoordigen.

M. Weber
C. H. Wind.
J. P. van der Stok

De conclusie van het Verslag wordt goedgekeurd.

Scheikunde. — De Heer P. van Romburgh biedt eene mededeeling aan: „*Over glyceryltriformiaat*".

Vele jaren geleden heb ik mij bezig gehouden met de studie van de inwerking van oxaalzuur op glycerine en toen aangetoond [1]), dat bij de bereiding van mierenzuur, volgens de methode van Lorin, als tusschenproduct een glyceryldiformiaat ontstaat. Tevens wendde ik toen reeds pogingen aan om het triformiaat, dat als eenvoudigste representant der klasse van vetten niet zonder belang scheen, te bereiden o. a. ook door het diformiaat met watervrij oxaalzuur te verhitten, wat mij destijds niet gelukte. Later heeft Lorin [2]) deze laatste proeven herhaald met zeer groote hoeveelheden watervrij oxaalzuur. Hij geeft op, dat inderdaad het mierenzuurgehalte stijgt, ten slotte tot 75°/₀, zonder dat hij echter geslaagde pogingen vermeldt om het triformine af te scheiden.

Sinds mijne eerste onderzoekingen heb ik niet opgehouden te trachten mijn doel te bereiken. De opgaven van Lorin, dat men door gebruik te maken van zeer groote hoeveelheden watervrij oxaalzuur

1) Compt. Rend. 93, (1881) 847.
2) „ „ 100, (1885) 282.

het mierenzuurgehalte van het residu kan opvoeren, vond ik bevestigd en ik meende door een voortgezette inwerking ten slotte het gezochte product te kunnen verkrijgen. Herhaalde pogingen hebben echter niet de verwachte uitkomst gehad, al werd dan ook een glycerylformiaat met hoog mierenzuur gehalte gevormd, waaruit door gefractionneerde distillatie in vacuo een met nog enkele procenten diformiaat verontreinigd triformiaat verkregen kon worden.

Ik vermeld hier slechts een paar seriën proeven, die ik te Buitenzorg, eerst met medewerking van Dr. NANNINGA en later van Dr. LONG genomen heb. In de eerste werd een product verkregen dat bij 25° het S. G. 1.309 had en bij titratie 76.6°/₀ mierenzuur gaf, terwijl triformiaat 78.4°/₀ moet geven. Het tekort wijst nog op een gehalte van ruim 10°/₀ diformiaat in het verkregen product.

Bij de andere werd, gedurende een maand, het diformiaat dagelijks met een ruime hoeveelheid watervrij oxaalzuur behandeld, maar ook thans was het resultaat niet gunstiger.

De moeielijkheid om groote hoeveelheden geheel watervrij oxaalzuur te bereiden, gevoegd bij het feit, dat bij de reactie kooloxyde optreedt, waarmede eene vorming van water uit het mierenzuur gepaard moet gaan, geven wel eene voldoende verklaring er voor, dat de reactie niet geheel in den gewenschten zin verloopt. Eene volkomen scheiding van het di- en triformaat is, doordat de kookpunten van beide stoffen slechts weinig verschillen, ook in vacuo niet te verkrijgen.

Daarom nam ik mijn toevlucht tot de inwerking van watervrij mierenzuur op glyceryldiformiaat. Het watervrije mierenzuur bereidde ik door distillatie van geconcentreerd zuur met zwavelzuur in vacuo en daarop volgende behandeling met watervrij kopersulfaat. Ook nu gelukte het mij niet het triformiaat in volkomen zuiveren toestand te bereiden, steeds gaf het bij de titratie waarden, die op een gehalte van ongeveer 10°/₀ diformiaat wezen.

Later, toen het 100°/₀ mierenzuur een goedkoop te verkrijgen handelsproduct geworden was, heb ik die proeven op grootere schaal herhaald, maar al kon ik ook het gehalte aan diformiaat verminderen een zuiver triformiaat werd niet verkregen.

Herhaaldelijk had ik ook beproefd door afkoeling een gekristalliseerd product te verkrijgen, maar te vergeefs, totdat ik eindelijk, door een formiaat met hoog mierenzuurgehalte langen tijd in vloeibaar ammoniak af te koelen, zoo gelukkig was in de zeer dik vloeibare massa een klein kristal te zien ontstaan. Door de temperatuur langzaam te laten stijgen en tegelijkertijd met een glasstaaf de massa om te roeren gelukte het mij den inhoud van de afgekoelde buis bijna

geheel te doen vastworden. Zuigt men dan de kristallen bij 0° af, perst ze bij lage temperatuur tusschen papier en herhaalt men deze bewerkingen met de opnieuw gedeeltelijk gesmolten massa eenige malen dan verkrijgt men ten slotte een volkomen kleurloos, bij 18° smeltend product, waarin bij titratie het voor glyceryltriformiaat vereischte mierenzuurgehalte gevonden werd.

Het. S. G. van het gesmolten product bij 18° is 1.320.

$$n^d_{18} = 1.4412$$

MR. gev. 35.22, ber. 35.32.

Ook het zuivere product, eenmaal gesmolten, wordt bij afkoeling zeer moeielijk vast, tenzij men het met een spoor van het gekristalliseerde ent. Bij snelle kristallisatie verkrijgt men naalden, bij langzame groote, compacte kristallen.

In vacuo laat het triformiaat zich onveranderd distilleeren; het kookpunt ligt bij 38^{mm} bij 163°. Bij snelle distillatie onder de gewone luchtdrukking ondergaat het slechts zeer geringe ontleding. Het kookpunt ligt dan bij 266°. Een met diformiaat verontreinigd product daarentegen laat zich onder die omstandigheden niet distilleeren, maar wordt onder ontwikkeling van koolzuur- en kooloxydegas en vorming van allylformiaat ontleed.

Verhit men het triformiaat langzaam, dan neemt men bij 210° eene duidelijke gasontwikkeling waar; om deze in gang te houden moet de temperatuur echter geleidelijk stijgen. Het ontwikkelde gas bestaat uit ongeveer gelijke volumina koolmono- en dioxyde. Het distillaat bevat eenig mierenzuur, als hoofdproduct allylformiaat en verder geringe hoeveelheden allylalkohol; in de kolf blijft een weinig glycerine achter [1]).

Het glyceryltriformiaat wordt door water, waarin het onoplosbaar is, in de koude slechts langzaam verzeept, met warm water heeft de verzeeping snel plaats.

Ammoniak werkt er op in onder vorming van glycerine en formamide. Met aminen ontstaan de gesubstitueerde formamiden, zooals ik vroeger reeds mededeelde [2]).

De beschreven eigenschappen doen zien, dat het glycerylformiaat, het eenvoudigste „vet", in zijne eigenschappen aanzienlijk verschilt van de triglycerylesters van de hoogere vetzuren.

---

[1]) Deze ontleding van het triformiaat heeft o. m. er aanleiding toe gegeven het gedrag van de formiaten van verschillende glycolen en meerwaardige alkoholen bij verhitting te bestudeeren. Onderzoekingen daarvoor zijn reeds geruimen tijd hier in het laboratorium in gang.

[2]) Zittingsverslag 30 Sept. 1905.

Scheikunde. — De Heer P. VAN ROMBURGH doet, ook uit naam van den Heer W. VAN DORSSEN eene mededeeling: *„Over eenige derivaten van het* 1-3-5-*hexatriëen*".

In de Vergadering van 30 Dec. 1905 is medegedeeld, dat wij door verhitting van het diformiaat van s. divinylglycol er in geslaagd waren een koolwaterstof van de samenstelling C_6H_8 te bereiden waaraan wij de formule:



$$CH_2 = CH - CH = CH - CH = CH_2$$

gaven.

Sinds is deze koolwaterstof in eenigszins grootere hoeveelheid bereid geworden en konden 50 gram in een kolf van LADENBURG, na herhaaldelijke distillatie over natrium, in een koolzuuratmosfeer gefractioneerd worden.

De hoofdmassa kookte thans van 77°—78°.5 (gecorr.; bar. 764,4 mm.)

$$\text{Sp. Gew.}_{13.5} \quad 0.7498$$
$$n_{D\,13.5} \quad 1.4884.$$

Ook nu was er een geringe hoeveelheid af te scheiden van een product met hooger soortelijk gewicht en grooteren brekingsindex.

In de eerste plaats werd de inwerking van broom op de koolwaterstof nader bestudeerd.

Laat men bij de met chloroform verdunde koolwaterstof, bij —10°, onder sterk roeren met een roerder van WITT, eene oplossing van broom in hetzelfde oplosmiddel druppelen dan wordt het broom onmiddellijk geaddeerd en zoodra er één molecuul opgenomen is kleurt de vloeistof zich bij verdere toevoeging geel. Staakt men, zoodra dat punt bereikt is, het toedruppelen en distilleert men de chloroform in vacuo af dan houdt men een gekristalliseerd product over, gedrenkt met vrij veel van een olieachtige stof. Door afpersen en omkristalliseeren uit laag kokenden petroleumaether, verkrijgt men fraaie, kleurlooze kristallen, die bij 85°.5—86° scherp smelten. [1])

Eene broombepaling volgens LIEBIG gaf 66.84°/$_0$, een dibromide $C_6H_8Br_2$ vereischt 66.65°/$_0$.

Een tweede broomadditieproduct, en wel een tetrabromide, werd verkregen door inwerking van broom in chloroform, bij 0°, in 't zonlicht; tegen het eind wordt het broom slechts langzaam opgenomen. Ook nu wordt de chloroform in vacuo verwijderd, waarna men het gevormde product uit methylalkohol omkristalliseert. Het smeltpunt

[1]) In de vorige voorloopige mededeeling is abusievelijk 89°—90° vermeld.

ligt bij 114°—115° en verandert bij omkristalliseeren niet. De analyse toonde aan dat er 4 atomen broom zijn opgenomen.

Analyse: Br. Gev. 80.2°/₀ Ber. v. $C_6H_8Br_4$ 79.99°/₀.

Een derde broomadditieproduct werd het eerst gevonden in het broom, dat bij de bereiding van de koolwaterstof gebruikt was om het door de ontwijkende gassen medegevoerde hexatriëen tegen te houden. Later werd het bereid door bij de met één vol. chloroform verdunde koolwaterstof, bij 0°,3 mol. broom te voegen en het mengsel gedurende 8 u. op 60° te verhitten. De reactie is dan nog niet afgeloopen en men verkrijgt een mengsel van tetra- en hexabromide waaruit met behulp van aethylacetaat het laatste, als een bij 163°.5—164° smeltende stof, verkregen kan worden.

Analyse: Br. Gev. 85.76°/₀. Ber. v. $C_6H_8Br_6$ 85.71°/₀.

Het beschreven *dibromide* bleek bij nader onderzoek identisch te zijn met een door GRINER [1]) uit s. divinylglycol met phosphortribromide verkregen bromide, waarvoor hij het smeltpunt 84.°5—85° opgeeft. Een volgens GRINER bereid product smolt bij 85°.5—86° en gaf met het uit de koolwaterstof bereide dibroomadditieproduct geen smeltpuntsverlaging.

GRINER (loc. cit.) verkreeg door additie van broom aan het dibromide uit het glycol bereid, een tetrabromide $C_6H_8Br_4$, dat bij 112° smolt, benevens een bij 108°—109° smeltend product, hetwelk hij voor een geometrisch isomeer houdt. Bij het bereiden van het tetrabromide volgens GRINER, werd slechts het bij 112° smeltende product verkregen [2]), dat identisch bleek met het hierboven beschreven, uit de koolwaterstof bereide tetrabroomadditieproduct. Een mengsel toch der beide bromiden vertoonde hetzelfde smeltpunt als de beide stoffen afzonderlijk.

Voortgezette inwerking van broom op het tetrabromide volgens GRINER gaf ons eindelijk het bij 163°—164° smeltend hexabromide, identisch met het uit de koolwaterstof bereide.

Door de beschreven broomderivaten is het dus nu, in verband met de resultaten van GRINER, wel uiterst waarschijnlijk, dat de door ons verkregen koolwaterstof inderdaad de boven opgestelde formule heeft.

Volgens de beschouwingen van THIELE over geconjugeerde dubbele bindingen zou men bij de additie van 2 atomen broom aan ons hexatriëen het ontstaan van een stof met de formule:

---

[1]) Ann. chim. phys. [6] **26**. (1892) 381.

[2]) Onderzoekingen op grootere schaal zullen moeten uitmaken of er werkelijk als bijproduct een bij 108° smeltend isomeer optreedt, dat dan slechts een zeer geringen invloed op het smeltpunt van het andere product schijnt te hebben,



$$CH_2Br - CH = CH - CH = CH - CH_2Br \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

dan wel:



$$CH_2Br - CH = CH - CHBr - CH = CH_2 . \quad . \quad . \quad (2)$$

hebben kunnen verwachten, uit welke laatste stof dan door opnieuw addeeren van twee broomatomen het tetrabromide:



$$CH_2Br - CHBr - HC = CH - CHBr - CHBr \quad . \quad . \quad (3)$$

gevormd zou worden

Daar echter het verkregen gekristalliseerde dibromide identisch is met het uit s. divinylglycol bereide waaraan men op grond van de vormingswijze de formule



$$CH_2 = CH - CHBr - CHBr - CH = CH_2 \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

moet toekennen (tenzij, wat in verband met waargenomen feiten à priori niet geheel onwaarschijnlijk geacht kan worden, er, door intramoleculaire atoomverschuiving, inderdaad een bromide van de formule (1) of (2) ontstaan zou zijn) zou in dit geval van twee geconjugeerde systemen de regel van Thiele niet opgaan.

Proeven om uit het gekristalliseerde dibromide het glycol te regenereeren hebben nog niet tot afdoende resultaten gevoerd, zoodat het laatste woord in dit vraagstuk nog niet gesproken is. Het onderzoek ook der vloeibare bromiden wordt echter voortgezet.

Merkwaardig blijft het intusschen, dat bij een stof als dit hexatriëen, hetwelk toch driemaal de dubbele binding bevat, slechts de additie van het eerste molecuul broom gemakkelijk gaat.

Volgens de methode van Sabatier en Senderens gelukt het gemakkelijk het hexatriëen 6 atomen waterstof te doen addeeren. Leidt men den damp ervan met waterstof, bij 125°—130°, over bij lage temperatuur gereduceerd nikkel, dan wordt de waterstof gretig opgenomen en men verkrijgt een lager kokend product, dat evenwel nog geringe hoeveelheden van onverzadigde verbindingen (misschien ook cyclische) bevat. Ter verwijdering van deze werd het product met broom behandeld en, na verwijdering van de overmaat en verdere reiniging, gefractioneerd. Als hoofdfractie werd verkregen een bij 68°,5—69°,5 kokende vloeistof (Bar. 759.7).

$$SG_{12^\circ} = 0,6907 \qquad n_{d_{12^\circ}} = 1.3919$$

Hoewel het kookpunt met dat van het verwachte hexaan overeenstemt, verschillen de voor het spec. gewicht en de refractie gevonden waarden nog te veel van de door Brühl en door Eykman voor hexaan gevondene [1]).

1) Brühl (B. B. 27. (1894) 1066) vindt $SG_{20} = 0.6603$, $n_{d_{20}} = 1.3734$.; Eykman (R. 14, (1881) 187) $SG_{14} = 0.6652$ $n_{d_{14}} = 1.37725$.

Daarom werd het uit hexatriëen verkregen product eenigen tijd met telkens ververscht rookend zwavelzuur geschud, totdat dit zich niet meer kleurde. Na deze behandeling werd verkregen:
een fractie van

Kpt. 69°—70° SG_{14}. 0,6718 $n_{d_{14}}$ 1.38250

en eene van

Kpt. 69°.7—70°.5 SG_{14} 0.6720 $n_{d_{14}}$ 1.38239

Een in het laboratorium door den Heer Scheringa, pharm. stud., volgens Brühl [1]) bereid n. hexaan gaf de volgende waarden

Kpt 69° SG_{14} = 0.664 $n_{d_{14}}$ = 1.3792

terwijl een uit diallyl, volgens de methode van Sabatier en Senderens door den Heer Sinnige, chem. cand., verkregen n. hexaan

Kpt 68°.5—70° SG_{10} 0. 6716 en $n_{d_{10}}$ = 1.38211 gaf.

Het schijnt dus, dat het volgens de methode van Sabatier en Senderens verkregen hexaan nog geringe hoeveelheden van bijmengsels bevat.

Toch kan er wel geen twijfel bestaan of het 1-3-5-hexatriëen neemt 6 atomen waterstof op onder vorming van normaal hexaan.

Van grooter belang voor de kennis der nieuwe koolwaterstof kan echter de reductie met behulp van natrium en absoluten alkohol geacht worden. Zijn in 't algemeen onverzadigde koolwaterstoffen niet geschikt om onder genoemde omstandigheden waterstof op te nemen, anders wordt dit wanneer er een geconjugeerd systeem in aanwezig is. In het 1-3-5-hexatriëen nu vindt men twee geconjugeerde systemen. Men zou nu kunnen verwachten bijv. het optreden van een 2-4 hexadiëen:


$CH_3—CH=CH—CH=CH—CH_3$

dan wel van een 2-5 hexadiëen:


$CH_3—CH=CH—CH_2—CH=CH_2$

Het eerste kan, daar het nog een geconjugeerd systeem heeft, opnieuw twee atomen waterstof opnemen en dan


$CH_3—CH_2—CH=CH—CH_2—CH_3$,

hexeen-3, geven terwijl het andere niet verder gehydreerd zal worden [2]). De verkregen resultaten schijnen er op te wijzen dat inderdaad beide reacties naast elkaar verloopen zijn en het eindproduct der hydreering een mengsel van hexadieen met hexeen is.

10 Gram 1-3-5 hexatriëen werden met 100 gr. kokenden absoluten alkohol en 15 gram natrium behandeld. Nadat het natrium opgelost

[1]) Ann. **200**. (1880) 183.

[2]) Indien er $CH_2=CH—CH_2—CH_2—CH=CH_2$ mocht ontstaan, zal dit evenmin gemakkelijk meer waterstof opnemen.

was werd stoom doorgevoerd, waardoor de gevormde koolwaterstof, met een weinig alkohol er bij, gemakkelijk afgescheiden kon worden. Na redistillatie werd de koolwaterstof met water gewasschen, met chloorcalcium gedroogd en dan over natrium gedistilleerd.

Bij 75°.5 begon zij te koken, dan steeg de temperatuur langzaam tot 81°.

In twee fracties werd de vloeistof opgevangen.

fractie I. Kpt. 75.°5—78° *S.G.*^{10} 0.7326. $n_{d_{10}}$ = 1.4532
„ II. „ 78° —79.°5 „ — „ 1.4665

Dan werden deze fracties weer vereenigd en opnieuw met natrium en alcohol behandeld. Na reiniging en droging werd ook nu geen constant kokende vloeistof verkregen. Zij begon nu bij 72°5 te koken, terwijl de temperatuur opliep tot 80°. De hoofdfractie had de volgende constanten:

Kpt. 72.°5—74° *S.G.*$_{12}$ 0.7146 $n_{d_{12}}$ 1.4205

De fractie 75°—80° had $n_{d_{12}}$ = 1.4351.

Eene elementair analyse der van 72°.5—74° kokende fractie gaf de volgende uitkomst: C 87.06. H 13.32.

Berekend voor C_8H_{16}	C 87.7	H 12.3
„ „ C_8H_{18}	C 85.6	H 14.4

De onderzochte fractie bestaat dus zeer waarschijnlijk uit een mengsel van C_8H_{16} en C_8H_{18}. De hoeveelheid, die wij onder handen hadden, was onvoldoende om eene verdere scheiding te kunnen uitvoeren. Wij hopen in staat te zijn deze proeven op grootere schaal te herhalen, zoodra wij weer over eene ruimere hoeveelheid van het zoo kostbare uitgangsmateriaal beschikken.

Utrecht, Org. Chem. Lab. d. Univ.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM, doet eene mededeeling over: „*Driephasenlijnen bij choralalcoholaat en zoutzuuraniline*".

Het is nu 20 jaren geleden dat de studie der dissociatie-verschijnselen bij verschillende vaste verbindingen van water en gassen mij langs experimenteelen weg de eigenaardige gedaante deed vinden van die driephasenlijn, welke het verband tusschen temperatuur en druk aangeeft voor binaire mengsels waarin eene vaste verbinding naast oplossing en damp voorkomt. De algemeene beteekenis dier lijn werd langs thermodynamischen weg door VAN DER WAALS afgeleid, en de veelvuldigheid van haar optreden werd later door de studie van velerlei andere stelsels bewezen.

Dat men praktisch bij de studie van dissociabele verbindingen zoo veelvuldig met deze driephasenlijn te maken heeft, ligt aan de omstandigheid, dat in een overgroot aantal der meest voor de hand liggende gevallen de vluchtigheid der beide componenten, of van een van beide zoo klein is, dat zelfs bij geringe dissociatie der verbinding onmiddellijk naast deze zoowel damp als vloeistof optreedt.

Bij de latere onderzoekingen, die geleid hebben tot een meer volledig overzicht van de velerlei evenwichtstoestanden die tusschen vaste vloeibare en gasvormige phasen in allerlei conbinatie mogelijk zijn, zijn de drukmetingən meer op den achtergrond geraakt. Naarmate echter het overzicht omtrent den samenhang aller dezer evenwichten bij binaire mengsels hare voltooiing naderde en in een ruimtevoorstelling op 3 assen van concentratie, temperatuur en druk kon worden overzien, ontstond de behoefte om voor sommige evenwichten zoowel theoretisch als experimenteel het verband tusschen temperatuur en druk nog nader vast te stellen en de daarin overgebleven leemten aan te vullen.

Zoo is in den laatsten tijd door verschillende beschouwingen van VAN DER WAALS, SMITS en mijzelf hetzij qualitatief hetzij qualitatief-quantitatief het beloop en het verband van meerdere p,t-lijnen op nieuw nagegaan.

Tot de lijnen, die vroeger nagenoeg niet bestudeerd waren, behoorden de evenwichtslijnen die doorloopen worden, wanneer men bij constant volume de vaste verbinding naast enkel damp aan temperatuurverandering bloot stelt. Experimenteel zijn deze alleen dan gemakkelijk te bepalen, wanneer de vluchtigheid van de minst vluchtige component niet te gering is. STORTENBEKER deed er indertijd eene poging toe bij zijn onderzoek over de verbindingen van chloor en iodium; doch slaagde er niet in hiervoor goede gegevens te krijgen.

In de tweede plaats was het wenschelijk eenige experimenteele bevestiging te vinden voor den eigenaardigen vorm der driephasenlijn eener verbinding, welke door SMITS onlangs werd afgeleid voor het geval, dat in den druk der vloeibare mengsels harer componenten een minimum voorkomt.

Het is nu den heer LEOPOLD gelukt voor beide vraagpunten te gelijker tijd experimenteele bijdragen te vinden bij eene serie van zeer nauwgezet uitgevoerde onderzoekingen, waarbij als vaste verbindingen optreden chloralalcoholaat en zoutzuuraniline.

Vaste verbindingen die twee merkbaar vluchtige bestanddeelen leveren (als PCl_5, $NH_3.H_2S$, $PH_3.HCl$, $CO_2.2\,NH_3$ enz.) zijn vroeger wel onderzocht, maar hetzij alleen op hun dissociatietoestand in gasvorm, hetzij op het evenwicht van vast naast gasmengsels van

verschillende verhouding bij constante temperatuur; maar vloeistoffen treden daarbij eerst bij hooge drukken op, zoodat het beloop der driephasenlijnen nimmer bestudeerd was.

De beide verbindingen werden derhalve zoo gekozen, dat in hunne smeltpunten temperatuur noch druk te hoog waren. Voorts was het verschil in vluchtigheid der twee componenten bij het eerste voorbeeld, chloral + alcohol, veel kleiner dan bij het tweede, anilin + chloorwaterstof. Verder was uit de gegevens omtrent beide verbindingen met vrij groote zekerheid af te leiden dat de vloeibare mengsels hunner componenten een minimumdruk zouden vertoonen.

Dit laatste punt werd allereerst nagegaan door bepaling der kooklijnen, waarin dan omgekeerd een maximum moet voorkomen. In beide gevallen bleek dit te bestaan en gelegen te zijn aan de zijde der minst vluchtige component, in casu chloral of aniline.

Het onderzoek der driephasenlijnen toonde nu allereerst dat deze den verwachten vorm bezitten, waarin namelijk twee maxima en een minimum van druk optreden.

In het eerste stelsel (Fig. 1) is CFD de driephasenlijn en zijn T en T_2 de maxima respectievelijk voor den dampdruk van oplossingen

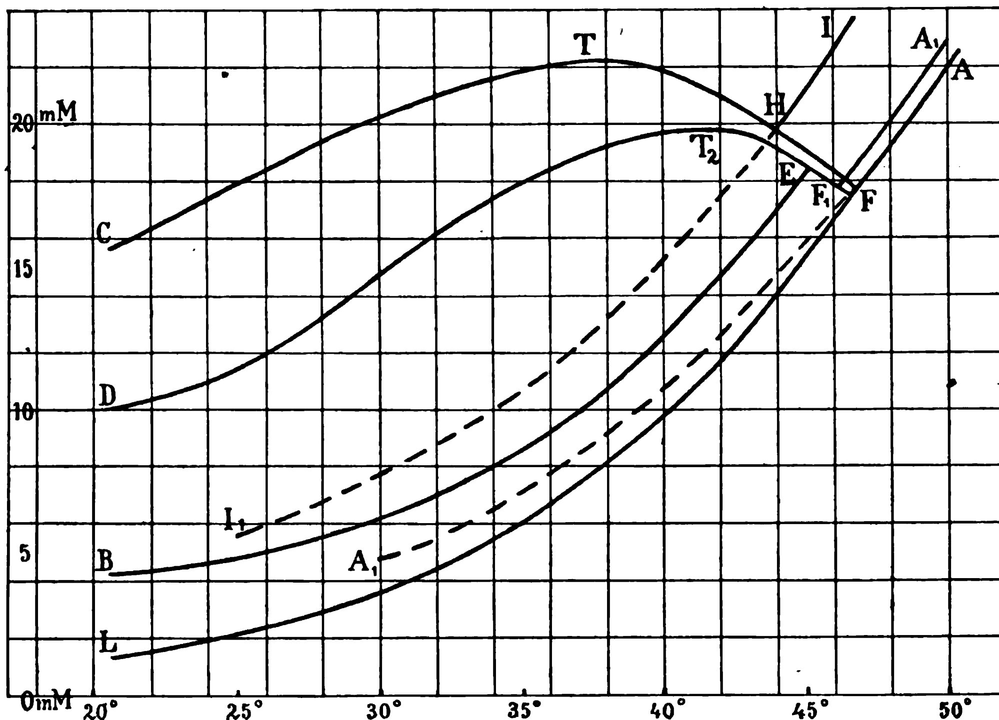


Fig. 1.

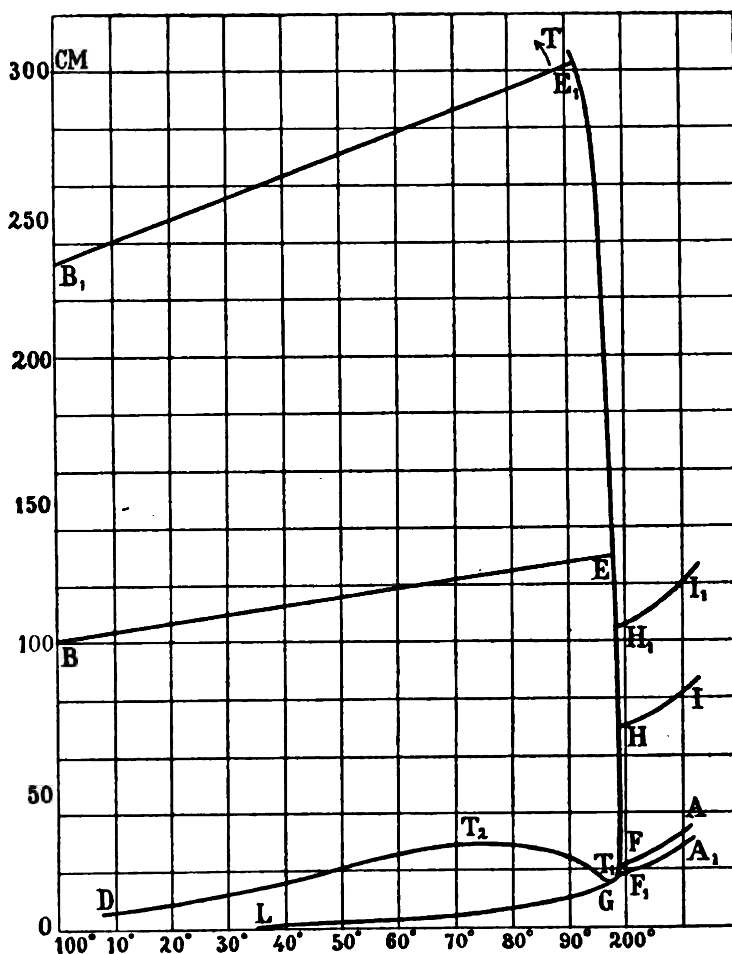


Fig. 2.

met overmaat van alcohol of chloral en verzadigd met chloralalcoholaat, en ligt het minimum zeer dicht bij het smeltpunt *F*.

In het tweede stelsel (zoutzuuraniline Fig. 2) ligt het 1e maximum, bij overmaat van HCl, bij zoo hoogen druk dat deze niet nader bepaald is, het tweede T_2 aan den anilinekant daarentegen bij matigen druk en is het minimum T_1 aan dezelfde zijde gelegen en verder van het smeltpunt verwijderd dan in Fig. 1.

	T_1 minimum	F smeltpunt
p	16 cM.	22.5 cM.
t	197°	199°2

De bepaling dezer lijnen en evenzoo die der evenwichtslijnen voor verbinding + damp of vloeistof + damp, welke in beide figuren nog voorkomen, kan alleen geschieden ter eene of ter andere zijde van

het punt F, omdat men natuurlijk in het apparaat voor het meten der drukkingen nooit anders dan grooter of kleiner overmaat van de eene of van de andere component kan hebben. Daarnaast is het mogelijk het apparaat te vullen met de verbinding in drogen zuiveren staat. Bij de gebezigde verbindingen werd dit bereikt, door zeer zuivere kristallen langs den weg van herhaalde sublimatie in het luchtledige te bereiden.

In het tweede voorbeeld gelukte het daarmee de sublimatielijn van zoutzuuraniline LG te bepalen. Op deze lijn volgt dan het stuk GF der driephasenlijn, omdat voorbij G geen damp meer mogelijk is van dezelfde samenstelling als de verbinding, maar alleen met eenigen overmaat aan HCl, en daardoor eenige vloeistof ontstaat met eenigen overmaat aan aniline. Is de toestel echter goed gevuld met de verbinding, zoodat er weinig volume voor den damp overblijft, dan zal men de driephasenlijn G tot zeer nabij het smeltpunt afloopen, om bij F over te gaan op de lijn FA voor het evenwicht der gesmolten verbinding met haar damp.

Wij hebben hier dus de eerste experimenteele bevestiging van de normale opeenvolging der p, t-lijnen wanneer men die bepaalt met eene zuivere verbinding die min of meer dissocieert.

Theoretisch moet het minimum T_1 in de driephasenlijn ter linkerzijde van het eindpunt G der sublimatielijn liggen. Het verschil is hier wel gering, doch toch nog volkomen zeker:

	T_1	G
p	16 cM.	16.5 cM,
t	197°	198° .

Bij het chloralalcoholaat vallen de punten T_1 en G beide zoo nabij samen met F, dat dit punt praktisch niet te onderscheiden is van het tripelpunt eener niet dissocieerende verbinding, maar LF en FA of haar metastabiel verlengde FA' elkander in F schijnen te snijden. Trouwens bewees het onderzoek der smeltlijn dat het chloralalcoholaat in gesmolten toestand zeer weinig gedissocieerd is.

Bij beide verbindingen zijn voorts de p, t-lijnen bepaald bij overmaat aan chloral of aan aniline. Een zeer kleine overmaat daarvan is reeds voldoende om bij temperaturen ver beneden het smeltpunt nog vloeistof naast de verbinding aanwezig te doen zijn en men beweegt zich dan op den laagsten tak der driephasenlijn. In Fig. 1 werd deze bij een geringen overmaat aan chloral van D over T_2 tot F_1 doorloopen, slechts even beneden het smeltpunt en ging men van daar op de vloeistof-gaslijn F_1A_1 over, welke een weinig boven FA gelegen was.

In Fig. 2 kon bij geringen overmaat aan aniline het stuk $DT_2T_1GF_1$

doorloopen worden. Hierin kwam het minimum T_1 voor, terwijl het stuk GF_1 geheel samenviel met het correspondeerende deel van GF, dat reeds in de proef met de zuivere verbinding bepaald was. Even beneden F was de verbinding geheel verdwenen en ging men op de vloeistof-gaslijn F_1A_1 over, welke hier in onderscheid met Fig. 1 beneden FA gelegen was.

Is de overmaat der component zeer gering, dan treedt vloeistof eerst bij hoogere temperaturen der driephasenlijn op en wordt beneden deze temperatuur eene sublimatielijn bepaald bij overmaat van de componente in den damp; welke lijn dus hooger moet liggen dan de zuivere sublimatielijn.

Zoo werd bij chloralalcoholaat eene dergelijke lijn BE (Fig. 1) bepaald, merkbaar boven LF gelegen. Bij E trad vloeistof op en werd nu een stuk der driephasenlijn EF tot een punt zoo nabij F afgeloopen, dat de vloeistofgaslijn die daarna gevolgd werd bijna niet boven FA lag.

De overmaat van chloral was dus uiterst klein; in weerwil daarvan lag BE zeer duidelijk boven LF. De plaats van BE hangt in hooge mate af van het gasvolume boven de vaste verbinding, daar dit den overdruk bepaalt van den overmaat der component die hierin geheel vervat is, zoolang er geen vloeistof optreedt. Het bleek dan ook uiterst moeielijk chloralalcoholaat zoo zuiver te maken, dat dit de laagst denkbare sublimatielijn LF vertoonde die in F aan de driephasenlijn raakt.

Bij mengsels met overmaat van alcohol kunnen dergelijke sublimatielijnen eveneens voorkomen. Ook hier behoeft echter de overmaat van alcohol slechts zeer klein te zijn om zelfs bij lage temperaturen vloeistof te behouden en dus den tak CTF der driephasenlijn te bekomen. Zulks geschiedt bijv. steeds wanneer men kristallen der verbinding bezigt die uit overmaat alcohol gekristalliseerd zijn. Er zit dan reeds genoeg moederloog in.

Men verkrijgt dan het eigenaardige verschijnsel, dat de verbinding schijnbaar geheel vast is tot nabij het smeltpunt en vindt voor den dampdruk de kromme CTF, terwijl de oversmolten vloeistof de dampdruklijn FA_1 geeft, welke veel lager ligt. Ramsay heeft dit vroeger reeds geconstateerd, zonder eene verklaring te kunnen vinden, daar de ligging van de driephasenlijn toenmaals onbekend was.

Bij het zoutzuuraniline was het wegens de groote vluchtigheid van het HCl niet moeilijk bij overmaat van deze componente sublimatielijnen te bepalen. In Fig. 2 zijn twee dergelijke lijnen bepaald BE en B_1E_1. Van E_1 af werd de driephasenlijn over het stuk E_1H_1 gevolgd, daarna de vloeistof-gaslijn H_1I_1. Van E evenzoo achter-

eenvolgens *EH* en *HI*. Bij nog geringer overmaat van HCl zou men op de driephasenlijn nog dichter bij *F* geëindigd zijn.

Bij het chloralalcoholaat vertoonde zich voorts nog het verschijnsel dat eene vaste stof die zich na smelting dissocieert bij niet te langzame verwarming tot boven haar smeltpunt kan verhit worden, een geval dat onlangs bij de smelting van gecompliceerde silicaten door DAY en ALLEN is waargenomen maar ook bij het eenvoudig samengestelde chloralhydraat reeds was gevonden.

Een voorbeeld van het derde type van driephasenlijn, waarbij het maximum en minimum in den benedensten tak der driephasenlijn zijn verdwenen is tot nu toe niet gevonden.

De beide thans gevonden typen zullen zich echter veelvuldig vertoonen bij andere dissociabele verbindingen zooals de bovengenoemde en stellen dus in staat het algemeene gedrag zulker stoffen beter dan tot dusver te overzien.

Natuurkunde. — De Heer HAGA doet eene mededeeling: *„Over de polarisatie van Röntgenstralen"*.

In de Phil. Trans. Royal Soc. of London vol. 204, p. 467, 1905 deelt BARKLA zijne proeven mede, waardoor hij meent aangetoond te hebben dat de stralen, door een RÖNTGEN-buis uitgezonden, gedeeltelijk gepolariseerd zijn, in overeenstemming met hetgeen uit de wijze van ontstaan dezer stralen door BLONDLOT was voorspeld.

Bij deze proeven onderzocht BARKLA de secundaire stralen, door lucht of door vaste lichamen: papier, aluminium, koper, tin, uitgezonden, door de ontladingssnelheid van geladen electroskopen te meten; hij vond in 2 richtingen loodrecht op elkaar, beide tevens loodrecht op de richting der opvallende primaire stralen, een maximum- en minimumwerking voor de secundaire stralen door lucht, papier en aluminium uitgezonden, het verschil bedroeg tot 20°/₀.

Op eenigszins andere wijze had ik getracht dezelfde zaak te onderzoeken: een bundel RÖNTGEN-stralen werd volgens de as van een buis gezonden zonder de buiswand te raken; tegen de binnenwand werd een cilindervormig gebogen photografische film aangebracht, om na te gaan of de, door de luchtdeeltjes secundair uitgestraalde, stralen in de een of de andere richting een grootere werking vertoonden. Toen BARKLA, wien ik het negatieve resultaat mijner proeven mededeelde, mij wees op kool als een zeer sterke uitstraler voor secundaire stralen werd de volgende inrichting getroffen.

S_1 (fig. 1) stelle de voorwand van een dikwandige looden kast, waarin de Röntgen-buis geplaatst is, voor; S_2 en S_3 4 mM. dikke geelkoperen platen van 10×10 cM., op 15 cM. van elkander, onwrikbaar op de

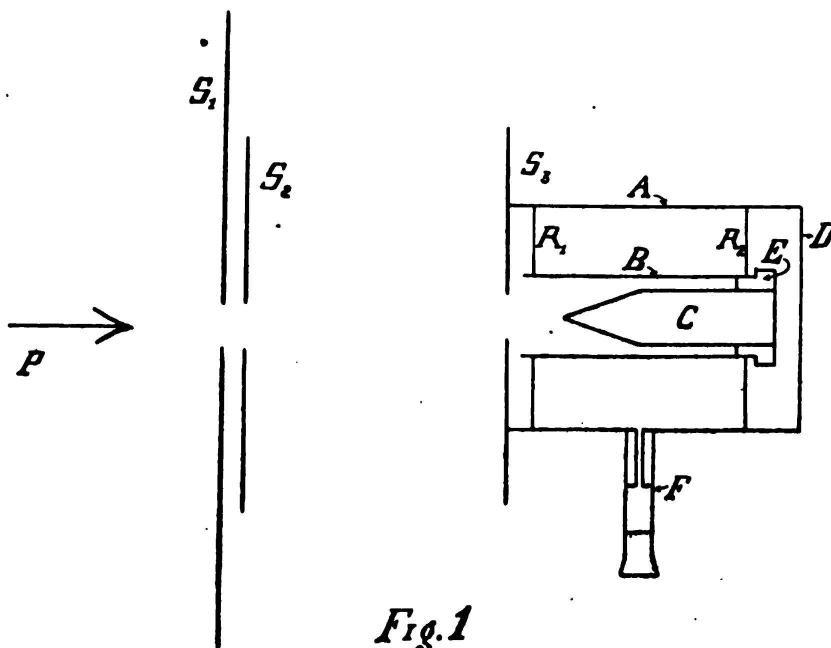


Fig. 1

bovenzijde van een ijzeren balk bevestigd. In het midden dezer platen zijn openingen van 12 mM. diameter; tegen de achterzijde van S_3 is een metalen cilinder A bevestigd, waarin een koperen buis B, voorzien van twee ringen R_1 en R_2, goed gecentreerd geschoven kan worden [1]).

In de buis B past een ebonieten dop E waarin een 6 cM. lange koolstaaf van 14 mM. diameter bevestigd is; het voorste einde van deze staaf is over een lengte van twee cM. kegelvormig afgedraaid. De opening in S_3 was door een schijf zwart papier bedekt; de achterkant van A was afgesloten door een afschroefbaar metalen deksel D.

De afmetingen waren zoodanig gekozen dat de grens van den door de openingen in S_1, S_2 en S_3 doorgelaten Röntgen-stralenbundel tusschen de buitenkant van de koolstaaf en de binnenzijde van de buis B gelegen was. Een photografische film tegen de binnenzijde van B was dus beschermd tegen direkte Röntgen-stralen.

Neemt men Barkla's onderstelling aangaande het ontstaan van secundaire stralen in lichamen met een klein atoomgewicht aan, dan zou, indien de Röntgen-stralen geheel of gedeeltelijk gepolariseerd waren,

1) Figg. 1 en 2 zijn op ongeveer de helft der ware grootte.

bij volkomen samenvallen van de as van den stralenbundel met de as van de koolstaaf op twee *diametraal* gelegen deelen van de film maxima, en juist tusschen deze, minima moeten ontstaan, terwijl uit de richting van de as der kathodestralen de plaats der maxima en minima is af te leiden.

Er bleek een zeer gemakkelijk middel te zijn om te constateeren of de stralenbundel al dan niet symmetrisch de buis *B* doorliep. Plaatst men nl. in de binnenkant van het deksel *D* een photografische plaat of film, die dus loodrecht staat op de as van de koolstaaf, dan ziet men, na ontwikkelen, tusschen de donkere beelden van de koolstaaf en ebonieten dop een scherp geteekenden lichten ring. Ook op het fluoresceerend scherm was deze ring — natuurlijk een donkere — zeer goed waar te nemen en men kon gemakkelijk de RÖNTGEN-buis zóó plaatsen, dat deze ring concentrisch was met de beelden van koolstaaf en ebonieten dop.

Deze ring bleek veroorzaakt doordat de stralen, die van uit de antikathode de koolstaaf niet evenwijdig met de as doorliepen en de koolstaaf weer verlieten, niet in staat waren het eboniet te doordringen, maar door deze stof geheel geabsorbeerd werden; werd de ebonieten dop door een van kool vervangen dan was de ring verdwenen; het is dus een zeer fraai voorbeeld van de selectieve absorptie der RÖNTGEN-stralen. [1])

Was door dit hulpmiddel een symmetrische gang der RÖNTGEN-stralen verkregen, dan vertoonden zich de beide maxima en minima nooit, noch bij korten noch bij langen duur der proef, hoewel op de film dikwijls een krachtige inwerking werd verkregen; een dergelijke werking ontstond b.v. reeds bij een expositietijd van één uur, wanneer een, door een turbine-onderbreker gedreven, inductor van 30 cM. vonkenlengte gebruikt werd; de stroom werd door een accumulatoren batterij van 65 volt geleverd, stroomsterkte 7 ampère; de RÖNTGEN-buis was „week”.

Wel kreeg ik soms één maximum of een ongelijkmatige werking op de film, maar alleen bij een onsymmetrischen stand van de opstelling.

Uit deze proeven moet dus worden afgeleid 1° dat de RÖNTGEN-stralen hoogstens tot een zeer gering bedrag gepolariseerd kunnen zijn en 2° dat *mogelijkerwijze* bij BARKLA's proeven, waarbij niet tegelijkertijd in diametraal gelegen richtingen werd onderzocht, een asymmetrie in de opstelling de waargenomen maxima en minima heeft veroorzaakt.

---

[1]) Voor deze proef neme men, bij overigens gelijke inrichting een koolstaaf van 1 cM. diameter, 4 cM. lang.

Met ongeveer dezelfde inrichting herhaalde ik BARKLA's proeven over de polarisatie der secundaire stralen, door hem, ook door middel der electroskopen, aangetoond en beschreven in Proc. Roy. Soc. Series A, vol 77, pg. 247, 1906.

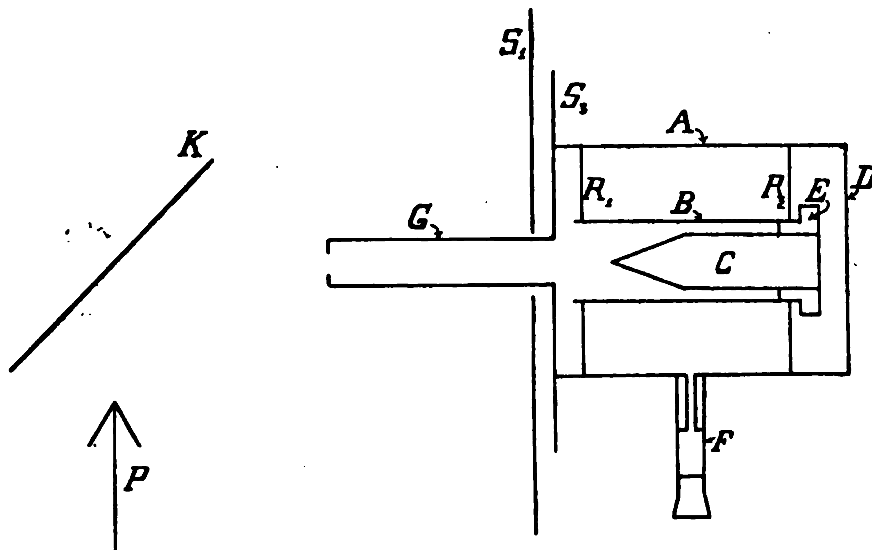


Fig. 2

De RÖNTGEN-stralen vielen in de richting der pijl (fig. 2) op de 12 mM. dikke koolplaat K, groot 8×8 cM.; de door deze uitgezonden secundaire stralen konden gaan door de op S_2 bevestigde 6 cM. lange buis G, die aan de voorzijde voorzien was van een koperen plaatje met eene opening van 5 mM. Deze koperen buis was in de looden kast geplaatst op 8 cM. van het midden der koolplaat; looden schermen beschutten de buis tegen direkte werking der primaire stralen. Bij deze proef werd de bovengenoemde inductor door een WEHNELT-onderbreker gedreven, de accumulatoren batterij had een spanning van 65 Volt, stroom 7 amp. Een zeer goede opname werd in dertig uur verkregen en vertoont zeer duidelijk twee maxima en twee minima, de afstand der middens der maxima bedraagt juist de helft van den binnenomtrek der buis en uit hun plaats is af te leiden dat ze veroorzaakt zijn door de tertiaire stralen door het kegeloppervlak der koolstaaf uitgezonden.

Bij deze proef waren het midden der antikathode, de as van de koolstaaf en het midden der koolplaat in één horizontaal vlak en was de as der kathodestralen in één vertikaal vlak met het midden der koolplaat, de assen der primaire en secundaire stralen stonden loodrecht op elkander. Bij deze plaatsing moet, volgens de opvatting

van Barkla, het maximum der werking der tertiaire stralen in het zooeven genoemde horizontale vlak gelegen zijn; ook dit werd bij mijn proef geheel bevestigd gevonden. Ten einde namelijk te weten welk deel van de photografische film in dit vlak lag, was aan de buitenzijde van de cilinder *A* een zijbuisje *F* aangebracht, dat bij de proef horizontaal geplaatst werd; in dit buisje paste een metalen staafje met nauwe doorboring, zoodat men in de donkere kamer, na wegnemen van het caoutchouc stopje dat *F* afsloot, met een lange naald, door dit staafje en kleine openingen in de wand van *A* en *B* heen, een klein gaatje in de film kon prikken. Dit gaatje bevond zich juist midden in een der maxima.

Door deze proef is dus photografisch volkomen bevestigd wat Barkla door zijn electroskopen gevonden had en de gepolariseerde toestand der door kool uitgezonden secundaire stralen bewezen.

Bij zijne verschillende onderzoekingen wees Barkla op de groote overeenkomst in het karakter der secundaire en primaire Röntgen-stralen; ook bij de hier besproken proeven bleek dit uit het radiogram opgenomen op de film in het deksel *D*; niet alleen dat de secundaire stralen door de 6 cM. lange koolstaaf de film nog aantastten, maar de lichte ring was weder duidelijk te zien, zoodat eboniet ook alle secundaire stralen absorbeert, die door de koolstaaf gegaan zijn.[1]) Dat de ring niet zoo scherp begrensd was als bij de proeven met de primaire stralen laat zich ongedwongen verklaren uit de verschillende uitgebreidheid der stralenbronnen: bij de primaire stralen een zeer klein gedeelte der antikathode, bij de secundaire het deel der koolplaat dat door de openingen in *G* en S_1 stralen zond.

Wordt het door deze overeenkomst reeds zeer waarschijnlijk dat ook Röntgen-stralen uit *transversale* trillingen bestaan, zoo leveren deze proeven nog een verder bewijs voor deze zelfde stelling. Neemt men nl. de voorstelling van Barkla aan voor het ontstaan der secundaire stralen in lichamen met klein atoomgewicht, dan kan zeer gemakkelijk worden aangetoond, dat, wanneer de primaire Röntgen-stralen uit *longitudinale* trillingen bestonden, bij de hier besproken proef de maximale werking der tertiaire stralen in een vertikaal vlak zou hebben plaats gehad en niet, zooals het geval is geweest, in een horizontaal vlak.

Groningen, Natuurkundig Laboratorium der Universiteit.

---

[1]) De ring was geheel concentrisch: de opstelling dus geheel symmetrisch.

Plantenkunde. — De Heer MOLL biedt eene mededeeling aan van Mevrouw Dr. M. NIEUWENHUIS—VON UEXKÜLL-GÜLDENBAND: *„De schadelijke gevolgen der suikerafscheiding bij eenige myrmecophiele planten".*

(Mede aangeboden door den Heer F. A. F. C. WENT.)

Gedurende mijn verblijf van een achttal maanden te Buitenzorg (in 1901) heb ik mij hoofdzakelijk bezig gehouden met het onderzoek van den bouw en de eigenaardigheden der suikerafscheidende myrmecophiele planten. De uitkomsten dezer waarnemingen, die zich over een 70-tal planten uitstrekken, zijn niet vereenigbaar met de door DELPINO, KERNER, TRELEASE, BURCK, en vele anderen verkondigde meening, dat de extraflorale suikerafscheiding der planten dienen zoude, om mieren aan te lokken, die dan als wederdienst deze planten tegen velerlei schadelijke dieren zouden beschermen.

In geen enkel geval toch kon ik waarnemen, dat de suikerafscheiding aan de plant nut opleverde; wel bleek mij, dat de mieren zich met de suiker voedden, doch in plaats van tevens van nut te zijn, benadeelden zij de plant op indirecte wijze door het aanbrengen en opkweeken van luizen; verder lokken de extraflorale nectariën niet alleen mieren, maar eveneens een menigte kevers, wantsen, larven, enz. aan en deze vergenoegen zich niet met de suiker alléén, maar eten te gelijker tijd de nectariën zelf op en vreten vaak de bladeren en de bloemen in niet geringe mate aan.

Bij omstreeks een derde der planten, welke ik hierop onderzocht, berokkent de afscheiding der suiker zóó voorzeker zeer groote schade; bij een ander derde ondervindt de plant slechts gering nadeel door dit aanlokken van ongewenschte bezoekers, terwijl bij het laatste derde geen enkele aanwijzing te vinden was, dat zij door hare suikerafscheiding tegenover andere planten in het nadeel waren.

Van degene, welke door hare suikerafscheiding op indirecte wijze benadeeld worden, geef ik hier slechts een paar voorbeelden uit de vele, die ik later uitvoeriger elders zal bespreken.

Spathoglottis plicata Bl. is een in den Indischen Archipel algemeen voorkomende Orchidee. Men vindt haar in de omstreken van Buitenzorg o. a. op den Salak en zij wordt in den Plantentuin in de randen om de perken in het Orchideënkwartier gebruikt. Hare bladen (alle wortelbladeren) zijn volgens SMITH tot 1.20 M. lang, smal, met een lange punt voorzien en overlangs gevouwen; haar bloeiwijze staat rechtop, wordt tot 2 M. hoog en draagt aan haar einde, in de oksels van gekleurde schutblaadjes, een aantal bloemen, wier kleur wisselt tusschen roodviolet en wit. De schutblaadjes en bloemdek-

bladeren hebben stompe punten, welke dik zijn en donkerder van kleur. Op de bloeiwijzen wemelt het steeds van twee soorten mieren, één groote en één kleine soort. Zelfs als de bloemknoppen nog gesloten zijn, vindt men de mieren reeds op de schutblaadjes en nauwelijks zijn de bloemen geopend, of de mieren vallen ook op de bloemdekbladeren aan. Het onderzoek leerde, dat suiker hier als aanlokmiddel wordt afgescheiden.

Om dit te bewijzen werden bloemen gedurende eenigen tijd onder een vochtige glazen klok geplaatst en na eenige uren kon toen met FEHLING's-proefvocht in de vloeistof, die door de secerneerende bladeren aan de buitenzijde was afgescheiden, suiker aangetoond worden. Bijzondere organen voor deze suikerafscheiding kon ik intusschen niet vinden; waarschijnlijk geschiedt deze inwendig en komt het product naar buiten door de opperhuid of door de huidmondjes.

Het was reeds aan DELPINO bekend, dat sommige Orchideeën suiker afscheiden op de bloembladeren; het merkwaardige der genoemde *Spathoglottis* is echter, dat de aangelokte mieren een zoo schadelijken invloed op haar uitoefenen. Terwijl n.l. de kleine soort op de bloemen blijft en zich met de daar afgescheiden suiker tevreden stelt, daalt de groote soort ook naar de wortelbladeren af en tast deze aan, en wel dikwijls in die mate, dat slechts een geraamte van het blad overblijft; deze zoo schadelijke groote mieren worden door de veel talrijkere kleine in het geheel niet verjaagd. Het bleek verder ten duidelijkste, dat de suikerafscheiding inderdaad de oorzaak was, dat zóó gewichtige organen als de bladeren door deze groote soort werden opgegeten. Het bewijs hiervoor leverden n.l. die planten, welke uitgebloeid waren en vruchten droegen; bij deze had geen suikerafscheiding meer plaats en de bladeren, die in dit tijdperk nieuw ontstonden, bleven dientengevolge ongedeerd. Hier was het dus juist de suikerafscheiding in de bloeiperiode, die de mieren aantrok, terwijl de bladeren der plant op zich zelf geen voldoende aanlokking op de mieren uitoefenden.

Een tweede voorbeeld, hoeveel nadeel de suikerafscheiding aan de planten zelve kan berokkenen, ontleen ik aan verscheidene boom- en struikachtige *Malvacaeën*. In den Plantentuin staat een ongedetermineerde boom, een *Malvacea* uit Indochina. Deze heeft niet alleen nectariën op de stengel- en kelkbladeren, maar biedt den mieren bovendien een zeer geschikte woonplaats aan in de paarsgewijze naar elkaar toegebogen steunblaadjes. De hierdoor gevormde ruimten worden inderdaad door mieren bewoond, maar toch niet zooveel als men zou verwachten. De reden hiervan is, dat zij, ondanks den overvloed aan nectariën, geen voedsel genoeg vinden, omdat op deze

boomen een wantsensoort voorkomt, die niet slechts de afgescheiden suiker gebruikt, maar ook de nectariën zelf opeet. Deze wantsen beschadigen de bladeren bovendien in die mate, dat de boom er onder lijdt, hetgeen reeds bij oppervlakkige beschouwing opvalt. Hetzelfde kan men opmerken bij een boom, gemerkt „*Malvacea Karato*" en bij eenige andere soorten dezer familie.

Om te bewijzen, dat het afscheiden van suiker, hetwelk schadelijke insecten aanlokt, inderdaad voor deze boomen van nadeel is, zou het nog noodig zijn, aan te toonen, dat zij ongeschonden blijven, als de suikerafscheiding niet plaats heeft. Dit bewijs wordt reeds zonder meer door eenige andere *Malvaceën* geleverd:

Twee in Indië zeer verbreide struikachtige *Malvaceën*, namelijk: *Hibiscus rosa sinensis L.* en *Hibiscus tiliaceus L.* hebben op hunne bladeren nectariën. Zij worden echter noch door mieren noch door andere schadelijke insecten bezocht, omdat in die nectariën altijd, voor zoover ik kon nagaan, een schimmel woekert, die uiterlijk reeds aan haar zwarte kleur te herkennen is. Deze schimmel maakt, dat de suikerafscheiding niet tot stand komt en hierdoor vervalt de aantrekkingskracht der nectariën voor insecten, die voor de plant schadelijk zouden zijn. Deze struiken steken juist door hun gunstig uiterlijk in het *Malvaceën*kwartier sterk af tegenover de bovenvermelde planten, welke door mieren en andere insecten bezocht worden.

Op grond van de omstandigheid, dat de extraflorale nectariën zich hoofdzakelijk op en bij de bloeiwijzen bevinden, stelde Burck de hypothese op, dat zij in sommige gevallen er toe zouden dienen, om mieren in de nabijheid der bloemen te lokken, teneinde deze te beschermen tegen het aanboren en tegen den roof van honig door bijen en wespen. Ik kon echter zelfs aan de door hem onderzochte planten geen bevestiging voor zijne hypothese vinden. Vooreerst toch komen de nectariën slechts zelden *uitsluitend* op de bloeiwijzen voor; ook de door hem als bewijs aangevoerde planten, als: *Thunbergia grandiflora*, Roxb., *Gmelina asiatica L*, en *Gmelina bracteata*, *Nycticalos macrosyphon* en *Nycticalos Thomsonii* kunnen niet als voorbeelden dienen, omdat deze planten evenzoo aan hare vegetatieve organen, als bladeren en stengels, nectariën bezitten, welke volgens hem aldaar niet aanwezig zijn of door hem niet genoemd worden. Wat de zoogenaamde „mierenbroodjes" (Burck'sche Körperchen) op de kelk van *Thunbergia grandiflora* betreft, is het mij gebleken, dat deze in 't geheel geen „food-bodies" zijn, maar gewone suikerafscheidende vervormde haren, welke ik ook op de bracteen, bladeren en bladstelen van deze plant heb aangetroffen.

Verder bleek mij, dat het aantal der aangeboorde bloemen in geen

verhouding staat tot het aantal der op de kelk voorkomende nectariën, zooals volgens BURCK juist het geval zoude zijn. Veelmeer is dit afhankelijk van uitwendige factoren, als bijv. van de min of meer vrije standplaats der planten, van het weer enz.

Als voorbeeld hiervan moge de slingerplant *Bignonia Chamberlayni* aangehaald worden. Van deze plant bleken op vele dagen slechts 1,6 °/₀ der afgevallen bloemen niet door *Xylocopa coerulea* aangeboord te zijn, ofschoon talrijke mieren steeds op de nectariën der kelk voorkomen.

Een voorbeeld, dat de meer of minder vrije standplaats op de talrijkheid der perforaties harer bloemen van invloed is, vindt men in twee soorten van het geslacht der *Faradaya*, die beide nectariën op de kelk en op de bladeren hebben. Bij *Faradaya papuana* SCHEFF., die in den botanischen tuin te Buitenzorg te midden van vele andere rijk bloeiende planten staat, worden de bloemen vaak door een *Xylopoca* aangeboord; van de afgevallen bloemen was slechts 1 °/₀ niet beschadigd. Anders was dit bij een tweede, nog onbepaalde soort van hetzelfde geslacht, die, wat de nectariën betrof, geen verschil vertoonde met de eerste, en die op eenigen afstand van deze groeide, op een minder open standplaats. Hare takken hingen gedeeltelijk tot op den grond en droegen veel minder bloemen dan *Faradaya papuana*. Van deze nu bleven 19,3 °/₀ der bloemen onaangeboord.

Wat den invloed der weersgesteldheid betreft, bleek mij, dat het aantal der aangeboorde bloemen ten nauwste daarmede samenhangt. Was het overdag zonnig weer geweest, dan was den volgenden morgen een zeer veel grooter aantal bloemen aangeboord dan wanneer regen de insecten verhinderd had uit te vliegen. Dit was o.a. zeer opvallend bij *Ipomoea carnea* JACQ., een struik, die zoowel op de bladeren als op den kelk nectariën draagt, welke laatste door *Vespa analis* en twee *Xylocopa's* aangeboord wordt. Des morgens verzameld, zonder acht te geven op het weder van den vorigen dag, waren van de afgevallen bloemen 90 °/₀ aangeboord; na regenachtige dagen waren 57 °/₀ der bloemen beschadigd en na zonnige dagen werden zelfs 99,1 °/₀ aangeboord.

Hieruit blijkt ten duidelijkste, van hoe weinig waarde statistische opgaven zijn omtrent het aangeboord worden van bloemen en omtrent hunne eventueele bescherming door mieren, wanneer niet daarbij tevens gelet is op alle andere omstandigheden, die daarop invloed kunnen uitoefenen.

Wanneer men tracht zich rekenschap te geven van de rol, die de insecten, in gunstigen of ongunstigen zin, ten opzichte van een plant spelen, ontmoet men in de tropen grooter bezwaren dan bijv.

in Midden-Europa, omdat de vegetatieperiode er zoo veel langer duurt. Daardoor kan men in het eene gedeelte dier periode bepaalde insecten bij menigte aantreffen, die in een ander tijdperk niet meer voorkomen. Deze bijzondere moeilijkheid bij het beantwoorden der vraag, of bepaalde inrichtingen bij een plant eene aanpassing aan eene bepaalde diersoort vormen of niet, wordt in een botanischen tuin nog daardoor vergroot, dat de planten zich hier bijna alle op een voor haar meer of minder ongewone standplaats of omgeving bevinden. Toch kan men ook hier wel een onderzoek instellen naar het onderlinge gedrag der dieren die de planten bezoeken, alsmede naar hunne wijze van doen tegenover de planten zelf, terwijl de uitkomsten hiervan ons dan in staat stellen, om met eenig recht een besluit te trekken omtrent de onderlinge verhoudingen op de natuurlijke standplaats dezer planten. Bij den aanvang mijner onderzoekingen heb ik mij op dat standpunt geplaatst, mij onder meer de volgende vragen gesteld en daarop de hier in 't kort vermelde antwoorden verkregen:

1°. Op welke plantendeelen treft men extraflorale suikerafscheiding aan?

In de door mij onderzochte gevallen vond ik suikerafscheiding aan de takken, bladeren, steunblaadjes, schutblaadjes van verschillenden aard, bloemstengels en -stelen, vruchtbeginsels, benevens aan de buitenzijde en binnenzijde van kelk en kroonbladeren, en wel aan elk dezer op zichzelf of in een groot aantal verschillende combinaties. Het meest echter waren zij te vinden: *a*. Op bladscheeden en kelk te zamen, *b*. alléén op de bladschijf, *c*. op de bladstelen, bloemstengel en kelk. Van het voorkomen in andere combinaties heb ik daarentegen voor ieder slechts 1—3 voorbeelden aangetroffen.

2°. Wijst de bouw of de plaatsing der nectariën er duidelijk op, dat zij op een bezoek van mieren ingericht zijn?

Behoudens in enkele gevallen (zooals bijv. bij de nectariën, die bij de dicht opeenstaande bloemen van *Gmelina asiatica* Scheff. aan die zijde van den kelk, die van de as der bloeiwijze is afgekeerd, voorkomen) moet het antwoord op deze vraag beslist ontkennend luiden. Wel schijnt het bij den zeer veelvuldig voorkomenden bekervorm der nectariën, alsof deze zeer geschikt ware, om de afgescheiden honig te bewaren, maar aan de bladeren vindt men deze nectariën grootendeels aan hunne onderzijde met de opening naar beneden gericht. Ik herinner hier aan de beide groote, eveneens naar beneden gekeerde bekervormige nectariën aan den voet der zijbladeren van enkele *Erythrina*-soorten.

Het veelvuldig voorkomen van nectariën op de kelken, die alleen

in het knopstadium honig afscheiden, scheen erop te wijzen, dat deze knoppen in het bijzonder beschermd moeten worden. Hiermede is intusschen in strijd, dat somtijds, volgens mijne waarnemingen, slechts de helft der bloemen kelknectariën draagt (bijv. *Spathodea campanulata* BEAUV.).

Bij vele *Smilax*-soorten lokt slechts een deel der takken mieren aan en wel juist die takken, welke geene bloemen dragen en dus, volgens de heerschende opvattingen, het minst bescherming zouden noodig hebben. Het is met de bescherming der bloemen dan ook moeilijk overeen te brengen, dat nectariën voorkomen aan de binnen- en buitenzijde van den bovenrand der kroonbuis van *Nycticalos macrosyphon*, *Spathodea serrulata* en andere. Het lokken van mieren naar den ingang der bloemkroon, dus juist dáár, waar de dieren die kruisbevruchting veroorzaken, binnen moeten komen, kan voorzeker van het standpunt der biologen onpraktisch genoemd worden.

Tegen de opvatting, dat deze planten bescherming noodig zouden hebben, pleit ook het feit, dat juist bij de jonge planten, bij welke dan toch wel bescherming het meest noodzakelijk zou zijn, deze aanlokmiddelen voor beschermende mieren niet aanwezig zijn. Kort geleden heeft ook ULE [1]) hierop opmerkzaam gemaakt als gevolg van zijn onderzoek van Amerikaansche planten.

3°. Heeft bij *alle* nectariën suikerafscheiding plaats?

Dit is niet het geval; bij eenige nectariën kon ik zelfs geen afscheiding aantoonen, nadat zij langeren tijd onder een glazen stolp vertoefd hadden; bijv. was dit het geval met de bladeren van *Gmelina asiatica*. Zij worden dan ook niet door mieren bezocht, ofschoon deze insecten steeds voorkomen op de evenzoo gevormde, maar sterk secerneerende nectariën van den kelk.

De hoeveelheid der afgescheiden stoffen is overigens zeer wisselend bij dezelfde nectariën eener zelfde plant en afhankelijk van velerlei uit- en inwendige invloeden.

4°. Worden alle afscheidingsproducten der nectariën altijd en gaarne door mieren gebruikt?

Ook dit is blijkbaar niet steeds het geval, want terwijl de nectariën van sommige planten voortdurend door mieren worden bezocht, loopen bij anderen de nectariën als het ware over, zonder dat een dier er op afkomt (bij eenige soorten van *Passiflora* bijv.).

5°. Op welken leeftijd der organen scheiden de nectariën suiker af?

In den regel houden de nectariën der bloeiwijzen op te secerneeren, zoodra de bloemen geopend zijn; die der stengelbladeren

---

[1]) ENGLER's Bot. Jahrbücher, Heft III. Bd. 37. 1906.

functioneeren zelfs dikwijls slechts in de jongste ontwikkelingsstadiën.

6°. Treden de mieren, die de planten met nectariën bezoeken, tegen andere bezoekers vijandig op?

Hoewel ik dagelijks uren lang het doen en laten der mieren bij de extraflorale nectariën naging, heb ik toch nooit opgemerkt, dat zij andere dieren op eenigerlei wijze hinderden. Op de *Luffa*-soorten kan men de mieren bij dezelfde nectariën vreedzaam bezig zien naast een keversoort, die de plant groot nadeel toebrengt door het aanvreten van bladeren en knoppen.

De uitkomsten van mijne onderzoekingen aan eenige wilde planten van Java op hunne natuurlijke standplaats kwamen geheel overeen met die, in den Buitenzorgschen tuin verkregen.

Juist die soorten van mieren, die zich op de zoogenaamde „mierenplanten" van den Indischen Archipel ophouden, schijnen tot de onschadelijke te behooren; de kwaadaardige soorten met krachtige mondwerktuigen, bijv. die, welke in West-Java *semoet ranggrang* genoemd worden en volgens Dr. VORDERMAN door de Maleiers tot verdediging der Mangaboomen tegen kevers gebruikt worden, zijn carnivoor. Daarom moeten dan ook deze mieren opzettelijk aangelokt worden door het ophangen van dierlijke stoffen (doode leguanen) in de te beschermen boomen.

Wat dan wel de beteekenis zou zijn van het voorkomen van de vaak zóózeer gedifferentieerde organen als vele extraflorale nectariën en van de suikerafscheiding, welke zij in de meeste gevallen vertoonen, kan slechts uitgemaakt worden door nieuwe onderzoekingen, welke intusschen niet alleen op de biologie, doch ook op de physiologie der plant betrekking moeten hebben.

Leiden, Juni 1906.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan van den Heer L. E. J. BROUWER: *„Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten."*

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

A. *De hyperbolische* R_3.

I. Denken we een rechthoekig coördinatenstelsel aangebracht zoodat $ds = \sqrt{A^2\,du^2 + B^2\,dv^2 + C^2\,dw^2}$, en denken we een lijnvectordistributie X met ontbondenen X_u, X_v, X_w, dan is de integraal van X langs een gesloten kromme gelijk aan die van den planivector Y over een willekeurig oppervlak, daardoor begrensd; hierin zijn de ontbondenen van Y bepaald door:

$$Y_u = \frac{1}{BC} \left\{ \frac{\partial (X_v B)}{\partial w} - \frac{\partial (X_w C)}{\partial v} \right\} \text{ enz.}$$

Immers brengen we op het begrensde oppervlak kromlijnige coördinaten ξ en η aan, ten opzichte waarvan de begrenzing convex is, dan is de oppervlakte-integraal:

$$\int \sum \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial (X_v B)}{\partial w} - \frac{\partial (X_w C)}{\partial v} \right) d\xi \, d\eta.$$

Hierin samennemende de termen, die $X_w C$ bevatten, en $\frac{\partial (X_w C)}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta}$ optellend en aftrekkend, krijgen we:

$$\int d\xi \, d\eta \left\{ \frac{\partial (X_w C)}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial w}{\partial \xi} - \frac{\partial (X_w C)}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial w}{\partial \eta} \right\}.$$

Dit partieel integreerend, de eerste term naar η, de tweede naar ξ, komt $\int X_w C \, dw$ langs den omtrek; hetgeen te zamen met de analoog komende integralen $\int X_v B \, dv$ en $\int X_u A \, du$ de lijnintegraal van X langs den omtrek geeft.

Den planivector Y noemen we in overeenstemming met de vroeger (zie deze Verslagen 26 Mei 1906, p. 14—26) [1]) gegeven terminologie de *eerste afgeleide* van X.

Analoog wordt eenvoudig als *tweede afgeleide* gevonden de scalar:

$$Z = \frac{1}{ABC} \sum \frac{\partial \{ X_u . BC \}}{\partial u}.$$

[1]) De daar gegeven methode leidde uit de indicatrix van een convexe begrenzing die van den inhoud af, door een punt van het inwendige *vóóraan* te zetten; en zij verstond onder den vector $X_{pqr\ldots}$ een vector met indicatrix *opqr*.... We kunnen echter ook de indicatrix van den inhoud bepalen, door *achteraan* de indicatrix der begrenzing een punt van het inwendige te zetten; en daarbij aan den vector $X_{pqr\ldots}$ de indicatrix *pqr*. .*o* toekennen. Dan vinden we:

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p \alpha_{p+1}} = \sum_{\alpha_{q_{p+1}} = \alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} \frac{\partial X_{\alpha_{q_1} \ldots \alpha_{q_p}}}{\partial x_{\alpha_{q_{p+1}}}};$$

$$Z_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}} = - \sum_{\alpha_q = \alpha_p \ldots \alpha_n} \frac{\partial X_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p-1} \alpha_q}}{\partial x_{\alpha_q}}.$$

Deze laatste definities sluiten in de bekende *divergentie* van een vector, en *gradient* van een potentiaal, ook wat het teeken betreft; daarom zullen we voortaan daarvan uitgaan, en hebben ook daarvan de uitbreiding op niet-Euclidische ruimten genomen.

Naar de gewone uitdrukkingswijze is de eerste afgeleide de rotatievector, de tweede de divergentie.

II. Zal X zijn een ${}^{1}_{2}X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als tweede afgeleide van een planivector Ξ, dan moeten we hebben:

$$X_u = \frac{1}{BC}\left\{\frac{\partial(\Xi_v B)}{\partial w} - \frac{\partial(\Xi_w C)}{\partial v}\right\} \text{ enz.,}$$

en we zien licht, dat hiertoe noodig en voldoende is:

$$Z = 0.$$

III. Zal X zijn een ${}^{1}_{0}X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als eerste afgeleide (gradient) van een scalardistributie φ, dan moeten we hebben:

$$X_u = -\frac{\partial\varphi}{A\partial u} \qquad X_v = -\frac{\partial\varphi}{B\partial v} \qquad X_w = -\frac{\partial\varphi}{C\partial w},$$

en we zien licht, dat hiertoe noodig en voldoende is:

$$Y = 0.$$

IV. We kunnen gemakkelijk aangeven (vgl. SCHERING, Göttinger Nachrichten 1870) de ${}^{1}_{0}X$, waarvan de divergentie een geisoleerde scalarwaarde in den oorsprong is.

Zij is gericht volgens de voerstraal en gelijk aan:

$$\frac{1}{sh^2 r},$$

wanneer we de ruimteconstante $= 1$ stellen [1]).

Zij is de eerste afgeleide van een scalardistributie:

$$-1 + \coth r,$$

en heeft in den oorsprong een geisoleerde divergentie van 4π.

V. We zullen in 't volgende van X onderstellen, dat zij de *veld-eigenschap* heeft, en hieronder verstaan, dat zij in 't oneindige verdwijnt, en wel zoo, dat zij in de richting van de voerstraal van lager orde dan $\frac{1}{r}$ en in de richting loodrecht op de voerstraal van lager orde dan e^{-r} wordt.

Voor een ${}^{1}_{0}X$ beteekent dit, dat zij afgeleid is van een scalardistributie,

---

[1]) Voor eene andere ruimteconstante hebben we in al de volgende formules slechts r te vervangen door $\frac{r}{R}$.

die de *potentiaaleigenschap* heeft, d. w. z. die in 't oneindige 0 wordt.

Nu geldt voor twee scalardistributies het theorema van GREEN (vgl. FRESDORF diss. Göttingen 1873):

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu}\, dO - \int \varphi \nabla^2 \psi \,.\, d\tau = \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\, dO - \int \psi \nabla^2 \varphi \,.\, d\tau$$

$$\left(= \int S\,\{grad.\ \varphi,\ grad.\ \psi\}\, d\tau.\right).$$

Worden nu in 't oneindige φ en ψ beide 0, terwijl tevens $lim.\ \varphi\, \psi\, e^{2r} = 0$, dan vallen, als we het theorema van GREEN toepassen voor een bol met oneindigen straal, de oppervlakte-integralen weg, en we houden:

$$\int \varphi \,.\, \nabla^2 \psi \,.\, d\tau = \int \psi \,.\, \nabla^2 \varphi \,.\, d\tau,$$

geintegreerd over de geheele ruimte.

Nemen we nu voor φ een willekeurige potentiaalfunctie, en voor ψ: $-1 + coth\, r$, waarin r den afstand voorstelt tot een willekeurig gekozen punt P, dan voldoen deze functies aan de voorwaarden van verdwijnen in 't oneindige en $lim.\ \varphi\, \psi\, e^{2r} = 0$, zoodat we hebben:

$$4\pi \,.\, \varphi_P = \int (-1 + coth\, r)\, \nabla^2 \varphi \,.\, d\tau.$$

Stellen we dus $-1 + coth\, r \equiv F_1(r)$, dan hebben we:

$$ {}_0^1X = \overline{\nabla}^{1} \int \frac{\overline{\nabla}^{2}\, {}_0^1X}{4\pi} F_1(r)\, d\tau \quad \ldots\ldots\ldots \quad (I)$$

VI. We zien nu, dat er geen vectordistributie met de veldeigenschap bestaat, die in 't eindige nergens rotatie en nergens divergentie heeft. Immers zulk een vectordistributie zou, daar ze nergens rotatie heeft, een potentiaal moeten hebben, maar die potentiaal zou volgens de formule (I) overal 0 moeten zijn, dus ook haar afgeleide vector.

En hieruit volgt, dat een vectorveld eenduidig is bepaald door haar rotatie en haar divergentie.

VII. Kunnen we dus elementairdistributies van divergentie en van rotatie aangeven, dan zijn de daarbij behoorende vectorvelden elementairvelden, d. w. z. het willekeurige vectorveld is een willekeurige ruimte-integraal van zulke velden.

Voor die elementairvelden wordt zoo analoog als in een Euclidische ruimte (zie Verslagen Mei 1906 p. 22 en vlgg.) gevonden:

1°. een veld E_1, waarvan de tweede afgeleide bestaat uit twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2°. een veld E_2, waarvan de eerste afgeleide bestaat uit gelijke planivectoren in de punten van een cirkelstroompje en loodrecht op dat cirkelstroompje.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn ook hier weer de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

VIII. Om het veld E_1 aan te geven, nemen we een sferisch coördinatenstelsel, en het dubbelpunt in den oorsprong langs de as van het stelsel. Het veld E_1 is dan de afgeleide van een potentiaal:

$$\frac{\cos\varphi}{sh^2 r}.$$

Het kan beschouwd worden als som van twee fictieve „velden van een enkel agenspunt", gebouwd als afgeleide van een potentiaal $-1 + \coth r$, die echter feitelijk nog complementair agens in 't oneindige hebben.

IX. Het veld E_2 van een kringstroompje volgens het aequatorvlak in den oorsprong, is buiten den oorsprong met bovenstaand veld E_1 identiek. Elke krachtlijn is nu echter een gesloten vectordraad met een lijnintegraal van 4π langs zichzelf. We gaan van dit veld E_2 een planivectorpotentiaal zoeken, die ligt in het meridiaanvlak, en onafhankelijk is van het azimuth.

Om die te vinden in een punt P met voerstraal r en sferischen poolafstand φ, hebben we slechts den totalen krachtstroom tusschen het meridiaanvlak van P en een volgend meridiaanvlak met azimuthverschil $d\vartheta$, die tusschen P en de positieve omwentelingsas doorgaat, te deelen door het element van den parallelcirkel door P over $d\vartheta$. Immers zij ds een willekeurig lijnelement door P in het meridiaanvlak, dat een hoek F met de krachtrichting maakt, zij dh het element van den parallelcirkel, Σ de bovengenoemde krachtstroom en H de gezochte vectorpotentiaal, dan is:

$$d\Sigma = dh \, . \, X ds \sin F,$$

terwijl de voorwaarde voor H is:

$$d\,(H dh) = dh \, ds \, X \sin F.$$

We behoeven dus voor H maar te nemen: $\dfrac{\Sigma}{dh}$.

Om Σ te vinden, integreeren we den krachtstroom over de meridiaanzone op het boloppervlak door P. De krachtontbondene loodrecht op dat boloppervlak is $2 \cos\varphi \dfrac{ch\, r}{sh^3 r}$, dus:

$$\Sigma = \int_0^\varphi 2 \cos\varphi \frac{ch\,r}{sh^2 r} \,.\, sh\,r\,d\varphi \,.\, sh\,r \sin\varphi\,d\vartheta = d\vartheta \coth r \,.\, \sin^2\varphi.$$

Dus

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \frac{\Sigma}{sh\,r \sin\varphi d\vartheta} = \frac{ch\,r}{sh^2 r} \sin\varphi.$$

X. Hieruit volgt, dat, als gegeven zijn twee willekeurige eenheidsvectoren in verschillende punten, langs wier verbindingslijn we een derden vector $= \frac{ch\,r}{sh^2 r}$ aanbrengen, dat alsdan het volumeproduct dezer drie vectoren dat wil zeggen het volume van het parallelepipedum dat deze vectoren tot ribben heeft met behoorlijk teeken genomen, voorstelt de lijnvectorpotentiaal volgens den eersten (tweeden) vector, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidsmoment volgens den tweeden (eersten) vector.

Om dat volumeproduct op te maken, moeten we eerst de beide gegeven vectoren overbrengen naar een zelfde punt hunner verbinbingslijn, elk evenwijdig aan zichzelf, dat is in het vlak, dat hij met die verbindingslijn, waarlangs verschoven wordt, bepaalt, en onder behoud van denzelfden hoek met die verbindingslijn.

Het volumeproduct $\psi(S_1, S_2)$ is een symmetrische functie der beide eenheidsvectoren, waarvan we weten, dat zij bij integratie van S_1 langs een gesloten kromme s_1 voorstelt den krachtstroom van een eenheidsmagneet volgens S_2 door s_1, m. a. w. de negatieve wederkeerige energie van een eenheidsmagneet volgens S_2 en een magnetische schaal met eenheidssterkte binnen s_1, m.a.w. de kracht volgens S_2 door een magnetische schaal met eenheidssterkte binnen s_1, m.a.w. de kracht volgens S_2 door een stroom met eenheidssterkte langs s_1. We kunnen dus $\psi(S_1, S_2)$ beschouwen als de kracht volgens S_2 door een eenheidsstroomelement volgens S_1.

Waarmee gevonden is voor de kracht van een stroomelement met eenheidssterkte in den oorsprong volgens de as van het coördinatenstelsel:

$$\frac{ch\,r}{sh^2 r} \sin\varphi,$$

gericht loodrecht op het meridiaanvlak.

XI. Voor het zoo ingevoerde fictieve veld van een stroomelement (dat intusschen overal in de ruimte stroom, d. i. rotatie heeft) gaan we een lijnvectorpotentiaal V zoeken, die overal „evenwijdig” (zie

boven onder § X) loopt aan het stroomelement, en waarvan de scalarwaarde een functie van r alleen is.

Noemen we die scalarwaarde U, en beschouwen we een elementairrechthoekje in het meridiaanvlak begrensd door voerstralen uit den oorsprong en cirkels om den oorsprong, dan is de lijnintegraal van V om dat rechthoekje:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\{U \sin\varphi \, sh\, r \, d\varphi\} \, dr - \frac{\partial}{\partial \varphi}\{U \cos\varphi \, dr\} \, d\varphi.$$

Dit moet gelijk zijn aan den krachtstroom door het rechthoekje:

$$\frac{ch\, r}{sh^2 r} \sin\varphi \, . \, sh\, r \, d\varphi . \, dr,$$

waaruit de volgende differentiaalvergelijking van U naar r komt:

$$U - \frac{\partial}{\partial r}\{U \, sh\, r\} = coth\, r,$$

waarvan de oplossing is:

$$U = csch\, r - \tfrac{1}{2} r \, sech^2 \tfrac{1}{2} r + c \, . \, sech^2 \tfrac{1}{2} r.$$

Kiezen we $c = 0$, dan vinden we dus als vectorpotentiaal V van een eenheidsstroomelement E:

$$csch\, r - \tfrac{1}{2} r \, sech^2 \tfrac{1}{2} r \equiv F_2(r),$$

gericht evenwijdig aan E.

Brengen we nu in een willekeurig punt der ruimte een vector G aan, dan heeft de vector V de eigenschap, dat hij, in G geïntegreerd langs een elementairkring, wiens vlak loodrecht op G staat, aangeeft de kracht volgens G, veroorzaakt door het stroomelement E, of ook de vectorpotentiaal volgens E, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidssterkte volgens G.

Noemen we dus van twee eenheidsvectoren E en F de potentiaal $\chi(E, F)$ de symmetrische functie $F_2(r) \cos\varphi$, waar r den afstand van de aangrijpingspunten der beide vectoren, en φ hun hoek na evenwijdige overbrenging naar eenzelfde punt hunner verbindingslijn voorstelt, dan weten we, dat deze functie χ, bij integreering van b.v. E over een gesloten kromme e geeft niet alleen de negatieve energie van een magnetische schaal met eenheidssterkte, begrensd door e in het veld van een eenheidsstroomelement F, maar ook de ontbondene langs F van de vectorpotentiaal, veroorzaakt door een eenheidsstroom langs e.

Hieruit volgt nu weer voor den vector V van een stroomelement, dat hij bij integreering van het stroomelement tot een gesloten stroom wordt de door haar flux-eigenschap eenduidig bepaalde vectorpotentiaal van dien stroom.

Zoodat werkelijk *de* vectorpotentiaal van een ${}_2^1X$, d.i. van een veld van stroomen, wordt verkregen als integraal van de vectoren V der stroomelementen.

XII. We kunnen nu schrijven, dat in een willekeurig punt:

$$ {}_2^1X = \overset{2}{\nabla}/ \int \frac{\overset{1}{\nabla}/\, {}_2^1X}{4\pi} F_2(r)\, d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II) $$

waarin we de vectorelementen der integraal eerst evenwijdig overbrengen naar het beschouwde punt, en daar sommeeren.

Beschouwen we dus nu een willekeurig krachtveld als teweeggebracht door zijn beide afgeleiden (de magneten en stroomen), dan kunnen we ons dat zoo voorstellen, dat beide afgeleiden zich volgens een in 't oneindige verdwijnende functie van den afstand door de ruimte voortplanten, en daardoor de potentiaal van het veld doen ontstaan.

Het veld X is n.l. de totale afleiding van de potentiaal:

$$ \int \frac{\overset{2}{\nabla}/\, X}{4\pi} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\overset{1}{\nabla}/\, X}{4\pi} F_2(r)\, d\tau. $$

De demping van de scalarpotentiaal is sterker, dan die van de vectorpotentiaal; immers de eerste wordt op groote afstanden van de orde e^{-2r}; de laatste van de orde re^{-r}. Verder blijkt de laatste niet continu van ∞ naar 0 af te nemen, maar aanvankelijk snel door 0 heen naar negatief te dalen, om vervolgens een negatief maximum te bereiken, en dan volgens een demping re^{-r} als negatieve (d. i. aan het voortbrengend stroomelement tegengesteld gerichte) vector naar 't oneindige tot 0 te naderen.

XIII. De bij de Euclidische ruimte gevonden bijzonderheid, dat $F_1(r) = F_2(r) = \frac{1}{r}$, berust hierop, dat in Euclidische ruimten de bewerking van tweemaal totale afleiding voor scalardistributies en vectordistributies van willekeurig aantal dimensies gelijk wordt gevonden. (zie deze Verslagen 26 Mei 1906, p. 19).

Zoeken we echter in de hyperbolische R_3 de ∇^2 van een scalardistributie u in een willekeurig punt, dan vinden we, dat punt kiezend als centrum van een Riemannsch normaalcoördinatenstelsel $\left(\text{d.w.z. een stelsel zóó, dat } ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{1 - x^2 - y^2 - z^2}\right)$:

$$ \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, $$

maar als ∇^2 van een vectordistributie met ontbondenen X, Y en Z, vinden we, voor de x-ontbondene X_{∇^2}:

$$X_{\nabla^2} = X + \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}.$$

B. *De hyperbolische R_2.*

I. Als eerste afgeleide Y van een vectordistributie X wordt gevonden een planivector, bepaald door een scalarwaarde:

$$\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial (X_u A)}{\partial v} - \frac{\partial (X_v B)}{\partial u}\right\}.$$

Als tweede afgeleide Z vinden we de scalar:

$$\frac{1}{AB}\left\{\frac{\partial (X_u B)}{\partial u} + \frac{\partial (X_v A)}{\partial v}\right\}.$$

II. Zal X zijn een ${}^1_2X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als tweede afgeleide van een planivector met scalarwaarde ψ, dan moeten we hebben:

$$X_u = -\frac{\partial\psi}{B\partial v} \qquad X_v = \frac{\partial\psi}{A\partial u},$$

waartoe noodig en voldoende is: $Z = 0$.

Zal X zijn een ${}^1_0X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als eerste afgeleide van een scalar φ, dan moeten we hebben:

$$X_u = -\frac{\partial\varphi}{A\partial u} \qquad X_v = -\frac{\partial\varphi}{B\partial v},$$

waartoe noodig en voldoende is: $Y = 0$.

III. De ${}^1_0X$, waarvan de divergentie een geïsoleerde scalarwaarde in den oorsprong is, wordt een vectordistributie volgens de voerstraal, groot:

$$\frac{1}{sh\, r}.$$

Zij is eerste afgeleide van de scalardistributie:

$$l \coth \tfrac{1}{2} r.$$

De divergentie in den oorsprong van dit veld is 2π.

De scalardistributie $l \coth \frac{1}{2} r$ heeft dus de potentiaaleigenschap. (Voor het veld van een enkel agenspunt in de Euclidische R_2 was dit niet het geval).

IV. We onderstellen in het volgende voor de gegeven vectordistributie weer de veldeigenschap (die voor 2 en ook voor n dimensies gelijk blijft gedefinieerd, als voor 3 dimensies); er is dan geen vectorveld mogelijk, dat nergens rotatie en nergens divergentie heeft; elk vectorveld is dus door zijn rotatie en divergentie bepaald, en we hebben vooreerst voor een gradientendistributie:

$$ {}_0^1X = \overline{\nabla^1} \int \frac{\overline{\nabla^2}\, {}_0^1X}{2\pi} \, l \, coth \, \tfrac{1}{2} r \, d\tau. $$

$$ {}_0^1X = \overline{\nabla^1} \int \frac{\overline{\nabla^2}\, {}_0^1X}{2\pi} \, F_1(r) \, d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I) $$

V. Voor het veld E_1 van een agensdubbelpunt wordt gevonden de gradient van de potentiaal:

$$ \frac{\cos \varphi}{sh \, r}. $$

Het is te splitsen in twee „velden van een enkel agenspunt", gebouwd als afgeleide van een potentiaal $l \, coth \, \frac{1}{2} r$.

VI. Met bovenstaand veld E_1 is buiten den oorsprong identiek het veld E_2 van een dubbelpunt van rotatie, welks as loodrecht staat op de as van het agensdubbelpunt van het veld E_1. Voor dat veld E_2 vinden we als scalarwaarde van de planivectorpotentiaal in een punt P den totalen krachtstroom tusschen P en de as van het agensdubbelpunt, dat is:

$$ \sin \varphi \, coth \, r. $$

Zijn dus een eenheidsvector V en een eenheidsscalar S gegeven. en brengen we langs hun verbindingslijn een vector $coth \, r$ aan, dan is het volumeproduct ψ van V, S en den vector langs de verbindingslijn de scalarwaarde van de planivectorpotentiaal in S door een eenheidsmagneet volgens V.

Van ψ weten we, dat zij bij sommeering van S uit een positieve eenheidsscalar S_2 en een negatieve S_1 voorstelt den krachtstroom van een eenheidsmagneet volgens V tusschen S_1 en S_2 door, m. a. w. de negatieve wederkeerige energie van een eenheidsmagneet volgens V en een magnetische strook S_1S_2 met eenheidssterkte, m. a. w. de kracht volgens V door een rotatiekoppel $S_1 \rightarrow S_2$. We kunnen dus ψ beschouwen als de kracht volgens V door een geisoleerde rotatie in S.

Zoodat we als fictief „krachtveld van een eenheidsrotatieëlement" moeten nemen:

$$ coth \, r, $$

gericht loodrecht op de voerstraal. Dit krachtveld heeft feitelijk overal in de R_2 rotatie.

VII. Zoeken we de scalarwaarde U, functie van r, die we aan een planivectorpotentiaal moeten toekennen, opdat het „veld van een eenheidsrotatieëlement" daarvan de tweede afgeleide zij. We moeten dan hebben:

$$-\frac{dU}{dr} = coth\ r.$$

$$U = l\ csch\ r.$$

En we hebben voor een willekeurige ${}^{1}_{2}X$:

$${}^{1}_{2}X = \overline{\nabla^{2}} \int \frac{\overline{\nabla^{1}}\ {}^{1}_{2}X}{2\pi}\ l\ csch\ r\ d\tau$$

$${}^{1}_{2}X = \overline{\nabla^{2}} \int \frac{\overline{\nabla^{1}}\ {}^{1}_{2}X}{2\pi}\ F_2(r)\ d\tau. \quad \ldots\ldots \quad (II)$$

En een willekeurig vectorveld X is de totale afgeleide van de potentiaal

$$\int \frac{\overline{\nabla^{2}} X}{2\pi} F_1(r)\ d\tau + \int \frac{\overline{\nabla^{1}} X}{2\pi} F_2(r)\ d\tau.$$

VIII. Het wekt nu bevreemding, dat hier in R_2 F_1 en F_2 niet identiek worden gevonden, aangezien immers de beide afgeleiden en de beide potentialen van een vectordistributie, in de hyperbolische zoo goed als in de Euclidische R_2, in volledig duale relatie tot elkander staan. Het verschil is echter gelegen in het principe van de veldeigenschap, dat een verdwijnen in 't oneindige postuleert voor de scalarpotentiaal, maar niet voor de planivectorpotentiaal. Daar deze uit het voorgaande blijkt in 't algemeen niet te verdwijnen, is met het postulaat van de veldeigenschap de dualiteit verbroken.

Maar aan den anderen kant mist dat postulaat in R_2 den redelijken grond, dien het in ruimten met meer dimensies heeft. Immers bij het stellen er van denken we aan den eisch, dat de totale energie van een veld niet oneindig mag worden. Zoo gauw we nu in 't oneindige van R_n krachten van de orde e^{-r} hebben, geeft dit in een sferische laag met dikte dr en oneindigen straal om den oorsprong als middelpunt beschreven een energie van de orde $e^{-2r} \times e^{(n-1)r}\ dr = e^{(n-3)r}\ dr$; hetgeen, naar r geïntegreerd, voor $n \geqq 3$ een oneindige energie in

't oneindige van R_n zou geven. Voor $n \geqq 3$ worden dus door de veldeigenschap alleen vectordistributies uitgesloten, die geen physische beteekenis kunnen hebben.

Voor $n = 2$ echter mist het postulaat dat recht van bestaan; meer zin nog heeft de eisch (voor $n > 2$ met de veldeigenschap gelijkwaardig), dat voor gegeven rotatie en divergentie de vectordistributie een minimum-energie moet hebben. Onder deze voorwaarden gaan we dus het veld nog op nieuw na en zullen hier ook de dualiteit naar beide afgeleiden en beide potentialen terugvinden.

IX. Beschouwen we vooreerst distributies met alleen divergentie, en zoeken we de potentiaalfunctie, die bij gegeven ∇^2 een minimum-energie geeft.

We beschouwen de hyperbolische R_2 als conforme afbeelding van dát gedeelte van een Euclidische R_2, dat door een cirkel wordt begrensd; brengen we dan in overeenkomstige punten der afbeelding dezelfde potentiaal aan, dan blijven in overeenkomstige vlakelementen gelijke energieën en gelijke divergenties. Het vraagstuk wordt dus:

Welke potentiaal geeft binnen een gegeven kromme (in casu een cirkel) in de Euclidische R_2 onder gegeven divergentiedistributie een minimum-energie?

Hiervoor hebben we volgens het theorema van GREEN:

$$\tfrac{1}{2}\int \delta\Sigma\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 d\tau = \int \Sigma\,\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial \delta u}{\partial x}\,.\,d\tau = \int u\,.\,\frac{\partial .\delta u}{\partial \nu}\,.\,dO - \int u\,\nabla^2\,\delta u\,.\,d\tau,$$

zoodat, daar $\nabla^2 \delta u$ overal binnen de grenskromme 0 is, de noodige en voldoende voorwaarde voor het wegvallen van de variatie der energie is:

$$u = 0 \text{ langs de grenskromme.}$$

Voor de algemeene vectordistributie met alleen divergentie in de hyperbolische R_2 vinden we dus ook onder de voorwaarde van minimum-energie, dat de potentiaal in 't oneindige 0 moet zijn. We vinden haar dus juist als onder het postulaat van de veldeigenschap, samengesteld uit velden E_1, afgeleid van een potentiaal $\dfrac{\cos\varphi}{sh\, r}$.

De krachtlijnen van dit veld E_1 hebben de vergelijking

$$\sin\varphi \coth r = c.$$

Slechts een deel van de krachtlijnen (in het Euclidische vlak alle) keert hier in zichzelf terug; de andere gaan naar 't oneindige. De aequipotentiaallijnen echter gaan geen van alle naar 't oneindige; ze

zijn in 't eindige gesloten, en worden alle omsloten door den cirkel in 't oneindige als niveau van 0-potentiaal.

Zoo ook voor de willekeurige ${}_0^1X$; van de krachtlijnen gaat een deel naar 't oneindige; de potentiaalniveau's echter zijn in 't eindige gesloten.

X. Zoeken we nu het veld met alleen rotatie, dat voor gegeven rotatiedistributie een minimumenergie geeft, dan volgt uit een beschouwing van de rotatie als divergentie van den normaalvector, dat de scalarwaarde van de planivectorpotentiaal in 't oneindige 0 moet zijn; en de algemeene ${}_2^1X$ is samengesteld uit velden E_2, afgeleid van een planivectorpotentiaal $\frac{\sin\varphi}{sh\, r}$ (terwijl we onder het postulaat van de veldeigenschap vonden $\sin\varphi\ \coth r$).

In tegenstelling met hoogere hyperbolische ruimten en met alle Euclidische en elliptische ruimten, zijn hier de velden E_1 en E_2 niet te sommeeren tot een enkelen geïsoleerden vector.

Voor dit veld E_2 en evenzoo voor de willekeurige ${}_2^1X$ zijn de krachtlijnen (tevens planivectorpotentiaalniveau's) in 't eindige gesloten krommen.

XI. We hebben nu gevonden:

$$ {}_0^1X = \overline{\nabla}_1 \int \frac{\overline{\nabla}_2\, {}_0^1X}{2\pi}\, l \coth \tfrac{1}{2} r\, d\tau $$

$$ {}_2^1X = \overline{\nabla}_2 \int \frac{\overline{\nabla}_1\, {}_2^1X}{2\pi}\, l \coth \tfrac{1}{2} r\, d\tau . $$

En hieruit volgt, dat ook de algemeene vectordistributie X, die voor gegeven rotatie en divergentie een minimum-energie heeft, is gelijk aan:

$$ X_{div.} + X_{rot.} = \overline{\nabla}_1 \int \frac{\overline{\nabla}_2 X}{2\pi}\, l \coth \tfrac{1}{2} r\, d\tau + \overline{\nabla}_2 \int \frac{\overline{\nabla}_1 X}{2\pi}\, l \coth \tfrac{1}{2} r\, d\tau . $$

Immers zij V een willekeurige distributie zonder divergentie en zonder rotatie in 't eindige, dan is zij afgeleid van een scalarpotentiaalfunctie, dus heeft zij (volgens § VIII) geen wederkeerige energie met $X_{div.}$; en evenmin (daar volgens § IX alle krachtlijnen van $X_{rot.}$ in 't eindige gesloten krommen zijn, en een flux van uitsluitend gesloten vectorbuizen geen wederkeerige energie heeft met een gra-

dientendistributie) met $X_{rot.}$; zoodat de energie van $X_{div.} + X_{rot.} + V$ grooter is, dan die van $X_{div.} + X_{rot.}$.

We hebben dus ten slotte voor de algemeene vectordistributie van minimum-energie X:

$$X = \nabla \int \frac{\nabla X}{2\pi} \cdot l \, coth \, \tfrac{1}{2} \, r \, d\tau.$$

C. *De hyperbolische R_n.*

I. Denken we een rechthoekig coördinatenstelsel zoodat:

$$ds = \sqrt{A_1 u_1^2 + \dots . A_n u_n^2},$$

en denken we een lijnvectordistributie X met ontbondenen $X_1 \dots X_n$, dan is de integraal van X langs een gesloten kromme gelijk aan die van den planivector Y over een willekeurig oppervlak, daardoor begrensd; hierin zijn de ontbondenen van Y bepaald door:

$$Y_{\alpha_1 \alpha_2} = \frac{1}{A_{\alpha_1} A_{\alpha_2}} \left\{ \frac{\partial (X_{\alpha_2} A_{\alpha_2})}{\partial x_{\alpha_1}} - \frac{\partial (X_{\alpha_1} A_{\alpha_1})}{\partial x_{\alpha_2}} \right\}.$$

Y is de *eerste afgeleide* of *rotatie* van X.

Verder is de uitgaande vectorstroom van X over een gesloten gebogen R_{n-1} gelijk aan de integraal van den scalar Z over den inhoud dier R_{n-1}; hierin is:

$$Z = \frac{1}{A_1 \dots . A_n} \sum \frac{\partial (X_{\alpha_1} \cdot A_{\alpha_2} \dots . A_{\alpha_n})}{\partial x_{\alpha_1}}$$

Z is de *tweede afgeleide* of *divergentie* van X.

II. Zal X zijn een ${}^1_2X$, d.w.z. zal X zijn te beschouwen als tweede afgeleide van een planivector Ξ, dan moeten we hebben:

$$X_{\alpha_1} = \frac{1}{A_{\alpha_2} \dots . A_{\alpha_n}} \sum \frac{\partial \cdot (\Xi_{\alpha_1 \alpha_{q_1}} A_{\alpha_{q_2}} \dots . A_{\alpha_{q_{n-1}}})}{\partial_{\alpha_{q_1}}}.$$

De noodige en voldoende voorwaarde hiertoe is:

$$Z = 0.$$

Zal X zijn een ${}^1_0X$, d. w. z. zal X zijn te beschouwen als eerste afgeleide van een scalar φ, dan moeten we hebben:

$$X_\alpha = - \frac{\partial \varphi}{A_\alpha \partial x_\alpha}.$$

De noodige en voldoende voorwaarde hiertoe is:

$$Y = 0.$$

III. De ${}_0^1X$, die als divergentie een geïsoleerde scalarwaarde in den oorsprong heeft (vgl. Opitz. diss. Göttingen 1881), is gericht volgens den voerstraal, en, als we de ruimteconstante $= 1$ stellen, gelijk aan:

$$\frac{1}{sh^{n-1}\,r}.$$

Zij is de eerste afgeleide van een scalardistribntie

$$\int_r^\infty \frac{dr}{sh^{n-1}\,r} \equiv w_n(r),$$

en heeft in den oorsprong een geïsoleerde divergentie van k_n (als $k_n r^{n-1}$ het bolopperviak der Euclidische R_n uitdrukt).

IV. Voor twee scalardistributies φ en ψ geldt het theorema van Green (vgl. Opitz. l.c.):

$$\int \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \, . \, dO_{n-1} - \int \varphi \nabla^2 \psi \, . \, d\tau_n = \int \psi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, . \, dO_{n-1} - \int \psi \nabla^2 \varphi \, . \, d\tau_n$$

$$\left(= \int S(\nabla \varphi, \nabla \psi) \, . \, d\tau_n \right).$$

Worden in 't oneindige φ en ψ beide 0, terwijl tevens

$$\lim \varphi \psi e^{(n-1)r} = 0,$$

dan vallen voor een ${}^{n-1}$bol met oneindigen straal de oppervlakte-integralen weg, en we houden over:

$$\int \varphi \, . \, \nabla^2 \psi \, . \, d\tau_n = \int \psi \, . \, \nabla^2 \varphi \, . \, d\tau_n,$$

geïntegreerd over de geheele ruimte.

Nemen we hierin voor φ een willekeurige potentiaalfunctie en voor $\psi : w_n(r)$, waarin r voorstelt den afstand tot een willekeurig gekozen punt P — deze functies voldoen samen aan de voorwaarden der laatste formule — dan hebben we:

$$k_n \varphi_P = \int w_n(r) \, . \, \nabla^2 \varphi \, . \, d\tau_n.$$

Postuleeren we dus voor de vectordistributies die we beschouwen, de *veldeigenschap* (die juist als voor R_3 gedefinieerd blijft), dan hebben we, als we $w_n(r) \equiv F_1(r)$ stellen, voor een willekeurige ${}_0^1X$:

$$ {}_0^1X = \nabla_1 \int \frac{\nabla_2\, {}_0^1X}{k_n} F_1(r)\, d\tau; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

waaruit we (zie bij A § VI) afleiden, dat er geen vectorveld bestaat,

dat in 't eindige nergens rotatie en nergens divergentie heeft; zoodat een vectorveld eenduidig is bepaald door haar rotatie en haar divergentie.

V. Een vectorveld is dus een willekeurige integraal van:

1°. Velden E_1, waarvan de tweede afgeleide bestaat uit twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2°. velden E_2, waarvan de eerste afgeleide bestaat uit in de punten van een ${}^{n-2}$bolletje en loodrecht op dat ${}^{n-2}$bolletje gelijkmatig gedistribueerde planivectoren.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

VI. Om het veld E_1 aan te geven, nemen we een sferisch coördinatenstelsel [1]), en het dubbelpunt in den oorsprong langs de eerste as van het stelsel. Het veld E_1 is dan de afgeleide van een potentiaal:

$$\frac{\cos\varphi}{sh^{n-1} r}.$$

De krachtlijnen van dit veld loopen in het meridiaanvlak. Het kan beschouwd worden als som van twee fictieve „velden van een enkel agenspunt", gebouwd als afgeleide van een potentiaal $w_n(r)$, waaraan echter feitelijk nog complementair agens in 't oneindige moet worden toegekend.

VII. Het veld E_2 van een wervel-${}^{n-2}$bolletje volgens de ruimte, loodrecht op de as van het zooeven beschouwde dubbelpunt, is buiten den oorsprong met het veld E_1 identiek. Elke krachtlijn is nu echter een gesloten vectordraad met een lijnintegraal k_n langs zichzelf. We gaan voor dit veld E_2 een planivectorpotentiaal H zoeken, die ligt in het meridiaanvlak, en alleen afhangt van r en φ. Het blijkt eenvoudig, dat deze H dan is een $\overset{2}{_1}X$.

Zij ε een $(n-2)$-dimensionaal element in de $n-2$ coördinaten, die er buiten r en φ zijn, dan definieert dat voor elke r en φ een element op het oppervlak van een ${}^{n-2}$-bol, groot $dh = c\varepsilon\, sh^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi$, en voor de geheele R_n wat we kunnen noemen een „meridiaanzone".

[1]) Hieronder verstaan we in R_n een stelsel, dat met behulp van een rechthoekig assenstelsel met genummerde assen een punt bepaald door 1e. r, zijn afstand tot den oorsprong 2e. φ, den hoek van den voerstraal met X_1, 3e. den hoek van de projectie van den voerstraal op de coördinaatruimte $X_2 \ldots X_n$ met X_2, 4e. den hoek van de projectie der laatste projectie op de coördinaatruimte $X_3 \ldots X_n$ met X_3; enz. Het vlak door de X_1-richting en den voerstraal noemen we het *meridiaanvlak*.

We hebben dan voor den krachtstroom Σ, die binnen een meridiaanzone tusschen de as van het stelsel en een punt P met coördinaten r en φ doorgaat, als ds voorstelt een willekeurig lijnelement door P in het meridiaanvlak onder een hoek $\digamma$ met de krachtrichting:

$$d\Sigma = dh \, . \, X \, ds \sin \digamma,$$

terwijl we gemakkelijk als noodige en voldoende voorwaarde voor H vinden:

$$d\,(Hdh) = dh \, . \, ds \, . \, X \sin \digamma \, ;$$

we hebben voor H dus maar te nemen: $\frac{\Sigma}{dh}$.

Om Σ te vinden, integreeren we den krachtstroom binnen de meridiaanzone, die gaat door het ${}^{n-1}$boloppervlak door P, tusschen de as van het stelsel en P. Daar voor de krachtontbondene loodrecht op dat boloppervlak komt: $(n-1) \cos \varphi \frac{ch\, r}{sh^{\,n} r}$, vinden we:

$$\Sigma = \int_0^{\varphi} (n-1) \cos \varphi \frac{ch\, r}{sh^{\,n} r} \, . \, sh\, r \, d\varphi \, . \, c\varepsilon \, sh^{\,n-2} r \sin^{n-2} \varphi = c\varepsilon \sin^{n-1} \varphi \coth r.$$

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \frac{ch\, r}{sh^{\,n-1} r} \sin \varphi.$$

VIII. Zijn dus gegeven in verschillende punten een eenheidslijnvector L en een eenheids-${}^{n-2}$vector W, en brengen we langs hun verbindingslijn een lijnvector $\frac{ch\, r}{sh^{\,n-1} r}$, dan is het volumeproduct ψ van L, W en den vector langs de verbindingslijn de ${}^{n-2}$vectorpotentiaal volgens W, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidsmoment volgens L.

Van $\psi\,(L, W)$ weten we, dat zij bij integratie van W langs een gesloten gebogen $R_{n-2}\, Q$ voorstelt den krachtstroom van een eenheidsmagneet volgens L door Q heen, m. a. w. de negatieve wederkeerige energie van een eenheidsmagneet volgens L en een magnetische ${}^{n-1}$schaal met eenheidssterkte, begrensd door Q, m. a. w. de kracht volgens L door een magnetische ${}^{n-1}$schaal begrensd door Q, m. a. w. de kracht volgens L door een wervelstelsel, gelijkmatig gedistribueerd over Q en loodrecht op Q. We kunnen dus $\psi\,(L, W)$ beschouwen als de kracht volgens L door een eenheidswervel, loodrecht op W.

Waarmee gevonden is voor de kracht van een vlakken wervel met eenheidssterkte in den oorsprong:

$$\frac{ch\, r}{sh^{\,n-1} r} \sin \varphi,$$

gericht evenwijdig aan het ageerende wervelelèment en loodrecht op het „meridiaanvlak", als we daaronder thans verstaan het projecteerende vlak op het wervelelement; terwijl φ hier is de hoek van den voerstraal met de R_{n-2}, loodrecht op het wervelelement.

IX. Voor het zoo ingevoerde fictieve veld van een wervelelement in den oorsprong (dat intusschen overal in de ruimte werveling heeft) gaan we een planivectorpotentiaal zoeken, die overal „evenwijdig" aan het wervelelement gericht is, en waarvan de scalarwaarde U een functie van r alleen is.

Denken we een punt bepaald door zijn azimuth evenwijdig aan het wervelelement, en dan verder in de R^{n-1} van constant azimuth door een sferisch coördinatenstelsel, waarvan we de eerste as kiezen in het „meridiaanvlak" (zie boven bij § VIII), en in het vlak van het wervelelement, de tweede in het meridiaanvlak loodrecht op de eerste, en de verdere willekeurig; verstaan we intusschen onder φ hier den hoek van den voerstraal met de R_{n-2}, loodrecht op het wervelelement; zij verder ε een $(n-3)$-dimensionaal element in de $n-3$ laatste coördinaten, dan definieert dit voor elke r en φ een element op het oppervlak van een ${}^{n-3}$bol, groot:

$$dk = c\varepsilon\, sh^{n-3} r \cos^{n-3} \varphi .$$

We beschouwen dan een elementairrechthoekje in het meridiaanvlak, begrensd door voerstralen uit den oorsprong en cirkels om den oorsprong, en een R_{n-1}-element, bestaande uit de in elk punt van dit elementairrechthoekje opgerichte elementen dk. Op dit R_{n-1}-element de herleiding van $(n-2)$-voudige integraal langs de begrenzing tot $(n-1)$-voudige integraal over den inhoud volgens de definitie van tweede afgeleide toepassend, vinden we:

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\{U \cos\varphi \,.\, dr \,.\, c\varepsilon\, sh^{n-3} r \cos^{n-3}\varphi\}\, d\varphi -$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\{U \sin\varphi \,.\, sh\, r\, d\varphi \,.\, c\varepsilon\, sh^{n-3} r \cos^{n-3}\varphi\}\, dr =$$

$$= c\varepsilon\, sh^{n-3} r \cos^{n-3}\varphi \,.\, sh\, r\, d\varphi \,.\, dr \,.\, \frac{ch\, r}{sh^{n-1} r} \sin\varphi .$$

$$(n-2)\, U - \frac{dU}{dr}\, sh\, r - (n-2)\, U\, ch\, r = \frac{ch\, r}{sh^{n-2} r} .$$

$$\frac{dU}{dr} + (n-2)\, th\, \tfrac{1}{2} r \,.\, U = -\frac{ch\, r}{sh^{n-1} r} .$$

De oplossing dezer vergelijking is:

$$U = -\frac{1}{2^{n-3}} \cdot ch^{-2(n-2)}\tfrac{1}{2}r \cdot \int coth^{n-3}\tfrac{1}{2}r \,.\, d\,\tfrac{1}{2}r + \frac{1}{(n-2)sh^{n-2}r}.$$

We vinden dus als planivectorpotentiaal V van een vlakke wervel:

$$\frac{1}{(n-2)\,sh^{n-2}r} - \frac{1}{2^{n-3}\,ch^{2(n-2)}\tfrac{1}{2}r}\int coth^{n-3}\tfrac{1}{2}r \,.\, d\,\tfrac{1}{2}r = F_2(r),$$

gericht evenwijdig aan dien vlakken wervel.

Noemen we nu E den ${}^{n-2}$vector, loodrecht op den vlakken wervel, waarvan we het veld onderzocht hebben, en zetten we de vectorpotentiaal V ook uit als ${}^{n-2}$vector; brengen we dan in een willekeurig punt der ruimte een lijnvector G aan, dan heeft de vector V de eigenschap, dat hij, in G geïntegreerd langs een kleine gebogen gesloten R_{n-2} in een R_{n-1} loodrecht op G, aangeeft de kracht volgens G, veroorzaakt door het stroomelement E, of ook de vectorpotentiaal volgens E, veroorzaakt door een elementairmagneet met eenheidssterkte volgens G.

Noemen we nu van twee eenheids-${}^{n-2}$vectoren E en F de potentiaal $\chi(E, F)$ de symmetrische functie $F_2(r) \cos\varphi$, waar r den afstand der aangrijpingspunten van beide vectoren, en φ hun hoek na evenwijdige overbrenging naar eenzelfde punt hunner verbindingslijn voorstelt, dan weten we dat deze functie χ, bij integreering van b.v. E over een gesloten gebogen R_{n-2}, die we e noemen, geeft niet alleen de negatieve energie van een magnetische ${}^{n-1}$schaal met eenheidssterkte, begrensd door e, in het veld van een eenheidswervel loodrecht op F, maar ook de ontbondene langs F van de vectorpotentiaal, veroorzaakt door een wervelstelsel om e met eenheidssterkte.

Hieruit volgt dan weer voor de vectorpotentiaal V van een wervelelement, dat zij bij integreering van het wervelelement tot een wervelstelsel om een gesloten gebogen gebogen R_{n-2} wordt de volgens § VII bepaalde vectorpotentiaal van dien wervel-R_{n-2}; zoodat de vectorpotentiaal van een willekeurige ${}^{1}_{2}X$ wordt verkregen als integraal van de vectoren V der wervelelementen, m. a. w.:

$${}^{1}_{2}X = \overline{\nabla}^{2}\!\!/ \int \frac{\overline{\nabla}^{1}\!\!/\;{}^{1}_{2}X}{k_n} F_2(r)\, d\tau, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

waarin voor elk punt de vectorelementen der integraal eerst evenwijdig worden overgebracht naar dat punt, en daar gesommeerd.

X. Beschouwen we dus een willekeurig krachtveld als teweeg-

gebracht door zijn beide afgeleiden (de magneten en wervelstelsels), dan kunnen we ons dat zoo voorstellen, dat beide afgeleiden zich door de ruimte voortplanten volgens een in het oneindige verdwijnende functie van den afstand, en daardoor de potentiaal van het veld doen ontstaan.

Immers het veld X is de totale afleiding van de potentiaal:

$$\int \frac{\nabla^2 X}{k_n} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\nabla^1 X}{k_n} F_2(r)\, d\tau.$$

De demping van de scalarpotentiaal is de sterkere; deze toch wordt op groote afstanden van de orde $e^{-(n-1)r}$; de vectorpotentiaal slechts van de orde $re^{-(n-2)r}$.

Sterrenkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt een mededeeling aan van den Heer A. PANNEKOEK: *„De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype."*

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN).

Het onderzoek van de spectra der sterren, waarbij bleek, dat zij met weinige uitzonderingen, zich in een kontinue reeks laten rangschikken, heeft tot de algemeene opvatting geleid, dat zij verschillende ontwikkelingsstadia voorstellen, die elke ster achtereenvolgens doorloopt. VOGELS verdeeling in drie typen wordt als een natuurlijk stelsel beschouwd, omdat deze typen het heetste en vroegste, het verder ontwikkelde, en het meest afgekoelde stadium voorstellen. Voor de onderverdeelingen geldt dit echter niet meer; het verschillend uiterlijk der lijnen, dat hierbij als maatstaf dient, beantwoordt niet aan verschillende graden in de genoemde ontwikkelingsstadia. Uitgesproken kunstmatig in veel hooger mate is de klassificatie met letters, die PICKERING in zijn Draper Catalogue aannam; zij werd geboden door de practische behoefte, de duizenden met het objectiefprisma opgenomen sterspectra te klassificeeren. Na zuivering van de invloeden, die de onduidelijkheid der spectra door geringe dispersie en helderheid op deze verdeeling uitoefende, komt toch de natuurlijke verwantschap der spectra te voorschijn, en dan heeft deze klassificatie boven die van VOGEL dit wezenlijk voordeel, dat het 2de type nog onderverdeeld wordt. De natuurlijke groepen, die wij kunnen onderscheiden, zijn nu: klasse A, de hoofdmassa der witte sterren (type Sirius), I*a* bij VOGEL; klasse B, kleiner getal van deze door de heliumlijnen onderscheiden Orionsterren, I*b* bij VOGEL. In de kontinue reeks behooren de laatste vóór het eerste type te

staan en worden daarom ook 0[de] type genoemd. Klasse F vormt den overgang naar het tweede type (Procyon); klasse G is het type van de zon en Capella (hiervan zijn de E sterren de onduidelijke representanten); klasse K omvat de roodere sterren van het 2[de] type, die naar het derde naderen, zooals Arcturus (hier rekent PICKERING de H en I bij, als onduidelijke representanten). Het 3[de] type heet in de Draper Catalogue klasse M.

De continuiteit der sterspectra komt nog beter uit in de verdeeling die Miss A. MAURY gegeven heeft. (Annals Harv. Coll. Obs. Bd. 28). Hier is de hoofdmassa der sterspectra in 20 aansluitende klassen gerangschikt, waartusschen nog overgangen aangenomen worden. Klasse I—IV zijn de Orionsterren, VI—VIII het eerste type, IX—XI de overgang naar het 2[de] type, XIII—XIV het zuivere 2[de] type als de zon, XV beantwoordt aan de roodere Arcturussterren, XVII—XX vormen het derde type. Bedenkt men nu hierbij dat van klasse I tot III een groep lijnen uitsterft, n.l. de waterstoflijnen der andere reeksen, die voor de Wolf-Rayetsterren of zoogenaamde 5[de] type sterren (by VOGEL II*b*) karakteristiek zijn, zoo ligt het voor de hand, de reeks naar voren met deze sterren te verlengen, zooals door Miss CANNON bij het onderzoek der zuidelijke spectra (H. C. O. Ann. Bd. 28) ook gedaan is [1]).

Een gedeelte van al deze sterren vertoont een afwijkende relatieve intensiteit der metaallijnen; VOGEL en SCHEINER merkten dit reeds vroeger by α Cygni en α Persei op (Public. Potsdam Bd. 7, 2[de] deel). MAURY vond in nagenoeg alle klassen van III tot XIII vertegenwoordigers van deze groep, waaruit zij een paralelle reeks vormde, met III*c*—XIII*c* aangeduid, waartegenover de hoofdmassa dan *a*-sterren heeten.

Naar de meest gangbare opvattingen doorloopt een ster nu achter-

[1]) De karakteristieke lijnen der Wolf-Rayetsterren zijn, blijkens de resultaten van CAMPBELL (Astronomy and Astrophysics XIII, blz. 448) in twee groepen te onderscheiden, en naar de relatieve intensiteit dezer twee groepen zijn deze sterren in een voortloopende reeks te ordenen. De eene groep wordt door de eerste bijreeks en de eerste lijn van de hoofdreeks van waterstof gevormd: $H\beta'$ 5414, $H\gamma'$ 4542, $H\delta'$ 4201, hoofdlijn 4686); zij is het, die in de klasse I—III van MAURY als donkere lijnen voorkomt en uitsterft, en naar de andere zijde (klasse O*e* tot O*b* Cannon) meer en meer, tegelijk met de gewone H lijnen, tot emissielijnen omkeert. De andere groep, die van hier af t. o. v. de waterstoflijnen steeds sterker wordt, bestaat uit breede banden, van onbekenden oorsprong, wier middens, naar CANNON's metingen op γ Velorum de golflengten 5807, 5692, 5594, 5470, 4654, 4443 hebben. De helderste band is 4654; haar relatieve intensiteit t. o. v. de H lijn 4689 neemt in de reeks van sterren: 4, 47, 5, 48, 42 (nrs. van CAMPBELL) voortdurend toe.

eenvolgens al deze aaneensluitende ontwikkelingsvormen. Zij begint dan als een uiterst ijle gasmassa, die door inkrimping in temperatuur stijgt, een maximum van temperatuur bereikt, en vervolgens onder verdere inkrimping weer in temperatuur afneemt. Vóór het temperatuurmaximum bereikt wordt, vindt een maximum van lichtuitstraling plaats; voorbij het temperatuurmaximum neemt door samenwerking van beide oorzaken, temperatuurdaling en verkleining van volume, de lichtkracht snel af. Dat de 1ste type sterren heeter zijn, dan de 2de, staat, blijkens de wittere kleur, wel vast; of het temperatuurmaximum hier, of bij de Orionsterren ligt is echter onzeker.

De hier vermelde ontwikkelingsgang van een ijle gasmassa tot een dicht en koud lichaam, met eerst stijgende en later weer dalende temperatuur, is in overeenstemmiug met de physische wetten. Dat echter met de phasen van deze ontwikkeling de verschillende spectraaltypen overeenstemmen, is slechts een hypothese, een meer of minder waarschijnlijk vermoeden; want een werkelijke overgang van een ster van het eene naar het andere type is nog niet waargenomen. Indirect laat zich dat vermoeden op de proef stellen door een onderzoek van de lichtkracht der sterren. Bij de geschetste ontwikkeling moet de lichtkracht van eenzelfde ster eerst stijgen, daarna afnemen; de gemiddelde schijnbare helderheid der sterren, op denzelfden afstand tot ons zonnestelsel gereduceerd, moet dus op die wijze met de spectraalklasse wisselen, dat zij daar, waar de grootste lichtkracht heerscht, een maximum heeft en in volgende stadia der ontwikkeling weer afneemt.

§ 2. Bij dergelijke onderzoekingen is het gebruik van direct gemeten parallaxen als maat voor den afstand door hun gering aantal in 't algemeen uitgesloten. Een andere maatstaf vindt men in de eigen beweging der sterren, waarbij als onderstelling aangenomen wordt, dat de werkelijke lineaire snelheid voor verschillende spectraalklassen dezelfde is. Deze methode werd in 1892 door W. H. S. Monck toegepast [1]) op de Bradley-sterren in den Draper Catalogue. Hij vond de eigen beweging van de B.-sterren 't kleinst, dan volgden die van de A.-sterren; veel grooter is de gemiddelde E. B. van de F.-sterren [2]) welke ook die van de G. H. en K-sterren, evenals die der M.-sterren aanmerkelijk overtreft. Hij besloot hieruit, dat deze F.-sterren (de tot het 1ste type naderende sterren van het 2de type) ons het naastbij

[1]) Astronomy and Astrophysics XI. pag. 874.

[2]) Hij noemt deze ten onrechte aldoor „Capellan stars" omdat in den Dr. Cat. Capella F. genoemd wordt, hoewel zij eigenlijk bij de zon en de G.-sterren behoort.

zijn, en dus ook geringer uitstralingsvermogen hebben dan de gelere en roodere sterren van het tweede type. „Researches on binary stars seem to establish that this is not due to smaller average mass and it would therefore appear, that these stars are of the dullest or least light-giving class — more so not only than the Arcturian stars but than those of the type of Antares or Betelgeux" (pg. 878). Deze uitkomst is niet in overeenstemming met de gangbare meening, dat uit de F.-sterren zich door contractie en afkoeling achtereenvolgens G. K. en M.-sterren ontwikkelen.

Zij wordt echter bevestigd door een pas verschenen onderzoek van EJNAR HERTZSPRUNG: Zur Strahlung der Sterne[1]), waarin de klasseverdeeling der spectra van MAURY gevolgd wordt. Deze vindt voor de gemiddelde stergrootte, op een eigen beweging van 0",01 gereduceerd, de waarden in onderstaande tabel, waarachter gevoegd zijn de daarmee overeenkomende E. B. die met een stergrootte 4.0 correspondeeren.

Spectrum Maury	Spectrum Draper C.	Magn. voor E. B. 0".01	E. B. voor Magn. 4.0
II—IV	B	4.37	0.012"
V—VI	B—A	7.25	0.045
VII—VIII	A	8.05	0.065
IX—XI	F	9.06	0.103
XII—XIII	F—G	11.23	0.279
XIII—XIV[2])	G	7.93	0.061
XV	K	9.38	0.119
XV—XVI	K—M	7.77	0.057
XVII—XVIII	M	8.28	0.072

Hier blijkt ook de E.B. voor gr. 4,0 het grootst, dus de lichtkracht het kleinst te zijn voor de klassen XII en XIII, die den overgang van F tot G vormen; voor de latere ontwikkelingsstadia neemt de lichtkracht weer toe.

§ 3. Een betere maat voor den gemiddelden afstand van een groep sterren dan de E. B. is de parallactische verschuiving. De publicatie

[1]) Zeitschrift für wissenschaftliche Photographie Bd. III. S. 429.

[2]) Cursief gedrukte Romeinsche cijfers duiden bij MAURY den overgang naar de volgende klasse met een hooger nummer aan.

van n°. 9 van de „Publications of the astronomical Laboratory at Groningen", waar voor alle Bradley sterren de componenten τ en v van de E. B. met de verdere hulpgrootheden berekend zijn, maakte het gemakkelijk, dit onderzoek uit te voeren. Zijn τ en v de componenten der E. B. loodrecht op, en in de richting naar het antapex, en is λ de sphaerische afstand ster-apex, dan is voor een groep van sterren

$$q = \frac{\Sigma\, v \sin \lambda}{\Sigma \sin^2 \lambda}$$

de parallactische verschuiving, d. i. de snelheid van het zonnestelsel, gedeeld door een gemiddelden afstand der groep. Het gemiddelde van de andere componente $\frac{1}{n} \Sigma\, \tau$ is bij toevallige verdeeling der richtingen gelijk aan de helft van de gemiddelde lineaire snelheid, gedeeld door den afstand.

De verschillende groepen hebben nu nog een verschillende gemiddelde grootte. Daar het hier om conclusies omtrent de lichtkracht te doen is, en grootte en E. B. beide van den afstand afhankelijk zijn, werd de berekening ook uitgevoerd na reductie op grootte 4.0; d. w. z. elke ster werd vervangen gedacht door een, die in snelheid en lichtkracht aan de werkelijke volkomen gelijk is, maar op zulk een afstand geplaatst is, dat haar schijnbare grootte 4.0 is. Noemt men de verhouding, waarin de E. B. daarbij vergroot wordt

$$p = 10^{0.2\,(m-4)}$$

dan wordt dus

$$q_{4.0} = \frac{\Sigma\, pv \sin \lambda}{\Sigma \sin^2 \lambda} \quad \text{en} \quad \tau_{4.0} = \frac{\Sigma\, p\tau}{n}.$$

Bij deze berekening werden de klassen van MAURY als basis genomen. Uitgesloten werd 61 Cygni, omdat deze ver buiten de maat van alle andere valt, terwijl in plaats van de groep van den Grooten Beer ($\beta\, \gamma\, \delta\, \varepsilon\, \zeta$) maar één ster ($\varepsilon$) genomen is. In de volgende tabel (zie p. 99) zijn de uitkomsten van beide berekeningen samengesteld.

In beide reeksen van uitkomsten treedt het door MONCK en HERTZSPRUNG gevonden verschijnsel duidelijk op. Wij hebben echter niet deze getallen $\tau_{4.0}$ en $q_{4.0}$ gebruikt, maar ze eerst nog gewijzigd, omdat eerst na afloop dezer berekening de opmerking van HERTZSPRUNG ons ter kennis kwam, dat de bovenvermelde c-sterren zich geheel afzonderlijk gedragen; hun E. B. en parallaxe zijn zooveel kleiner dan die der a-sterren van dezelfde klassen, dat ze als een geheel aparte groep met veel grooter lichtkracht en afstand moeten beschouwd

Spectrum MAURY	Dr. Cat.	Typische ster	n	Gem. m	Gem. τ	q	$\tau_{4.0}$	$q_{4.0}$
					″	″	″	″
I—III	B	ε Orionis	33	3.57	0.007	0.018	0.007	0.013[5]
IV—V	B—A	γ Orionis	48	4.31	0.011	0.035	0.014	0.036
VI—VIII	A	Sirius	93	3.92	0.040	0.054	0.038	0.061
IX—XII	F	Procyon	94	4.14	0.089	0.153	0.095	0.136
XIII—XIV	G	Capella	69	4.08	0.141	0.157	0.160	0.199
XV	K	Arcturus	101	3.90	0.123	0.119	0.120	0.096
XVI—XX	M	Betelgeuze	61	3.85	0.049	0.068	0.050	0.061

worden [1]). De berekening is dus herhaald na uitsluiting der *c* en *ac*-sterren.

De uitkomsten zijn in de volgende tabel (p. 100) neergeschreven voor alle klassen van MAURY afzonderlijk; daarbij is klasse XV in drieën gesplitst: XV *A* zijn die, welke met *α* Boötis, XV *C* die welke met de roodere *α* Cassiopeiae overeenstemmen, terwijl in XV *B* al de overige verzameld zijn, die niet met zekerheid tot een der beide groepen te brengen zijn.

De waarden voor $\tau_{4.0}$ en $q_{4.0}$ verschillen zeer weinig van die der vorige tabel. Uitgaande van de waarde voor de snelheid van het zonnestelsel = 4.2 zonsafstanden, leveren de q's, bij deeling door 4.2 de gemiddelde parallaxe van sterren van verschillende spectraalklasse voor de grootte 4.0 ($\tau_{4.0}$). Omgekeerd vindt men uit de q's ook de relatieve lichtkracht van deze stertypen, waarvoor hier het getal genomen is, dat uitdrukt hoeveel keer de helderheid die van de grootte 4.0 overtreft, als ze op een afstand gesteld wordt, waarvoor $q = 0''.10$ is, dus de parallaxe $0''.024$. Ten slotte bevat de laatste kolom $2\tau/q$ de verhouding tusschen de gemiddelde lineaire snelheden van de stergroep en ons zonnestelsel.

---

[1]) Bij zijn samenstelling van parallaxen vraagt HERTZSPRUNG of misschien de heldere Zuidelijke ster *α* Carinae (Canopus) ook tot de *c*-sterren behoort; buiten de onmeetbaar kleine parallaxe en de kleine E. B. heeft hij er echter geen aanwijzing voor. In de bewerking van de zuidelijke spectra heeft Miss CANNON op het onderscheid tusschen *a* en *c*-sterren niet gelet. Toch kan deze vraag bevestigend beantwoord worden; op de beide spectrogrammen van deze ster, die aan haar werk toegevoegd zijn, vindt men zeer duidelijk de lijn 4053.8 die bij Capella en Sirius ontbreekt, en een typische lijn voor de *c*-sterren is. Hieruit blijkt, dat *ε* Carinae inderdaad een *c*-ster is.

Laag	n	[illegible]	[illegible]	[illegible]
I	5	0.016	[illegible]	[illegible]
II	13	015	016	1 1
III	14	006	[illegible]	[illegible]
IV	15	014	023	1.2
IV	16	026	044	0.7
V	11	009	042	0.4
VI	16	030	065	0 9
VII	30	040	086	0 9
VIII	41	043	055	1 6
IX	25	050	064	1 6
X	16	070	171	0.8
XI	22	103	061	3 3
XII	23	170	282	1 2
XIII	18	297	246	1.7
XIV	21	192	306	1.3
XIV	20	077	025	6 2
XV *A*	26	234	148	3.2
XV *B*	35	105	070	3 0
XV *C*	40	059	087	1 4
XVI	19	049	071	1.4
XVII	19	049	032	3.1
XVIII	16	050	075	1.3
XIX—XX	7	057	078	1.5

In de volgende tabel (p. 101) zijn deze waarden, op dezelfde wijze als vroeger, saamgetrokken:

Spectrum		Typische ster	n	$\tau_{4.0}$	$q_{4.0}$	$\pi_{4.0}$	L voor q=0″.10	$2\tau/q$
MAURY	Dr. Cat.							
				″	″	″		
I—III	B	ε Orionis	32	0.005^{6}	0 014	0.0033	51	0.8
IV—V	B—A	γ Orionis	45	0.013	0.036	0.0086	7.7	0.7
VI—VIII	A	Sirius	87	0.040	0.063	0.015	2.5	1.3
IX—XII	F	Procyon	86	0.101	0.141	0.034	0.50	1.4
XIII—XIV	G	Capella	59	0.182	0.224	0.053	0.20	1.6
XV	K	Arcturus	101	0.120	0.096	0.023	1.1	2.5
XVI—XX	M	Betelgeuze	61	0.050	0.061	0.015	2.7	1.6

§ 4. Conclusies uit deze tabel. De getallen uit de laatste kolom zijn niet constant, maar vertoonen een verloop. *De gemiddelde lineaire snelheid is dus niet voor alle stersoorten constant, maar neemt toe, naarmate men in de spectrumreeks bij verdere ontwikkelingsstadia komt.* (Of de daling voor het 3[de] type, klasse M, reëel is, moeten wij voorloopig in het midden laten). Dat de lineaire snelheid der Orionsterren klein is, was reeds bekend en blijkt ook uit de radiale snelheden. Terwijl CAMPBELL voor de snelheid van het zonnestelsel 19.9 KM. vond, en voor de gemiddelde snelheid van alle sterren 34 KM., vonden FROST en ADAMS uit de door hen gemeten radiale snelheden van 20 Orionsterren, na correctie voor zonsbeweging als gemiddelde 7.0 KM. [1]), dus ware gemiddelde snelheid in de ruimte 14 KM., waaruit de verhouding 0.7 voor $2\tau/q$ volgt. De Orionsterren zijn dus de bijzonder langzaam loopende, de Arcturussterren (klasse XV) de snelst loopende sterren.

§ 5. Beschouwt men nu de waarden van $q_{4.0}$ of de daaruit afgeleide van $\pi_{4.0}$ of $L_{0.10}$, dan blijkt, dat bij voortschrijden in de ontwikkelingsreeks van de vroegste Orionsterren tot het Capella- en zonstype G de lichtkracht voortdurend afneemt. Dat de q voor het tweede type in zijn geheel grooter is, dan voor het eerste (incl. de Orionsterren), was reeds lang bekend; KAPTEYN heeft indertijd uit het geheele Bradley-Draper materiaal afgeleid, dat door elkaar de 2[de] type sterren (F G K) 2,7 keer zoo dichtbij, en dus 7 keer zoo lichtzwak zijn, als de eerste-type sterren (A en B). Deze uitkomst is geheel in overeenstemming met de gewone ontwikkelingsleer, volgens welke uit 1[ste] type sterren door inkrimping en afkoeling het 2[de] type moet ontstaan.

1) Publications Yerkes Observatory. Vol. II. pag. 105.

Let men nu op de onderafdeelingen, dan blijken allereerst de Orionsterren de A-sterren in lichtkracht sterk te overtreffen, en in de Orionsterren zelf overtreffen die, welke het vroegste stadium innemen, de latere nog weer sterk. Vergeleken met het zonnetype G hebben de Siriussterren 12 keer, de overgang naar de Orionsterren 38 keer, het type van ε Orionis zelfs 250 keer zooveel lichtkracht. Deze uitkomst laat zich ook goed vereenigen met de onderstelling dat eenzelfde ster achtereenvolgens de toestanden van klasse I tot XIV doorloopt; men moet dan aannemen, dat de dichtheid des te geringer is, naarmate men in een lagere klasse komt. Of de temperatuur der Orionsterren hooger is, dan die der Siriussterren, of lager, kan hierdoor niet uitgemaakt worden; ook in het laatste geval kan de grootere ijlheid, dus het grooter oppervlak de werking van geringer lichtuitstralend vermogen meer dan opheffen. Spectraalphotometrische metingen moeten dit uitmaken.

Daar de Wolf-Rayetsterren aan klasse I aansluiten, is een onderzoek van hun eigen beweging, door KAPTEYN in uitzicht gesteld, van bijzonder belang.

Komt men nu echter in de reeks voorbij de G sterren, het zonstype, dan neemt de lichtkracht weer toe. De hier verkregen waarden voor q bevestigen in dit opzicht de uitkomsten van MONCK en HERTZSPRUNG.

Er is tegen het getuigenis der q's slechts één tegenwerping te maken, n.l. dat mogelijk deze klassen K en M met de zon een gemeenschappelijke eigen beweging hebben, waardoor de q geen goede maat voor de afstand is. Mag dit ook a priori onwaarschijnlijk zijn, men kan het bovendien nog op de proef stellen door een materiaal, dat, anders voor dit soort onderzoekingen te gebrekkig, juist op dit punt waardevol uitsluitsel kan geven, n.l. door de direct gemeten parallaxen. HERTZSPRUNG geeft middelwaarden van de op grootte 0,0 gereduceerde gemeten parallaxen, waarnaast wij hier de waarden gezet hebben, voor eenigszins andere groepen uit onze $\pi_{4.0}$ afgeleid:

	Waargen. $\pi_{0.0}$			Uit q berek. $\pi_{0.0}$
II—IV	0".0255	(6)	I—III	0".021
IV—VI	0 .106	(5)	IV—V	0 .054
VII—VIII	0 .153	(10)	VI—VIII	0 .094
IX—XI	0 .226[1]	(6)	IX—XII	0 .21
XII—XIII	0 .442	(2)		
XIV	0 .567	(5)	XIII—XIV	0 .33
XV	0 .151	(8)	XV	0 .14
XVI	0 .171	(3)	XVI—XX	0 .096
XVII—XVIII	0 .115	(3)		

[1]) α Carinae uitgesloten.

Over 't geheel zijn de getallen van HERTZSPRUNG wat grooter, wat daaruit licht te verklaren is, dat een aantal parallaxen, op grond van groote E. B. gemeten, boven het gemiddelde zullen zijn. In elk geval blijkt hier voldoende, dat ook de direct gemeten parallaxen de stijging van de lichtkracht voorbij klasse XIV duidelijk aanwijzen, en dat dus voor het aannemen van een gemeenschappelijke beweging met de zon voor de verdere groepen niet de minste grond bestaat.

Het is dus niet te betwijfelen, dat de K en M sterren grooter lichtkracht hebben dan de F en G sterren. MONCK leidt daaruit af, dat zij een grooter lichtuitstralend vermogen hebben, daar uit de dubbelsterren een over het geheel gelijke massa volgt.

Dat dit laatste uit de dubbelsterren niet kan afgeleid worden, zal hieronder blijken. Bovendien is MONCK's conclusie omtrent het grooter lichtuitstralend vermogen der K en M sterren niet aan te nemen. Dit vermogen hangt bij gloeiende lichamen af van de temperatuur der uitstralende lagen en van de atmospherische absorpties. Bij de onverzwakte straling gaat een grooter uitstraling gepaard met blauwer licht, (want het maximum der uitstraling wordt naar kleiner golflengten verschoven), omdat beide een gevolg van hooger temperatuur zijn. De algemeene absorptie door een atmospheer is ook het grootst voor kleinere goflengten, zoodat een percentsgewijs geringere overblijvende straling met een roodere kleur gepaard gaat. Er is daarom niet aan te twijfelen, dat een roodere kleur in elk geval met een geringer lichtuitstraling per eenheid van oppervlak correspondeert.

Dan blijft er slechts één verklaringswijze over: *de K en M sterren (de roodere 2de type sterren als Arcturus en het 3de type) bezitten door elkaar aanmerkelijk grooter oppervlak en volume, dan de overige 2de type sterren van de klassen F en G.* Deze uitkomst is in strijd met de gangbare voorstelling van de ontwikkeling der sterren, volgens welke uit de geelwitte F en G sterren door verdere *inkrimping* en afkoeling de roodere K en dan de M sterren ontstaan.

§ 6. Vraagt men nu naar de nadere gesteldheid dezer sterren, dan lijkt het niet zeer aannemelijk, dat zij een bijzonder kleine dichtheid hebben; de lage temperatuur, de sterk absorbeerende dampen, wijzen op een sterk gecondenseerd stadium. Eer laten deze omstandigheden een grooter dichtheid verwachten (t. o. v. de F en G sterren) dan een kleiner. Uit de grooter volumina volgt dan, *dat de K en M sterren aanmerkelijk grooter massa's hebben, dan de F en G's.* Deze uitkomst is nog merkwaardiger in verband met het boven gevondene omtrent hun grooter gemiddelde snelheid. Wanneer de sterren van ons sterrestelsel in dien zin een groep vormen, dat

hun snelheden binnen de groep bepaald worden door hun onderlinge aantrekkingen, dan mag men verwachten dat dooreen genomen de snelheden des te grooter zijn, naarmate de massa's kleiner zijn. Voor de Orionsterren met kleine snelheid ontstaat hieruit geen moeilijkheid; want dezelfde omstandigheden, die ons veroorloven hun evengroote massa toe te schrijven als de A, F en G sterren, veroorloven ons ook, hun een grooter massa toe te kennen. De K sterren, die zoowel een grooter massa, als een grooter snelheid hebben, worden echter door deze stelling tot een afzonderlijke groep gestempeld, die door welke reden dan ook, *oorspronkelijk* met grooter snelheden moet toegerust zijn. Arcturus, met haar onmeetbaar kleine parallaxe en groote E B, is door haar buitensporig groote lineaire snelheid en buiten mate groote lichtkracht dus in het overdrevene een type voor deze geheele klasse, waarvan zij de helderste vertegenwoordigster is. Het zou daarom de moeite waard zijn, het systematische in de beweging der K sterren, die tot nog toe zonder onderscheid met de F en G sterren als 2de type samengenomen werden, afzonderlijk te onderzoeken.

Mocht echter deze uitkomst omtrent de grootere massa der K en M sterren niet bevestigd worden, dan blijft als eenige andere mogelijkheid de onderstelling, *dat de dichtheid dezer sterren uiterst gering is.* In dit geval zou hun massa dezelfde kunnen zijn, als van andere sterren, en kunnen zij ontwikkelingsstadia van dezelfde lichamen voorstellen. Waar deze dan echter in de ontwikkelingsreeks thuis behooren, blijft hierbij een raadsel. Er is een regelmatige continuiteit in de opeenvolging van F—G—K—M; al naar men de ontwikkeling in de eene of in de andere richting onderstelt, gaat bij den overgang G—K afkoeling met uitzetting, of verhitting met inkrimping gepaard. Men kan het raadselachtige, dat in deze onderstelling ligt ook aldus uitdrukken; terwijl in de natuurlijke ontwikkeling der hemellichamen, zooals die naar onze opvattingen plaats vindt, wel de temperatuur een maximum heeft, maar de dichtheid doorloopend moet toenemen, zouden de hier verkregen cijfers naar deze interpretatie op een maximum van dichtheid in de spectrumklassen F en G wijzen.

In Vol. XI van Astronomy and Astrophysics heeft MAUNDER reeds opmerkzaam gemaakt op verschillende omstandigheden, die er op wijzen, dat het spectraaltype niet zoozeer een aanduiding is van verschillend ontwikkelingsstadium als wel van verschillende samenstelling "There seems to me but one way of reconciling all these different circumstances viz: to suppose that spectrum type does not primarely or usually denote epoch of stellar life, but rather a fundamental

difference of chemical constitution" [1]). Onder deze feiten is b.v. een van de belangrijkste deze, dat de verschillende Plejadensterren, die in helderheid, en door den gelijken afstand dus ook in werkelijke grootte, zeer uiteenloopen, toch allen precies hetzelfde spectrum hebben. De hier gevonden uitkomst is een bevestiging van zijn onderstelling.

Men kan geneigd zijn, eenig verband te zoeken tusschen deze K en M-sterren, en de *c*-sterren, die volgens HERTZSPRUNG ook een veel grooter lichtkracht, dus óf geringer dichtheid óf grooter massa hebben, dan de overeenkomstige *a*-sterren; temeer daar deze *c*-sterren niet verder dan klasse XIII reiken. Toch schijnt ons dit onwaarschijnlijk; de K-sterren zijn talrijk, vormen 20 °/₀ van alle sterren, terwijl de *c*-sterren zeldzaam zijn. Bovendien is het spectrum van alle K-sterren in de relative intensiteit van de metaallijnen volkomen identiek met de *a*-sterren van vorige klassen, zooals de zon en Capella. Voorloopig moet dus onbeslist blijven, in welke andere spectra wij andere levensphasen van de K, en in welke van de *c*-sterren moeten zoeken. De *c*-sterren liggen op een paar na alle in of vlak bij den melkweg: een eigenschap, die zij met de Wolf-Rayetsterren en ook met het 4de type van SECCHI (Vogel III*b*) gemeen hebben, met welke zij echter in spectrum geen uit gemeenschappelijke lijnen blijkende verwantschap hebben.

§ 7. Men kan nog trachten, de hier gevonden gesteldheid der Arcturus- en der 3de type sterren door andere gegevens op de proef te stellen, met name door die, welke de dubbelsterren ons verschaffen. De optische dnbbelsterren kunnen echter omtrent de massa der sterren op zich zelf niets leeren, gelijk uit de volgende overweging blijkt (o.a. ook in NEWCOMB „De Sterren" te vinden). Denkt men een dubbelster n-keer zoo dichtbij geplaatst, terwijl alle afmetingen n-keer zoo klein worden, doch dichtheid en uitstralingsvermogen dezelfde blijven. Dan neemt de massa in de verhouding n^3 af, de baanafmeting a in de verhouding n, dus de omloopstijd blijft gelijk; de lichtkracht wordt n^2-keer zoo klein, dus de schijnbare helderheid blijft gelijk evenals de schijnbare afmetingen van de loopbaan, m. a. w, zij schijnt ons volkomen identiek met vroeger. De massa is dus niet onafhankelijk van den afstand te vinden. Noemt men a de angulaire halve groote as, P de omloopstijd, δ de dichtheid, λ het lichtuitstralend vermogen, π de parallaxe en ϱ den straal van het sterlichaam, dan is $\pi^3 M = \frac{a^3}{P^2}$; de massa M is een getallenconstante $\times\ \varrho^3\delta$, de schijnbare

[1]) Stars of the first and second types of spectrum. blz. 150.

helderheid H een constante $\times \pi^2\rho^2\lambda$. Elimineert men hieruit parallaxe en straal, dan wordt

$$H^3 \frac{P^4}{a^6} = c \frac{\lambda^3}{\delta^2}.$$

Uit de bekende grootheden, baanelementen en helderheid vindt men dus een betrekking tusschen de physische grootheden dichtheid en uitstralingsvermogen, onafhankelijk van de mathematische dimensies. Deze betrekking is reeds herhaaldelijk afgeleid. MAUNDER geeft in het straks geciteerde stuk waarden voor de dichtheid $\delta = c\left(\frac{\lambda}{H}\right)^{3/2} \frac{a^3}{P^2}$ in de onderstelling van gelijke λ; hij vond voor de Siriussterren (1ste type) 0,0211, voor de zonnesterren (alle van 't 2de type) 0,3026, dus 14 keer zoo groot gemiddeld; evengoed kan men zeggen, dat bij gelijke dichtheid het stralingsvermogen der Siriussterren 6 keer zoo groot is; de juiste uitdrukking zou zijn, dat het quotient λ^3/δ^2 bij de Siriussterren 200 keer zoo groot is als bij de zonnesterren.

In anderen vorm is dezelfde berekening door HERTZSPRUNG uitgevoerd, met behulp van AITKEN's lijst van dubbelster-elementen [1]). Hij zet deze uitdrukking met behulp van $-2,5 \log H = m$ om in grootteklassen; stelt men in den logarithmische vorm

$$3 \log H + 4 \log P - 6 \log a = const. + 3 \log \lambda - 2 \log \delta$$

$$m - {}^{10}/_3 \log P + 5 \log a = m_r$$

dan is $m_r = const. - 2,5 \log \lambda + {}^5/_3 \log \delta$.

Groepeert men de waarden van m_r naar het spectrum volgens den Draper Catalogue (voor de Zuidelijke sterren naar CANNON; α Centauri werd naar de helderste componente G genomen), dan vindt men als middelwaarden

Klasse	A	— 2.92	(9 sterren — 4.60 tot — 1.09)
„	F	— 1.32	(19 „ — 3.61 „ + 0.14)
„	G en E	— 0.49	(11 „ — 1.60 „ + 1,28)

De 3 sterren van het type K (met H) geven — 4.88 (γ-Leonis), — 1.05 en + 0,87, dus zoo sterk uiteenloopend, dat er geen resultaat van waarde uit te halen is. Op de buitengewoon hooge waarde voor λ^3/δ^2 die γ Leonis geeft, is reeds meermalen met verwondering de aandacht gevestigd. Terwijl bij de andere klassen de uitersten van m_r bij een grooter aantal sterren 3.5 grkl. uiteenloopen, wijkt γ Leonis bijna 5 klassen van het midden der beide anderen af, d. w. z. dat haar lichtuitstralend vermogen honderd keer zoo groot, of haar dichtheid duizendmaal zoo klein is, als bij deze andere. Voor de

1) Lick Observatory Bulletin Nr. 84.

klassen A en F vinden wij λ^3/d^3 640 resp. 8 keer zoo groot als voor klasse G; conclusies omtrent klasse K, als geheel, waar het hier vooral om te doen is, zijn er niet uit te trekken. Mogelijk, dat een onderzoek van dubbelsterren met onzeker bekende baanbeweging (waarbij dan hulponderstellingen noodig zijn) meer resultaten kan opleveren.

Over de massa zelf kunnen daarentegen de spectroscopische dubbelsterren iets leeren. De waarnemingselementen $a \sin i$ en P geven hier onmiddellijk $M \sin^3 i$; daar niet aan te nemen is, dat tusschen spectraaltype en helling van de loopbaan t. o. v. de gezichtslijn eenig verband bestaat, mag men 't gemiddelde van $\sin^3 i$ voor alle groepen gelijk nemen. Bij de sterren, waarvan slechts één componente zichtbaar is, bevat de waarnemingsgrootheid nog een onbekend element, nl. de verhouding β van de massa der onzichtbare tot die der zichtbare ster. Is hier a de halve groote as van de baan van de zichtbare ster om het gemeenschappelijk zwaartepunt, dan is

$$\frac{a^3 \sin^3 i}{P^2} = M \frac{\beta^3}{(1+\beta)^2} \sin^3 i$$

Het is natuurlijk niet vaststaand, dat β door elkaar bij alle spectraalklassen hetzelfde is; is dit niet het geval, dan kunnen de M's zich nog eenigszins anders gedragen, dan de hier berekende waarden van $\frac{a^3 \sin^3 i}{P^2}$.

Ongelukkigerwijze zijn onder het groote aantal spectroskopische dubbelsterren, dat tot nog toe ontdekt is (in Lick Observatory Bulletin N°. 79 worden er 147 opgeteld) nog slechts van zeer weinig de baanelementen bekend. Deze geven, naar de spectra gerangschikt

Groep II—IV (B) Oriontype		Groep VI—VIII (A) Siriustype	
o Persei	0.61	β Aurigae	0.56
η Orionis	2.51	ζ Ursae	(3.41)[1]
δ Orionis	0.60	Algol	0.72
β Lyrae	7.85	α Androm.	0.36[2]
α Virginis	0.33	α_2 Gemin.	0.002
V Puppis	34.2		

[1]) Bij ζ Ursae is voor a de h.gr.as der relatieve baan genomen; dus naar verhouding is dit getal een onbekend aantal malen te groot.

[2]) Aangenomen periode 100 dagen, baansnelheid 32.5 K.M.

Groep XII—XIV *a* (F—G) Zonstype	
α Aurigae	0.185
χ Draconis	0.120
(W Sagittarii	0.005)
(X Sagittarii	0.001)
ι Pegasi	0.117
η Pegasi	0.234

Groep XII—XIV *ac*	
α Ursae min.	0.00001
ζ Geminorum	0.0023
η Aquilae	0.0029
δ Cephei	0.0031

Groep XV (K)	
β Herculis	0.061

De K sterren vinden hier maar één vertegenwoordiger, en daardoor levert ons ook dit materiaal niets, dat dienen kan, de verkregen uitkomsten omtrent dit stertype op de proef te stellen. Toch biedt deze tabel aanleiding tot eenige opmerkelijke conclusies. Ondanks het kleine aantal blijken hier de Orionsterren de andere duidelijk in massa te overtreffen, terwijl de Siriussterren ook wat grooter massa dan de zonnesterren schijnen te hebben. Bijzonder opvallend is echter de geringe massa der tot *a* naderende *c*-sterren. *De c-sterren vereenigen dus in zich een zeer groote lichtkracht en een zeer kleine massa, dus moet hun dichtheid buitengewoon gering zijn.* Wanneer het meer dan toeval is, dat de drie regelmatig veranderlijke sterren van korte periode, die bij MAURY voorkomen, juist alle *c* kenmerken hebben, en er dus een wezenlijk verband tusschen deze spectraaleigenaardigheid en de veranderlijkheid bestaat, is er reden, ook W en X Sagittarii, die eveneens kleine waarden opleveren, bij die groep te rekenen; zooals reeds opgemerkt werd, is bij de Zuidelijke sterren niet op het onderscheid tusschen *a* en *c* sterren gelet. [1])

Men mag verwachten, dat binnen enkele jaren onze kennis van de loopbanen der spectroskopische dubbelsterren zeer zal toegenomen zijn. Dan zal het mogelijk zijn, conclusies als de hier gevondene uit een veel grooter materiaal af te leiden, en ook over de gemiddelde massa der K sterren tot eenige zekerheid te komen. Wat het laatste betreft, blijkt uit onze uitkomsten in elk geval de noodzakelijkheid, bij onderzoekingen over sterverdeeling en sterbeweging het 2[de] type niet als één geheel te beschouwen, maar altijd de F en G sterren afzonderlijk te houden van de roodere K sterren.

---

[1]) In dit verband mag tevens vermeld worden, dat schrijver dezes in 1891 een veranderlijkheid van α Ursae minoris in eene periode van iets minder dan 4 dagen meende te vinden. De geringe amplitudo en de groote invloed, die vooropgevatte meeningen bij helderheidsschattingen naar ARGELANDERS methode bij een korte periode van haast een vol aantal dagen uitoefenen, maakte het onmogelijk tot zekerheid in positieven of negatieven zin te komen. CAMPBELLS ontdekking, dat zij een spectroskopische dubbelster met een periode van $3^d\ 23^u\ 14^m$ is, doet vermoeden, dat het niet geheel een illusie is geweest.

Natuurkunde. — De Heer H. KAMERLINGH ONNES biedt aan: Mededeeling N°. 94*f* uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: „*Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium. X. Over het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof.*

(Aangeboden in de zitting van 28 Mei 1906).

§ 1. *Inleiding.* Reeds aan het slot van Med. N°. 14 van Dec. '94, over de uitkomsten, die ik verkregen had door bij de cascade methode regeneratoren toe te passen, in 't bijzonder over het verkrijgen van een permanent bad van vloeibare zuurstof ten dienste van metingen bij de laagste toenmaals waargenomen temperaturen, sprak ik de hoop uit ook een dergelijken cyclus, als voor de zuurstof was ingericht, met waterstof tot stand te kunnen brengen. Een eenvoudige voortzetting van de cascademethode kon dit niet zijn. Men kan met behulp van vloeibare zuurstof of stikstof, ook wanneer zij in het luchtledige verdampen, de kritische temperatuur van waterstof niet bereiken; om deze vloeibaar te maken moest dus partij getrokken worden van afkoeling door adiabatische uitzetting.

In Med. N°. 23 van Jan. '96 deed ik eenige mededeelingen omtrent hetgeen over het vloeibaar maken van waterstof langs dezen weg kon worden afgeleid uit de wet der overeenstemmende toestanden van VAN DER WAALS. Het was mij gebleken dat een toestel voor het vloeibaar maken van waterstof uitgaande van — 210° ongeveer kon worden geconstrueerd naar het model van een toestel, die geschikt mocht worden bevonden om zuurstof uitgaande van de gewone temperaturen en zonder verdere afkoelingsmiddelen vloeibaar te maken. Mijne pogingen om een toestel voor isentropische afkoeling te verkrijgen door de af- en toevoerbuis van een met samengeperst gas te voeden kleinen expansiemotor, tot een regenerator te vereenigen waren echter mislukt. Derhalve vestigde ik verder mijn aandacht op de juist toen (1896) bekend geworden toepassing van het JOULE-KELVIN-proces (LINDE's toestel voor het vloeibaar maken van lucht, en DEWAR's sproeistraal van waterstof voor 't bevriezen van zuurstof).

Terwijl LINDE's proces, omdat deze er in geslaagd was met zijn toestel vloeibare lucht statisch te verkrijgen, het meest beloofde, was het toch duidelijk, dat van deze methode alleen het beginsel kon worden gevolgd. Aan het afkoelen van een toestel van de afmetingen van den eerste van LINDE (gewicht 1300 K.G.) met behulp van vloeibare lucht (zuurstof), die in 't luchtledige moest verdampen, kon niet worden gedacht. En dit moest toch volgens het bovenstaande het uitgangspunt zijn.

Veeleer lag het voor de hand, door de in een vacuumglas geborgen spiraal, die DEWAR voor zijn sproeistraal van waterstof ter bevriezing van zuurstof gebruikte, te vergrooten, een toestel te verkrijgen, met welken men lucht kon vloeibaar maken, en die dan ook weer kon dienen als voorbeeld voor een toestel om de waterstof vloeibaar te maken. Inderdaad is het een inrichting van dezen aard geweest, met welke DEWAR in 1898 voor het eerst waterstof statisch vloeibaar maakte. Omtrent de toestellen, die DEWAR blijkbaar in staat stellen groote hoeveelheden vloeibare waterstof te verzamelen, is mij verder echter niets bekend geworden.

Bij de inrichting der Leidsche circulatie van waterstof is uitgegaan van DEWAR's denkbeeld om de regeneratorspiraal in een vacuumglas te plaatsen (1896), en wat de regeneratorspiraal zelve betreft, HAMPSON's toestel voor het vloeibaar maken van lucht (1896) gevolgd, omdat het gebleken is, dat de verhoudingen van deze spiraal bijzonder gunstig gekozen zijn en zij door geringe afmetingen en gering gewicht bij uitstek geschikt is om volgens de boven aangehaalde stelling als model te dienen voor een regeneratorspiraal om waterstof van ongeveer — 205° bij ontspanning van hooger tot gewonen druk vloeibaar te maken. Volgens dit model hebben ook de andere natuurkundigen, die zich na DEWAR met vloeibare waterstof hebben beziggehouden, — TRAVERS 1900 en 1904, OLSZEWSKI 1902, 1904 en 1905 (de laatste meer om met geringe hulpmiddelen en vlug kleine hoeveelheden te verkrijgen) — hunne toestellen gebouwd.

De Leidsche waterstofliquefactor voor continu gebruik bevat genoeg eigenaardigs om als onafhankelijke constructie naast de toestellen van TRAVERS en OLSZEWSKI, die aan de eischen der Leidsche metingen niet zouden kunnen voldoen, eene zelfstandige plaats in te nemen. Trouwens de stelling, volgens welke deze toestel gebouwd is en uit welke volgt, dat de regeneratorspiraal gevoed met waterstof afgekoeld door vloeibare zuurstof (lucht), die onder een aangegeven lagen druk verdampt, tot het doel moet voeren, is door mij het eerst uitgesproken.

Wat het tot stand brengen betreft van een circulatie om een bad van vloeibare waterstof te onderhouden, dit vraagstuk, — van hetwelk de inrichting van den liquefactor voor continu gebruik (die, met stikstof op de proef gesteld, werkelijk bleek te voldoen) slechts een deel was, — is nog niet door anderen behandeld.

Dat de oplossing ook te Leiden lang op zich deed wachten is bij de hooge eischen, die ik aan dezen cyclus meende te moeten stellen, niet te verwonderen. Ik achtte het toch met het oog op de te verrichten metingen noodig om in den onder VIII dezer Mededeelingen van Methoden en Hulpmiddelen van het Cryogeen Laboratorium beschreven

cryostaat een bad van 1.5 Liter inhoud af te schenken en dit tot op 0.°01 op gelijkmatige en standvastige temperatuur te houden. De eischen waren dus vrij wat hooger dan die ik aan het bad van vloeibare zuurstof indertijd had gesteld. Er was niet aan te denken deze nieuwe eischen te vervullen voor beschikt kon worden over eene (reeds in Med. N°. 23, Jan. '96 genoemde) vacuumpomp (zie Med. N°. 83, Febr. '03), geschikt om snel groote hoevelheden vloeibare lucht bij een druk van een paar centimeter te verdampen en compressoren voor continu bedrijf met uiterst zuivere waterstof verkregen waren. Met het eerst genoemde werktuig en de in § 3 beschreven compressoren geeft de in § 2 beschreven liquefactor 3 à 4 Liters vloeibare waterstof per uur. Zoo kon dan ook in deze ziting (28 Mei '06) 4 Liter te Leiden den vorigen dag bereiden vloeibare waterstof worden meegebracht om daarmede verschillende proeven te doen.

De verkregen inrichting bleek om met den bovengenoemden cryostaat te werken, ruim voldoende. Nadat het gelukt was met behulp ervan eenige metingen in vloeibare waterstof, kokende onder gewonen en onder verlaagden druk, te verrichten, sprong echter het vacuumglas van den cryostaat en bleven de meettoestellen daarbij slechts door een toeval gespaard. Daarom is toen nog een gewijzigde cryostaat gebouwd, die in XII beschreven wordt, en die behalve, dat hij de veiligheid der meettoestellen waarborgt, nog het voordeel heeft minder vloeibare waterstof te verbruiken dan de onder VIII (Med. 94^d, Juni '05) beschreven cryostaat. Deze nieuwe cryostaat voldoet volkomen aan de gestelde eischen· Merkwaardig is het zeker dat men, als de metingen in gang, zijn door niets bespeurt, dat gewerkt wordt met een bad van niet minder dan 1.5 liter vloeibare waterstof, van welke de temperatuur op 0°,01 standvastig wordt gehouden.

Aan den heer G. J. Flim, amanuensis bij het Cryogeen laboratorium, onder wiens leiding de in het volgende beschreven liquefactor en cryostaat alsmede verdere hulptoestellen in de werkplaats van het laboratorium naar mijn aanwijzing gebouwd zijn, betuig ik gaarne mijn dank voor zijne intelligente hulp.

§ 2. *De waterstofliquefactor voor continu gebruik.*

a. De toestel verwezenlijkt het oorspronkelijk ontwerp [1]) nog

[1]) Een verbetering zou nog zijn de regeneratorspiraal in verschillende opvolgende spiralen, elk met een eigen ontspanningskraan in de volgende overgaande, te verdeelen, waarbij de drukkingen naar de temperaturen geregeld worden. Zie de theorie van de afkoeling door het Joule-Kelvin-proces en het vloeibaar maken met behulp van het Linde-proces door van der Waals in de Zitting van Jan. 1900 gegeven.

niet geheel. Dit laatste wordt schematisch voorgesteld door Pl. I fig. 1, welke nauwelijks nadere toelichting behoeft. De samengeperste waterstof doorloopt achtereenvolgens de regeneratorspiralen D_4, D_3, D_2, D_1, C, B, A, van welke B zich gedeeltelijk bevindt in een bad van, door P toegevoerde, vloeibare lucht, die onder zeer lagen druk verdampt, en D_4, D_2, C en A door de bij de kraan M zich ontspannende waterstof en D_1 en D_3 door de dampen uit het luchtbad in F omspoeld worden. Daar echter kan worden beschikt over meer vloeibare lucht dan noodig is om de toegevoerde waterstof voldoende af te koelen, en de vacuumpomp (zie Med. N°. 83, Febr. '03) grooter vermogen heeft dan noodig is, om de verdampende lucht [1]) onder lagen druk weg te zuigen, ook wanneer de regeneratorwerking der spiralen D_1, D_2, D_3 en D_4 wordt opgeofferd, is eenvoudigheidshalve de dubbele voorkoelregenerator DI, welke een belangrijke besparing aan vloeibare lucht zal geven, nog niet aangebracht, en bestaat de toestel enkel uit één voorkoelregenerator C, den refrigerator F met koelspiraal B en den hoofdregenerator A in het vacuumglas E met verzamelglas L, dat geplaatst is in de kast V, die met de kast U een gesloten geheel vormt.

b. De hoofdregenerator, Pl. I fig. 2, bestaat uit 4 naast elkaar gewonden en daarna in elkaar geschoven windingen koperen buis van 2.4 m.M. inwendige en 3,8 m.M. uitwendige diameter A_1, A_2, A_3 en A_4, (aantal lagen 81; lengte van elke buis 20 M.,) die evenals in den ethyleenregenerator (Med. N°. 14 Dec. '94 en beschrijving van MATHIAS [2]), fig. 1 F) en den chloormethylregenerator (Med. N°. 87, Juni '03 Pl. I) van het midden van den cylinder naar den omtrek en weder van den omtrek naar het midden om den kraandrager M_4 gewonden zijn, en samen met flanel omwoeld in het vacuumglas E_0 (binnen- en buitenwand zijn met E_{01} en E_{02} aangegeven) passen, waaruit de vloeibare waterstof bij E_1 in het verzamelglas L_0 loopt. De vier windingen vereenigen zich bij M_{00} tot één toevoerkanaal, dat evenals bij de kraan T in fig. 3, van de beschrijving van MATHIAS l. c., afgesloten wordt door de spilpunt M_{11} bewogen door een handvat M_{21}. De pakking M_3 sluit den buisvormigen kraandrager M_4 aan het boveneinde, waar zij niet aan afkoeling blootstaat, luchtdicht af (verg. bovengenoemde beschrijving van MATHIAS). De waterstof ontwijkt zijdelings als bij de ethyleenkraan L fig. 2 in de beschrijving van MATHIAS l.c. door zes openingen M_{01} en wordt verhinderd op te stijgen of rond te loopen door de schermpjes M_{02} en M_{03}.

---

[1]) Bij gebruik van zuurstof zou men partij kunnen trekken van afkoeling tot lagere temperatuur, die dan echter in twee trappen zou moeten geschieden (verg § 4*b*).

[2]) Le laboratoire cryogène de Leyde, Rev. Gen. d. Sc. Avril 1896.

c. De nieuwzilveren refrigeratorbak F_1 hangt in de nieuwzilveren omhullingskast U_1 en is daarvan met flanel U_{64} gescheiden. Een drijver F_{21} wijst den stand van de vloeibare lucht aan, waarvan de toevoer door de kraan P_{01} met spil P_{11} en pakking P_2, geheel als de bovengenoemde kraan, behalve dat de glazen kraandraagbuis door een nieuwzilveren P_4 is vervangen, geregeld wordt.

De verdampte lucht wordt door een stevige koperen buis F_2 weggezogen (zie § 4*b*). De 2 afvoerbuizen B_{12} en B_{22} van de spiraal B_{11} en B_{21} (ieder 23 windingen, diameter buis inwendig 3,6 mM., uitwendig 5,8 mM. elk lang 6 M.) zijn aan den bodem gesoldeerd. De beide toevoerbuizen B_{10} en B_{20} zijn in het nieuwzilveren deksel gesoldeerd, waarop verder de glazen buis F_4 met den wijzer F_{22} van den kurken drijver F_{21} is vastgelakt (verg. Stikstof Med. N°. 83, Febr. '03 IV, Pl. VII.)

d. De voorkoelregeneratorspiraal C_1, C_2, C_3 en C_4 is evenals A viervoudig gewonden en met flanel omwoeld in den cylinder van de nieuwzilveren kast U_2 opgesloten. De vier windingen (inwendige diam. 2.4 mM., uitwendige diam. 3.8 mM., aantal lagen 81 lengte van elke buis 20 M.) ontspringen in het soldeerstuk C_{01} uit de buis C_{00}, gesoldeerd in het deksel van U_2, en vereenigen zich in de twee buizen C_7a en C_7b, die de waterstof naar den refrigerator voeren. De spil van deze spiraal is een van boven gesloten dunwandige nieuwzilveren buis C'_6.

De afgeblazen waterstof wordt afgevoerd door de buis U_6.

e. Wat de vloeibare waterstof betreft, deze wordt opgevangen in een nieuwzilveren bakje L_1, passend in het vacuumglas L_0, dat door tusschenkomst van een houten blokje V_7, rust op den met hout V_{65} gevoerden bodem van de van binnen met papier V_{64} en kapok V_{63} bekleede en geïsoleerde kast V_1. Het gevaar van springen van het vacuumglas is door tusschenkomst van L_1 geringer dan wanneer de waterstof direct uit E_1 in het glas L_{02} kon vallen. Ook wordt door dit bekertje de snelle verdamping voorkomen in het geval, dat het glas mocht springen. (verg. § 1).

De stand van de vloeibare waterstof wordt aangewezen door een drijver L_{200}, die met een zijden koordje L_{21} over katrolletjes L_{22} en L_{23} in evenwicht wordt gehouden door een ijzeren gewichtje L_{24}, bewegende in een glazen buis V_{21} dat ook van buiten af door een magneet kan worden op en neer gehaald. De drijver is een doos L_{00} van zeer dun nieuwzilver, het haakje L_{201} is uit een aan beide zijden open capillaire buis gebogen en in het deksel gesoldeerd. Het glas V_{21} sluit met caoutchouc op het cylindertje V_{32}, dat door een dunwandig nieuwzilveren buisje V_{30} met de kast verbonden is.

De waterstof wordt afgetapt door het nieuwzilveren hevelbuisje N_{51}, dat zich voortzet in het dubbelwandige buisje N_{51} N_{501}, leidende naar het aftapkraantje N_{01}. Als bij de aethyleenkraan (beschr. van MATHIAS l. c. fig. 2) bevindt zich ook hier de pakking N_2 en de schroefdraad in het niet afgekoelde gedeelte. De uit een nieuwzilveren buisje vervaardigde stift N_1 loopt door het nieuwzilveren kraandraagbuisje N_4. Het afvoerbuisje N_0 zoowel als het afvoerkraantje N_4 worden omspoeld door een deel van de koude waterstofdampen, die men voor dit doel tusschen den dubbelen wand van het buisje door N_{504} en langs K_{pa}^{*} laat ontwijken. De buitenwand N_{501}, N_{502} van het dubbelwandige buisje is door wol geïsoleerd van de zijbuis V_{21} aan de kast V_{20}.

Het glas L is gedekt door een vilten deksel L_3, beneden met een blaadje nikkelpapier voorzien om straling naar de vloeibare waterstof te voorkomen. Deze deksel klemt op het ondereinde E_2 van E en steunt op het buisje N_{501} en het katrolhulsje L_{31}.

f. Te beschrijven blijven nu nog de verschillende veiligheidsinrichtingen om te voorkomen, dat de toestel springt, wanneer de kraan M plotseling te veel gas doorlaat, gelijk het geval kan zijn wanneer de opening verstopt is door bevroren verontreinigingen in het gas, of wanneer een der buizen, door dezelfde of door een andere oorzaak bezwijkt.

In de eerste plaats dient als zoodanig de onder kwik uitmondende wijde glazen buis W_1. De hoeveelheid gas welke op eens ontwijkt, en de hevigheid waarmee het kwik weggeslingerd wordt, is soms zoo groot, dat het noodig was een kast W_{30} met verschillende schermen W_{31}, alle van gevernist bordpapier, aan te brengen, om het kwik op te vangen en weder terug te laten vloeien in het glas W_2 (waar het in voldoende hoeveelheid aanwezig moet zijn om bij het luchtledig pompen de buis te kunnen vullen).

Stijgt de druk in het verzamelglas hooger dan die, op welke de veiligheidsbuis berekend is, dan bezwijkt de dunwandige caoutchoucbuis V_{42}, die om den geperforeerden cylinderwand van messing V_{41} (daarvan door een dun blaadje zijdepapier gescheiden) getrokken is. De veiligheidsinrichting is door een wijde nieuwzilveren buis V_{40} aan de kast V_1 verbonden.

Verontreiniging van de waterstof in den liquefactor door diffusie van lucht wordt vermeden doordat de caoutchouccylinder V_{432} gespannen over de ringen V_{431} en V_{430} door de kraan V_{44}, na ledigpompen, waarbij de cylinderwand zich tegen den gumniwand aanlegt, met waterstof onder overdruk gevuld wordt.

Een inrichting van geheel dezelfde constructie beveiligt de kast

U_1, waarin zich de hoofdregenerator, en de kast U_2, waarin zich de voorkoelregenerator C bevindt.

Wat betreft de beveiliging tegen spanningen, die door het verdampen van lucht kunnen ontstaan, zoo behoefde de refrigeratorruimte F alleen door de onder kwik uitmondende buis Y beveiligd te worden.

g. Bij de bescherming van de verschillende deelen van den toestel tegen warmtetoevoer van buiten is er voor gezorgd, dat die oppervlakken, welke in temperatuur kunnen dalen beneden het kookpunt van lucht en niet voldoende beschermd worden door geleiding van minder afgekoelde deelen, niet met lucht doch alleen met waterstof in aanraking komen. Zoo is de refrigeratorbak F omhuld door de waterstof, welke de kasten U en V vult, en bevindt zich ook waterstof in de ruimte tusschen het vacuumglas L en den wand van de kast V en strekt zich een zijarm V_{20} en V_{21} van de kast V uit, om het dubbelwandige kraantoevoerbuisje N_{61}, N_{601} en de dubbelwandige kraan N_4, N_{601} met waterstof te omhullen.

De nieuwzilveren kast V, is evenals de nieuwzilveren kast U, van welke het vacuumglas L door lagen papier V_{64} en de refrigeratorbak F door een laag flanel geïsoleerd is, tegen warmtegeleiding van buiten verder beschut door afzonderlijke omhullingen met kapok V_{81}, aangestampt binnen een cartonnen omhulsel V_{82}, hetwelk dichtgeplakt is. De lucht binnen deze afgesloten ruimte staat, ten einde het neerslaan van waterdamp te voorkomen, evenals bij den ethyleen- en chloormethylregenerator, (zie boven onder *b*) met de buitenlucht in verband door middel van een met stukjes natriumhydraat gevuld droogbuisje, *t.dr.*

De luchtdichte verbinding van de kast U met de kast V wordt verkregen door den caoutchoucring *Ua*, die op het glas en op de versterkte randen U_{60} en V_{60} der nieuwzilveren kasten sluit. Caoutchouc kan in grootere afmetingen alleen tot sluiting gebruikt worden, wanneer het niet wordt afgekoeld. In dit geval is de geleiding langs den nieuwzilveren, van het vacuumglas nog door lagen papier geïsoleerden, wand zoo gering, dat de ringvormige versterkte randen op de gewone temperatuur blijven en sluiting door een stevigen gespannen caoutchoucring mogelijk is. Volkomen is die sluiting, wanneer het caoutchouc enkel op het glas gedrukt wordt, niet; de geheele verbinding is derhalve omgeven met een atmosfeer van nagenoeg zuivere waterstof, welke men verkrijgt en onderhoudt door den caoutchoucring *Uc*, die op U_1 en V_1 afsluit en die door het kraantje *Ud* met waterstof onder overdruk gevuld wordt. Wegens de geringe warmtegeleiding van het nieuwzilver is ook bij de verbindingen van V_{42} en U_{42} evenals bij de kraanpakkingen M_2 en N_2 afkoeling niet te vreezen.

h. De kast V wordt met U tot een stevig geheel vereenigd door de 3 stangen Ub met schroefverbindingen U_{s1} en V_{s1}. Het vacuumglas E_0 steunt, gevat door den caoutchoucring Ua met een houten ring E_1 en een nieuwzilveren cylinder U_{s1} tegen den refrigeratorbak F. Het geheel is bestand tegen het luchtledig pompen, dat noodig is om den toestel met zuivere waterstof te vullen. Nadat de kast U, waarvan de deelen U_1 en U_2 onderling door steunbalkjes verbonden zijn, en de kast V elk op zichzelf gemonteerd zijn, wordt het vacuumglas E op zijn plaats geschoven en de kast V aan U gekoppeld. De geheele liquefactor hangt met een paar stangen aan den zolder en wordt in 't bijzonder gesteund door de stevige luchtafvoerbuis F_2 en de waterstofafvoerbuis U_4.

Op Pl. II is de circulatie schematisch, wat betreft de toestellen in de juiste verhouding van afmetingen, wat betreft de verbindingen enkel schematisch voorgesteld. De liquefactor is door de letters ℓiq aangegeven. Door *Kc* wordt de samengeperste waterstof toegelaten, door *K h d* of *K h c* de afgeblazen waterstof afgevoerd.

i. Voordat men met den toestel gaat werken wordt deze door middel van luchtledig pompen en toelaten van zuivere waterstof langs *Kc*, bij geopende kraan *M*, gevuld met zuivere waterstof, in de droogflesschen 𝔇*a* en 𝔇*b* bevrijd van sporen vocht, die zij mocht hebben opgenomen.

§ 3. *De compressoren en gasklokken.*

a. De waterstof wordt op hoogen druk gebracht met behulp van twee compressoren, in elk van welke de samenpersing in twee stappen plaats vindt.

Terwijl andere natuurkundigen gebruik maken van snelloopende compressoren met waterinjectie, van denzelfden aard als die, welke, door mij indertijd (zie Med. N°. 14 van Dec. '94 § 10 en N°. 51, Sept. '99 § 3) voor het werken met zuivere gassen werden ingericht, heb ik voor de waterstofcirculatie langzaam loopende compressoren (zie Pl. II 𝔊 met 110 en 𝔥 met 80 omwentelingen per min.) gebruikt, die met olie gesmeerd worden. Om continu met waterstof te kunnen werken is de hoogste graad van zuiverheid van het gas noodig. Want de bij het gas gemengde lucht zet zich in de regeneratorspiraal af en zal, wanneer zij zich daar gedeeltelijk verzameld heeft, bij de onvermijdelijke wisselingen van temperatuur in verschillende deelen van de spiraal, nu eens smelten dan weer bevriezen, zoodat zelfs kleine hoeveelheden, in aanmerking genomen het naar beneden vloeien, noodzakelijk verstopping teweeg moeten brengen. Zulke kleine hoeveelheden lucht, zouden allicht worden afgegeven

door de groote hoeveelheid injectiewater, die voor bovengenoemde compressoren met waterinjectie noodig is, of indringen in de toestellen, noodig om hetzelfde injectiewater herhaaldelijk te kunnen gebruiken. En eindelijk is de kans op het verliezen van gas bij deze compressoren geringer en de bediening veel gemakkelijker. De compressoren zijn door de maatschappij BURCKHARDT te Bazel met groote zorg vervaardigd.

In den eersten compressor ((𝔊 Pl. II verplaatsing 20 M³ per uur.) wordt in den eersten cylinder (dubbelwerkend met schuif) het gas van 1 op 5 en in den tweeden cylinder (plunger en kleppen) van 5 op 25 atmosfeer gebracht; in den tweeden compressor 𝔋 (plunger en kleppen) in den eersten cylinder van 25 op 50 en in den tweeden van 50 op 250 atmosfeer. Na elke samenpersing wordt het gas door een koelspiraal geleid. Aan de twee eerste koelspiralen (die van 𝔊 Pl. II) is een olieafscheider verbonden.

Veiligheidskleppen voeren van elk reservoir naar den aanvoer terug; verder zijn de pakkingen met oliekommen (Med. N°. 14 '94 en Med. N°. 83, Pl. VIII) afgedicht. De waterstof, die uit de pakking bij 𝔋 mocht ontsnappen, wordt opgevangen.

b. De hoogedrukcompressor perst de waterstof door twee stalen, met stukjes natriumhydraat gevulde droogbuizen 𝔇*a* en 𝔇*b* (zie § 2, *i.* en Pl. II) van welke de eerste tevens als windketel bij de regeneratorspiraal dient. Daar bij alle bewerkingen het gas (zie *c*) oorspronkelijk nagenoeg droog is en slechts in aanraking komt met olie, behoeft slechts van tijd tot tijd door kraan *Ke* een kleine hoeveelheid geconcentreerde natronoplossing afgetapt te worden.

c. De compressoren zuigen bij gewoon bedrijf het gas uit gasklokken. Dreven deze op water, zoo zoude bij de groote hoeveelheden verplaatst gas, die telkens weder met water in aanraking worden gebracht, verder het afscheiden van den onvermijdelijk meegevoerden waterdamp bij het samenpersen tot groote bezwaren aanleiding geven. Daarom zijn voor dit doel in gebruik genomen twee verzinkte gasklokken, *Gaz a* en *Gaz b* Pl. II met vertinde naden (inhoud van elk 1 M.³) drijvende op olie, welke vroeger (zie Med. N°. 14 Dec. '94) voor het opvangen van aethyleen werden ingericht. [1]) De kraan *Kpa* (*Kpb*) bevindt zich onder olie; ook de verbinding van de glazen buis, door welke de

[1]) De teekening geeft de constructie, die gevolgd is om olie te besparen, wel voldoende aan. De klokken kunnen buiten geplaatst worden, en zijn daarom door een kap van gegalvaniseerd ijzer en gordijnen van geteerd zeildoek, die rondom dichtgetrokken kunnen worden, beschermd. Indertijd was het van het grootste belang het aethyleen in de gasklokken zuiver en droog te kunnen bewaren. Thans is het zuiveren van aethyleen door uitvriezen in vloeibare lucht (zie Med. N°. 94*e* IX § 1) een zeer eenvoudige bewerking geworden er zijn reservoirs zonder naad om het gas te bewaren in alle afmetingen te verkrijgen.

olie van den gashouder tot boven de kraan zichtbaar kan worden opgezogen, met het kraanstuk is door olie bedekt. Verder is de caoutchouc afvoerbuis en de verbinding met de roodkoperen zuigbuis, door eene tweede slang, gevuld met glycerine, omgeven. Van de kraan af kan de geleiding luchtledig gezogen worden; om te verhinderen, dat hierbij de buis samengedrukt wordt, is in de buis een stalen spiraal aangebracht. Een olieafsluitdrijver *Kph* (*Kpi*) voorkomt, dat de olie in de toestellen wordt overgezogen.

Behalve deze gasklokken zijn, om iets minder zuivere waterstof op te vangen, nog twee gasklokken, van 5 M^3. elk, volgens hetzelfde systeem om vloeistof te besparen als de verzinkte gasklokken gebouwd, zorgvuldig geklonken en dichtgekookt en drijvende op eene oplossing van chloorcalcium, beschikbaar. De oliegashouders dienen enkel om zeer zuivere waterstof te bewaren en dit alleen gedurende het bedrijf.

De zuivere waterstof wordt den overigen tijd bewaard in de bekende stalen flesschen op Pl. II afgebeeld bij 𝔑*ha*. Men laat deze, wanneer men waterstof wil vloeibaar maken in de gasklok afblazen door *Kg* (*Khe*, *Kpe* en *Kpb* bijv. naar *Gaz. b*), nadat deze, (die met H_2 gevuld gestaan heeft) eerst opzettelijk met zuivere waterstof is omgespoeld. Zoodra het bedrijf geeindigd is, wordt de waterstof langs *Kpf* en *Kpc* met behulp van 𝔊 en 𝔥 teruggepompt door *Ka* en *Kf* in de bussen 𝔑*ha*.

De gasklokken kunnen ieder afzonderlijk of samen met de pompen of met den liquefactor verbonden worden. Het eerste komt vooral te pas bij het werken met den cryostaat (zie XII) en bij het zuiveren van waterstof (zie XIV).

§ 4. *De afkoeling door vloeibare lucht.*

a. De vloeibare lucht wordt in den refrigeratorbak *F* (Pl. I) die door *Ks* (Pl. II) aan de vacuumpomp 𝔉 gekoppeld is, gezogen door het buisje *Pb* dat gekoppeld is aan het hevelbuisje van een vacuumflesch 𝔄*a* met vloeibare lucht.

Deze heeft men, door den straal van vloeibare lucht uit den toestel (Pl. IV, fig. 2) waarin deze bereid wordt (zie XIII) in het open glas (zie nevenstaande fig. 1) op te vangen, gevuld en, met een losse vilten stop *m* (fig. 1) gedekt, bewaard. Om de vloeibare lucht in de toestellen waarin men haar wenscht te gebruiken, over te hevelen wordt de stop vervangen door een kapje *h* (fig. 1) met drie buisjes; één, *d*, dat bestemd is om met een klein handpompje den druk in de flesch te verhoogen, één, *c*, waaraan een kwikmanometertje wordt verbonden, en één, *b*, dat tot op den bodem reikt en waardoor het vloeibaar gas kan worden afgevoerd. (Wordt de flesch voor andere

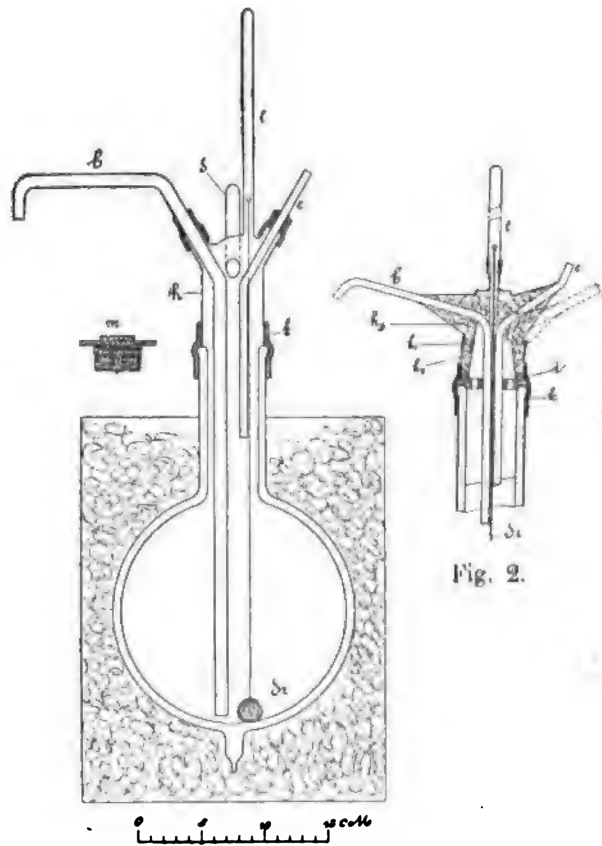


Fig. 2.

Fig. 1

vloeibare gassen gebruikt, zoo dient *d* voor afvoer van de dampen en *c* voor inlaat van het vloeibare gas). Een van de beide eerste buisjes reikt tot in den hals. Het kan ook gebruikt worden om vloeibare lucht uit een grooteren voorraad in de flesch over te brengen. Aan het kapje is een gesloten glazen buis *b* bevestigd waarin de wijzer van een kurken drijver *dr* den stand van de vloeistof aangeeft.

De kapjes, als in fig. 1 aangegeven, werden vroeger van glas geblazen en de drie buisjes met caoutchouc er in bevestigd. Later is het kapje h_1 echter, als in fig. 2 afgebeeld, met de drie buisjes en met een dubbelen wand h_2 van zeer dun nieuwzilver tot een geheel samengesoldeerd, dat men met een caoutchouc ring *k* op de flesch bevestigt. De ruimte tusschen de wanden is met kapok h_3 opgevuld en het geheel steunt op den hals der flesch met behulp van een houten blokje *i*. Het kapje wordt als het op de flesch geplaatst is, nog met wol omwoeld.

Met het oog op het transport is het vacuumglas geplaatst in een cartonnen doos met houtwol.

Is het hevelbuisje niet in gebruik dan wordt het gesloten met een eindje caoutchoucslang, waarin een stopje. Om over te hevelen verwijdert men dit stopje en verbindt het toevoerbuisje *Pb* (Pl. I) met een eindje caoutchoucslang aan het hevelbuisje *b* (fig. 2). Ten einde afbreken van het door de koude broos geworden caoutchouc te voorkomen, worden de nieuwzilveren buisjes zoodanig ingericht, dat ze in elkaar passen, en het caoutchouc dus niet zoo sterk aan spanning wordt blootgesteld.

De toevoer van vloeibare lucht in den refrigeratorbak wordt verder geregeld met de kraan *P*. Pl. I. Wijst de drijver aan dat de flesch nagenoeg leeggezogen is, dan vervangt men deze door een andere. De kraan *Ks* wordt geregeld naar de aflezing op de stijgbuis *Y*.

b. Men laat de lucht onder een druk van 15 mm verdampen, hetgeen mogelijk is doordat als vacuumpomp een BURCKHARDT-WEISS-pomp 𝔉 Pl. II gebruikt wordt.

De vacuumpomp is dezelfde, die gebruikt wordt bij het meten met den cryostaat van baden bij — 217° (zie Med. No. 94^d van Juni '05.), en is met het oog op dit doel volgens Med. No. 83 V. Febr. '03 ingericht. De letters bij 𝔉 op pl. II, hebben dezelfde beteekenis als in laatstgenoemde Med. Pl. VIII. Aan deze vacuumpomp 𝔉 van 360 M^3 verplaatsing per uur wordt ook nu weder als vermeld in Med. No. 94^d VIII Juni '05 gezogen door een kleine vacuumpomp van 20 M^3 verplaatsing per uur [1]). (op Pl. II. met 𝔎 aangeduid.)

§ 5. *In werking brengen van den liquefactor.*

a. Is de toestel volgens § 2 gevuld met zuivere waterstof en in den refrigerator onder lagen druk verdampende lucht gebracht, zoo laat men de waterstof, die door 𝔊 en 𝔍 Pl. II. langs *Kc* aangevoerd wordt, gemakshalve bij wijdgeopende kraan *M* Pl. I. eenigen tijd doorstroomen ten einde den geheelen toestel voor te koelen. Daarna regelt men de kraan *M* zoodat de druk in de regeneratorspiraal langzaam oploopt. Bij 100 atm. kan de toestel zeer goed vloeibare waterstof leveren, zelfs is wel bij 70 atm. gewerkt. Gewoolijk echter wordt de druk tusschen 180 en 200 atm. gehouden, daar het rendement dan eenige malen grooter is [2]). De liquefactor levert dan circa 4 Liter vloeibare waterstof per uur. Een gedeelte van de waterstof laat men langs *Kha* Pl. I fig. 2 en Pl. II ontsnappen om de hevelbuis N_{s1} Pl. I en de kraan *N* voor te koelen.

Zoodra zich vloeibare waterstof af gaat scheiden bemerkt men dat men de kraan *M* verder moet dicht draaien om den druk binnen dezelfde grenzen te houden.

[1]) Wil men bij gebruik van O_2 (zie § 2 noot 2) tot een druk van een paar mM. afdalen, zoo zou vooraf moeten gaan een afkoeling in den tweeden refrigerator als *F* met O_2 onder lagen druk verdampende aan 𝔎 bijv.

[2]) v. D. WAALS heeft den weg aangegeven om dit te berekenen (zie noot [1]) bij § 2.

Verzamelt zich vloeibare waterstof in L dan vertoont zich ijzel op het buisje N_{503} Pl. I fig. 2 bij de kraan N.

b. De gasvormige waterstof ontwijkt langs *Khd* (Pl. II.) naar 𝔖 en naar één of naar beide gashouders. Scheidt zich vloeibare waterstof af, dan neemt de compressor 𝔖, behalve de uit den liquefactor ontwijkende waterstof, ook langs *Kpa* en *Kpb* uit de gashouders waterstof op. Men voert dan uit ℜ*ha* Pl. II langs *Kg* nieuwe zuivere waterstof toe.

c. De drijver (L_{200} Pl. I) begint eerst aan te wijzen wanneer reeds een vrij aanzienlijke hoeveelheid vloeibare waterstof zich heeft verzameld.

§ 6. *Afhevelen van vloeibare waterstof en demonstreeren van vloeibare en vaste waterstof.*

a. Wijst de drijver L_{200} Pl. I aan, dat het glas tot boven toe gevuld is (dit is gewoonlijk een uur na het in werking brengen van den liquefactor het geval), zoo wordt de waterstof afgeheveld in de vacuumglazen *Hydr a*, *Hydr b* enz., Pl. II, die achter elkaar aangekoppeld worden om telkens na vulling van één een plaats op te schuiven, zoodat ze achtereenvolgens door den kouden waterstofdamp doorloopen worden en ze afgekoeld zijn voor men ze vult.

Zij zijn met kapjes van dezelfde soort als de flesschen voor het overhevelen van vloeibare lucht, fig. 1 en 2 voorzien. Pl. III vertoont op grooter schaal 2 achter elkaar gekoppelde flesschen, benevens een derde die reeds gevuld is, alles als op Pl. II, in zij- en bovenaanzicht. De verdampte waterstof ontwijkt langs d'_3 en langs d''_3 en verder langs K_0 zie Pl. II naar den gashouder. De letters der figuren hebben dezelfde beteekenis als bij fig. 2; voor de verklaring kan ook op de beschrijving van die fig. in § 4 verwezen worden.

De warmtegeleiding in het dunne nieuwzilver is zoo gering dat de nieuwzilveren buisjes in de kapjes h_3 gesoldeerd kunnen worden en dat zij verder voldoende beschermd worden door een dubbelen wand h_{11} van nieuwzilver met een tusschenlaag van kapok, welke men dan nog flink met wol omhult.

Een enkele maal komt het wel voor dat de caoutchoucring k' bij de sterke afkoeling barst, in 't algemeen echter heeft het gebruik van caoutchouc geen last opgeleverd, en is dus eene, trouwens voor de hand liggende, doch iets minder eenvoudige constructie, waarbij de afkoeling van het caoutchouc ter plaatse waar het sluiten moet, ontgaan wordt, nog niet uitgevoerd.

b. Wil men den straal van vloeibare waterstof, die uit het kraantje N_7 Pl. I stroomt, zien, zoo verbindt men aan het buisje N_6 en de caoutchoucslang d_3 in plaats van de verzilverde kolven van Pl. II

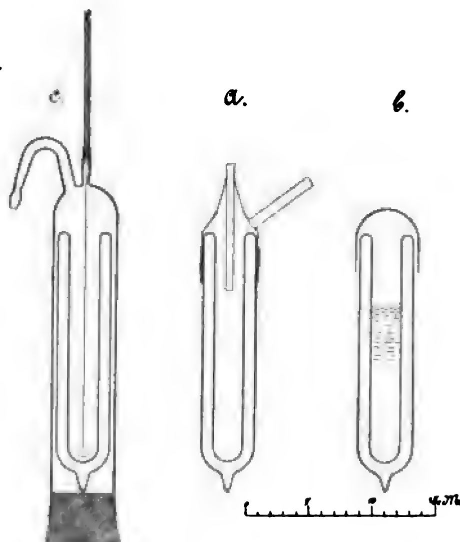


Fig. 3

en Pl. III een doorzichtig vacuumcylindertje fig. 3*a* door een caoutchoucring gesloten met een nieuwzilveren kapje met inlaatbuisje. Na het openen van het kraantje beslaat de caoutchoucafvoerbuis d_3 met ijzel en wordt zij glashard; spoedig daarna ziet men de eerste spheroidale druppels op den bodem van het glaasje rondspatten, waarna de licht bewegelijke vloeistof het glaasje vult. Plaatst men een glazen kapje als in fig. 3*b* er boven, zoo kan men het glaasje aan de open lucht laten staan zonder dat deze er in neerslaat en het verdampen bespoedigt. Op de beschreven wijze heb ik ook wel niet-verzilverde vacuumflesschen van 1 Liter inhoud gevuld, waarin de vloeibare waterstof evenals in het zooevengenoemde glaasje levendig kookt. De verdamping is natuurlijk veel geringer en het opstijgen der belletjes houdt op wanneer men het vacuumglas of de vacuumflesch in vloeibare lucht plaatst.

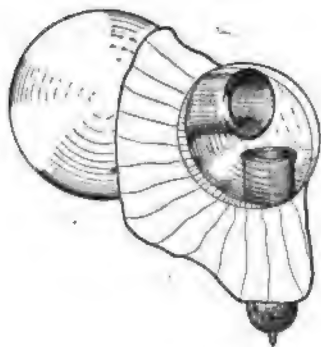


Fig. 4

Om het afschenken van waterstof uit het eene open vat in het andere te vertoonen, gebruik ik een glazen kap met een rand van dun caoutchoucblad er omgebonden (zie bijgaande fig. 4). Men brengt de flesch waaruit, en het glas waarin men wil schenken, het laatste na het met vloeibare lucht volgeschonken en snel omgekeerd te hebben (doet men dit niet snel dan komt er binnen in een blauwe aanslag van H_2O uit de lucht) onder de kap, die zich met waterstof vult en dus verder helder blijft, en neemt met het caoutchouc om de hals van de flesch en om het glas elk in een hand. Men kan dan door de kap het overschenken zien. De ontwijkende waterstof stijgt onder nevelvorming in de lucht naar boven.

Om nu het half volgeschonken glaasje helder te houden dekt men het onder de afschenkkap met een glazen kapje, waarna men het van onder de afschenkkap kan wegnemen.

c. Het is zeer leerrijk te zien, wat er gebeurt, wanneer men dit kapje

vervolgens wegneemt en het glaasje een weinig schuin houdt. Boven den spiegel der vloeibare waterstof vormen zich dan dikke sneeuwwolken van vaste lucht, de zeer kleine vaste deeltjes vallen door de uiterst lichte waterstof (spec. gew. $^1/_{14}$) op den bodem, waar zij zich verzamelen tot een wit poeder, dat bij het schudden van de waterstof zich gedraagt als een zwaar zand in water zou doen. Is de waterstof verdampt dan smelt dat zand spoedig weder tot vloeibare lucht [1]).

d. Vaste waterstof demonstreert men gemakkelijk door het zooeven genoemde glaasje fig. 3*a* te brengen onder een klokje als fig. 3*c* waarin een metaaldraad op en neer kan bewogen worden (b.v. door deze te bevestigen in een caoutchoucbuisje) en het klokje aan de luchtpomp te verbinden. Spoedig vormt zich dan een stijfselachtig wit koekje, dat men met het draadje op en neer kan bewegen.

e. Om een vacuumflesch als op Pl. III te vullen begint men met deze af te koelen door omspoelen met vloeibare lucht. De verbinding bij N_8 Pl. I fig. 2 en Pl. III wordt eenvoudig bewerkstelligd door een eindje caoutchoucslang N_{81} om de in elkaar passende nieuwzilveren buisjes N_8 en C_8 te schuiven, waarom men flanel C_2 zwachtelt. Daar omheen woelt men dan losse wol. Zijn eenige flesschen aangekoppeld zoo vult men deze door het buisje b_0 van *Hydr. a*, met behulp van herhaald luchtledig pompen, met zuivere waterstof en evenzoo wordt gezorgd dat elke nieuwe aan te koppelen flesch met zuivere waterstof gevuld is, en bij het aankoppelen geen lucht in de toestellen kan dringen.

Is een flesch naar aanwijzing van den drijver L_{200} (Pl. I, fig. 2) gevuld zoo koppelt men deze af, doch laat, zoolang de vloeibare waterstof in dit glas bewaard wordt, de verdampende waterstof in den gashouder ontwijken, zooals op Pl. III voor *Hydr. c* is voorgesteld. Het afkoppelen bij N_8 geschiedt eenvoudig door dat men na verwijdering van den flanellen zwachtel C_2 het eindje caoutchoucslang N_{81} (ongevulcaniseerd) met de vingers (of met een daarvoor ingericht tangetje) verwarmt tot het weder week geworden is en men het van buisje N_8 afschuiven kan.

§ 7. *Overbrenging naar den cryostaat, sluiting van den kringloop.*

a. Dergelijk met vloeibare waterstof gevulden vacuumglazen worden (zie *Hydr. d* op pl. II) overgebracht naar het lokaal, waar de cryostaat

[1]) Dit alles werdt in de Zitting van 28 Mei vertoont. Om het geringe specifieke gewicht van waterstof aan te toonen bracht ik een zeer dunwandig glazen bolletje dat slechts zeer weinig in ether onderzinkt (als een massieve glazen bol in kwik) aan een dun draadje in het glaasje met vloeibare waterstof, waarin het als een massieve glazen bol in water valt en op den bodem tikt.

𝔈 opgesteld is; en hier overgeheveld. Te dien einde koppelt men het buisje b''_1 van Pl. III al weder door een eindje caoutchoucslang, omhuld met flanel en wol, aan het toevoerbuisje a_1 van den cryostaat en het buisje d_0 aan een toevoerbuis van zuivere waterstof onder druk die van $\mathfrak{R}hc$ pl. II langs *Kwa* wordt aangevoerd. Bij al dergelijke aan- en afkoppelingen zorgt men, dat er steeds overdruk in de te koppelen buizen is, dat de afgekoppelde buizen terstond gesloten worden door dichte stoppen en dat de toestellen vooraf, na luchtledig gepompt te zijn met zuivere waterstof worden gevuld. Men laat de vloeibare waterstof eerst in den cryostaat $\mathfrak{C}r$ nadat deze vooraf — bij andere aankoppeling (zie de stippelijn op Pl. II) — afgekoeld is met behulp van zuivere waterstof, die men uit $\mathfrak{R}hc$ door een, in vloeibare lucht gelegde koelslang *Refr*, heeft geleid. Deze refrigerator is van een dergelijke constructie als de stikstofcondensator Pl. VII van Med. N°. 83 (Dec. '02 en Febr. '03). In plaats van *Nliq* is hier te lezen H_2 en in plaats van *Ox liq*, *Aër liq*, welke uit de vacuumflesch $\mathfrak{A}c$, wordt overgeheveld (verg. § 6).

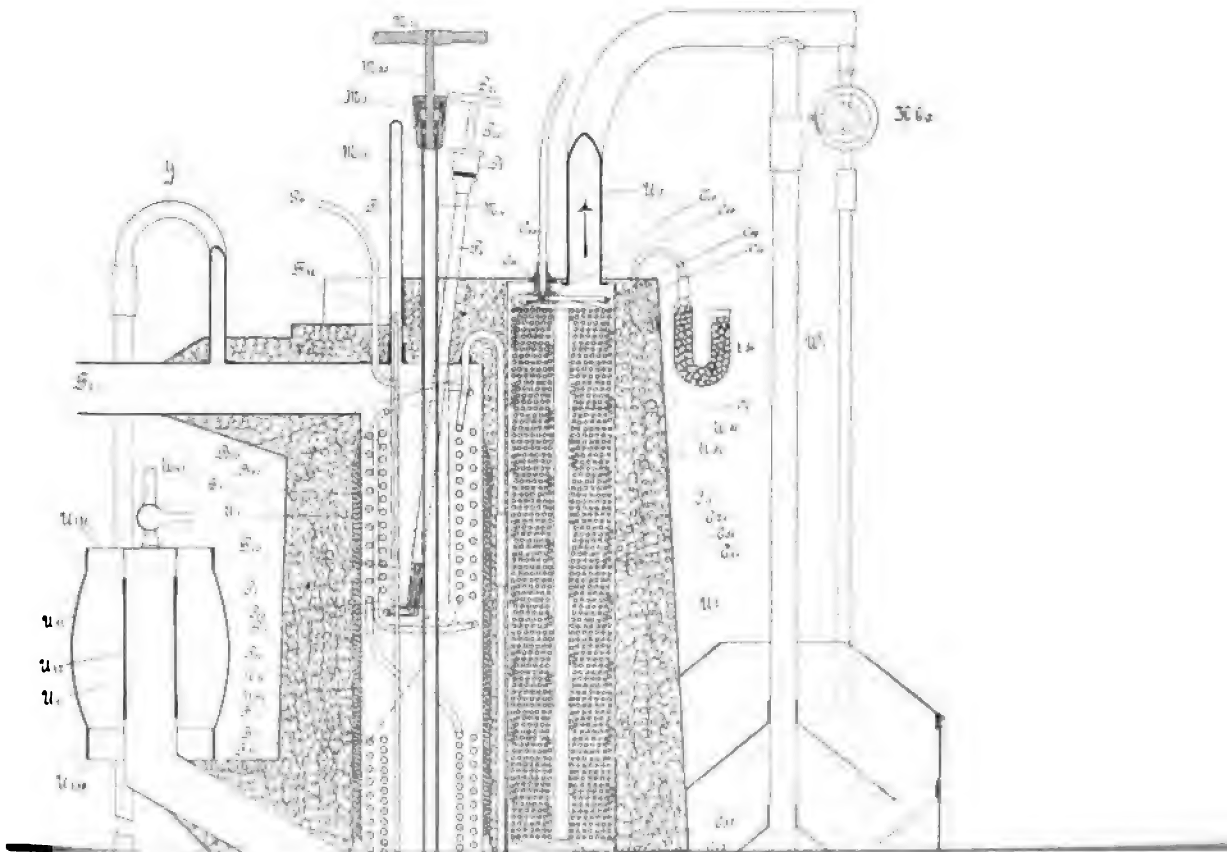
Bij het overhevelen van de vloeibare waterstof in $\mathfrak{C}r$ wordt de snelheid van overstroomen geregeld naar een kwikmanometertje, dat aan het buisje *c* op het kapje *h* Pl. III bevestigd is.

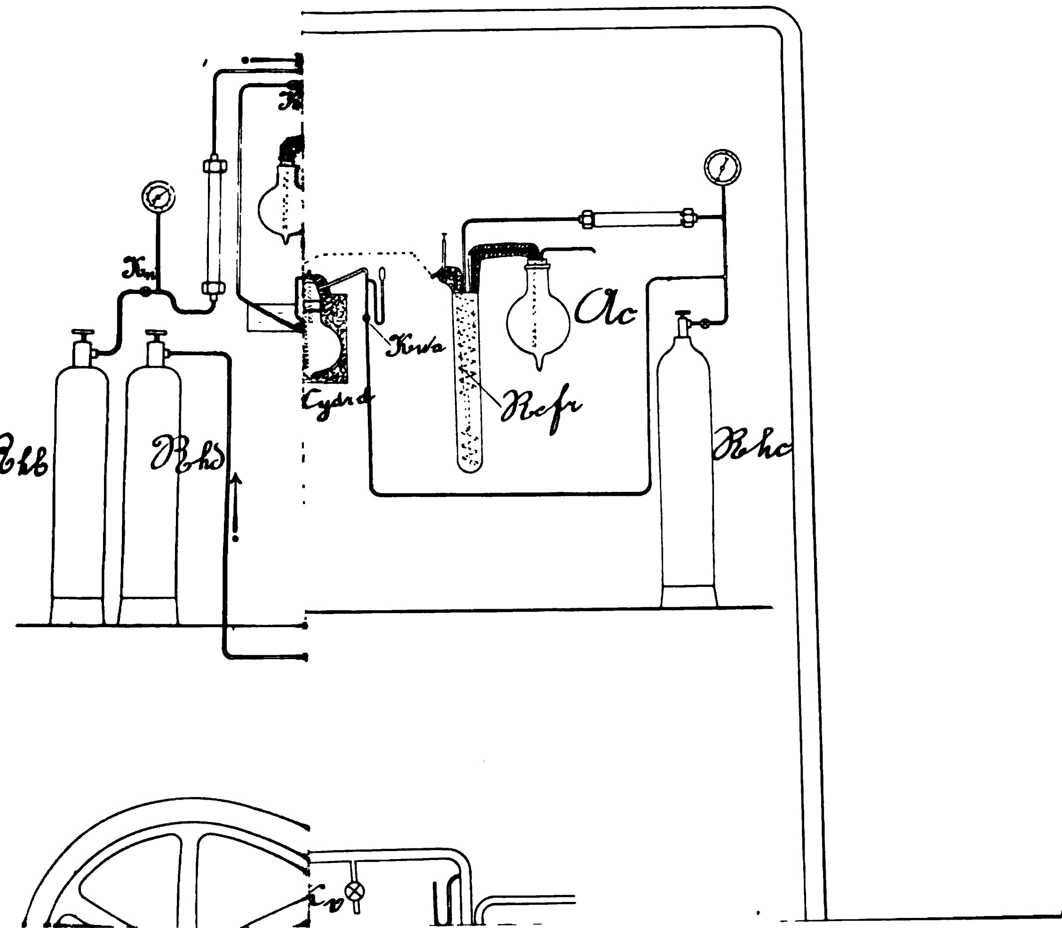
b. Uit den cryostaat ontwijkt de verdampte waterstof langs U_{27} naar den compressor 𝔊 Pl. II, die ook als vacuumpomp kan dienen en dan veiligheidshalve door 𝔥 en *Kf* bij de gestippelde aankoppeling *Kf* het mogelijkerwijze iets verontreinigde gas in de afzonderlijke bus $\mathfrak{R}hd$ opbergt, of ook langs Y_{22} en *Kpe* of *Kpd* naar de gashouders *Gaz a* of *Gaz b*.

XI. *Het zuiveren van waterstof voor den cyclus.*

a. Hierover is reeds in Med. n°. 94*d* IX gehandeld. Ten einde steeds gemakkelijk zuivere waterstof te kunnen verkrijgen, om onvermijdelijke verliezen goed te maken, en om verder bevrijd te worden van de vrees voor verlies van zuivere waterstof, die anders allicht van het ondernemen van sommige proeven af zou schrikken, is een blijvende inrichting voor de zuivering, volgens het beginsel van IX gemaakt. De zuiveringstoestel is op Pl. IV afgebeeld en op Pl. II bij 𝔍 terug te vinden.

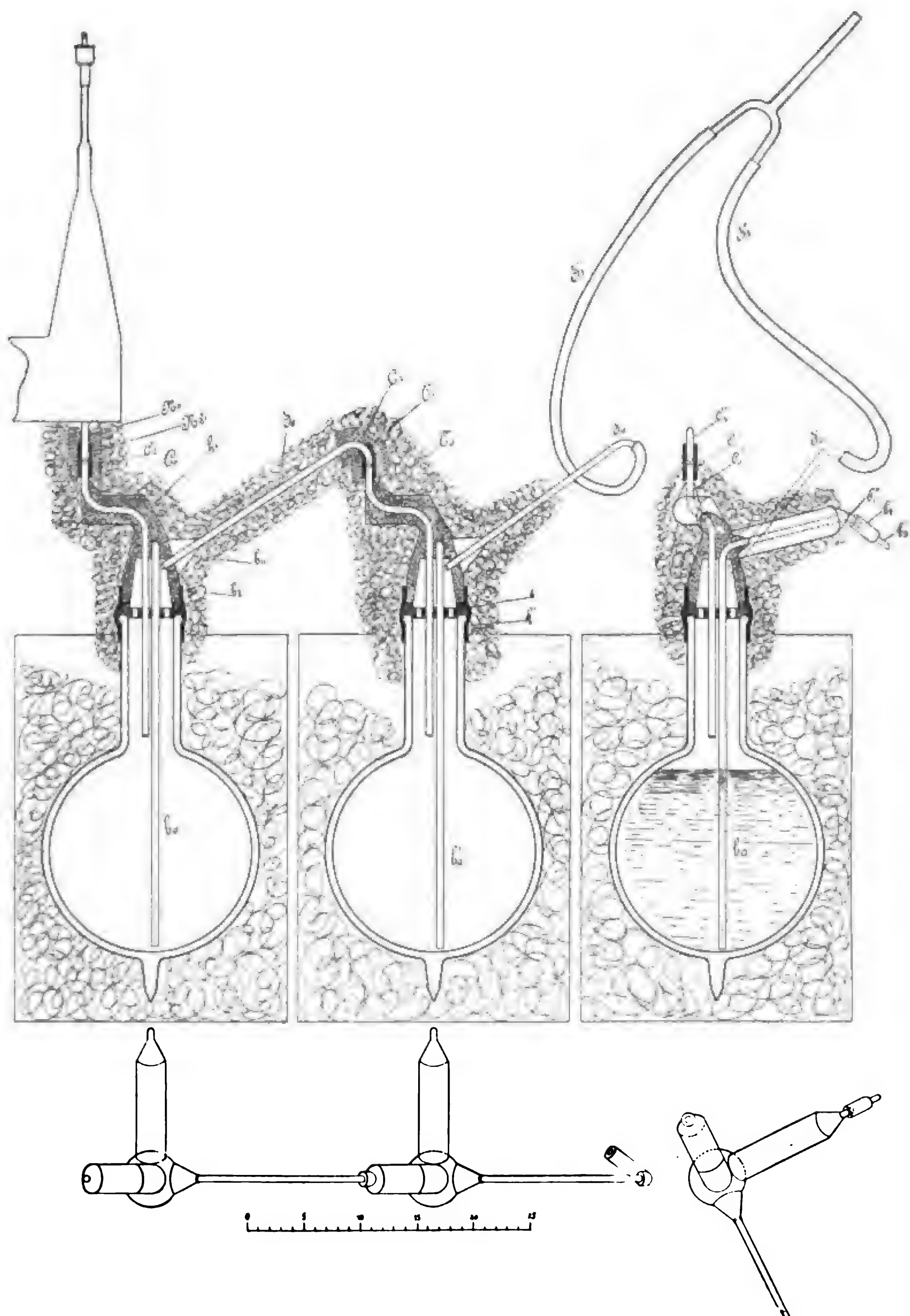
De onzuivere waterstof uit $\mathfrak{R}hb$ wordt door *Kn* langs een droogbuis toegelaten in een regeneratorslang (zie Pl. IV), bestaande uit twee concentrische in elkaar gesloten buizen, waarvan de buitenste *a* voor aanvoer, de binnenste *b* voor afvoer dient. Buiten den toestel zijn *a* en *b* gescheiden a_0 en b_0, binnen den toestel zet van *c* af, *a* zich voort als a_1 en vervolgens als de spiraal a_2 om te eindigen boven




Ac
Refr
Rhc
Rhd
Cydr

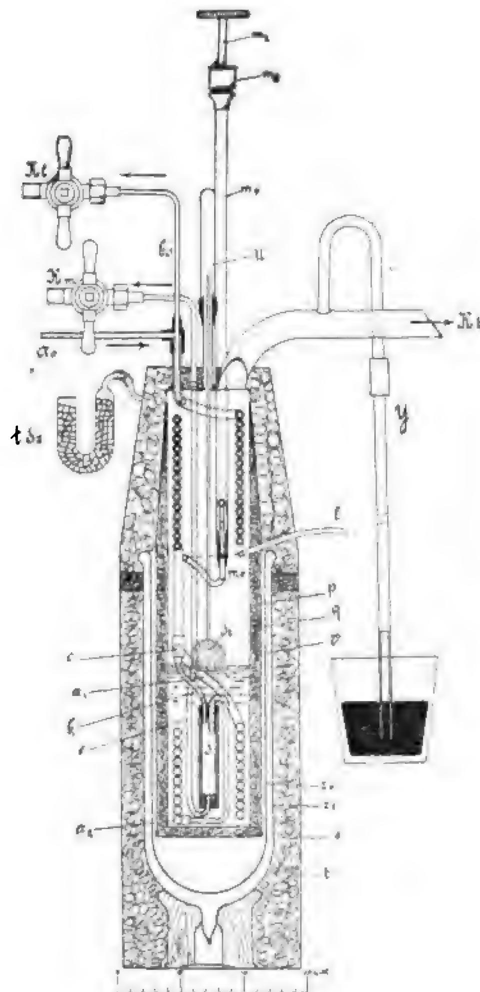
H. KAMERLINGH ONNES. Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium. X. Het verkrijgen van baden van standvastige en gelijkmatige temperatuur met behulp van vloeibare waterstof.

Pl. III.



H. KAMERLINGH ONNES. Methoden en hulpmiddelen in gebruik bij het cryogeen laboratorium. XI. Het zuiveren van waterstof voor den cyclus.

Pl IV.



in het scheifleschje d, waaruit het gas door b_1, de als vloeistof afgescheiden verontreinigingen van de waterstof langs e en Km (verg. Pl. II) ontwijken. De vloeibare lucht, met welke men de koelslang en het scheifleschje afkoelt, wordt langs l en het kraantje m aangevoerd (en uit het vacuumglas 𝔄b Pl. II overgezogen); een drijver dr wijst den stand van de vloeibare lucht aan. De verdampende lucht wordt door de vacuumpomp 𝔉 (Pl. II) weggezogen langs Kt. De refrigeratorbak p is tegen warmtetoevoer beschermd door een dubbelen wand q van nieuwzilver met kapok-vulling v, waarvan het onderste deel gedompeld is in een vacuumglas r_1, terwijl het geheel omhuld is met een laag kapok binnen een dichtgeplakte en geverniste omhulling t van bordpapier op dezelfde wijze als bij den waterfstofliquefactor, terwijl de onder kwik uitmondende glazen buis Y tevens dient om den druk af te lezen, waaronder de verdamping plaats heeft.

Het kraantje Km stelt men zoo, dat men eenige flesschen van bekenden inhoud meer van het afgeblazen gas opvangt, als volgens de analyse door de in het gas aanwezige verontreiniging zou worden gevormd. Op deze wijze brengt men de waterstof tot op een zuiverheid van $^1/_{20}$ °/₀. Zij wordt langs Kl naar de gashouders gevoerd door 𝔊 en 𝔥 samengeperst in 𝔎hd.

b. Een tweede zuivering verkrijgt men op de volgende wijze. Heeft men met den liquefactor met zuivere waterstof gewerkt, zoo laat men telkens na afloop der proeven een deel van dit nog niet geheel zuivere gas daarin toe. Na eenigen tijd, gewoonlijk nadat vier Liter vloeibare waterstof gevormd is, verstopt de kraan. Zoodra het noodig wordt deze herhaaldelijk heen en weer te bewegen — door Travers en Olszewski vermeld als voortdurend noodig, door mij echter steeds als een bewijs beschouwd, dat de toestel op het punt is meer en meer in het ongereede te geraken — wordt het werk gestaakt en de kraan M (Pl. I) gesloten, waarna $\mathfrak{D}_a$ en $\mathfrak{D}_b$ (Pl. II) langs K_a en K_g naar de gashouders afgeblazen worden en men ook K_c sluit. De vloeibare waterstof laat men na overhevelen verdampen en in den gashouder voor zuivere waterstof overgaan. De verontreiniging vindt men terug, wanneer men bij gesloten M en K_c terugkeert tot de gewone temperatuur en het gas analyseert, hetgeen in $\mathfrak{D}$, tot hoogen druk is gekomen. Zoo noodig wordt de gezuiverde waterstof nog een tweede maal aan dit procédé onderworpen.

Door na het werken met den liquefactor met zuivere waterstof telkens nog een tijdlang voorloopig gezuiverde waterstof van $^1/_{20}$ °/₀ toe te laten en op het verwijderen van de verontreiniging te letten, verkrijgt en onderhoudt men langzamerhand zonder moeite een voldoende hoeveelheid zuivere waterstof.

XII. *Cryostaat in het bijzonder voor temperaturen van — 252° tot — 259°.*

§ 1. *Beginsel.* In § 1 werd medegedeeld dat het weliswaar gelukt was in den cryostaat van Med. N°. 94ᵃ VIII een bad van waterstof af te schenken en daarin te onderhouden, alsmede daarin metingen te verrichten, doch dat het vacuumglas daarna sprong. Het was alleen aan een toeval te wijten, dat de meettoestellen, in welke het werk van geheele serien van waarnemingen opgehoopt was, na verwijdering van de scherven en het gruis van het vacuumglas, nog ongedeerd te voorschijn kwamen. Bij de thans te beschrijven inrichting behoeft men een tegenspoed, als toen een oogenblik dreigde, niet meer te vreezen. Ik heb daarbij het bad tegen warmtetoevoer beschut door den eigen damp. De nieuwe toestel herinnert in vele opzichten aan dien, welken ik gebruikte om een bad van vloeibare zuurstof te verkrijgen, toen de vacuumglazen nog niet bekend waren, ja zelfs is de kookkast van den toenmaligen toestel opgeofferd om den thans beschreven toestel te bouwen.

De voornaamste oorzaak van het springen van vacuumglazen, waarop door mij in verschillende Mededeelingen steeds als een gevaar voor het brengen van kostbare toestellen in vacuumglazen gewezen is, zijn de groote spanningen, die bij de groote temperatuurverschillen van binnen en buitenwand ontstaan en die zich voegen bij de toch reeds aanwezige spanningen tengevolge van het vacuum. Aan den invloed van die spanningen was het bijv. toe te schrijven, dat alleen bij het tusschenlasschen van een metalen veer, de in Med. N°. 85, Juni '03 beschreven vacuumbuizen de afkoeling met vloeibare lucht konden doorstaan. Van tijd tot tijd komt het voor dat een vacuumkolf in gebruik voor vloeibare lucht schijnbaar zonder aanleiding springt en de wijde vacuumcylinders zijn bij dezelfde afkoeling nog minder te vertrouwen dan de kolven. Bij de zooveel sterkere afkoeling met vloeibare waterstof neemt het gevaar van springen nog toe. Door gewoonte wordt men ertoe geneigd een gevaar te vergeten, doch men moet er zich eerder over verwonderen dat een glas als gebruikt voor den cryostaat in Med. N°. 94ᵃ VIII, gevuld met vloeibare waterstof *niet* springt, dan wanneer dit wel het geval is.

In den nieuwen cryostaat Pl. V is de oorzaak van het springen van het vacuumglas zooveel mogelijk weggenomen en wordt zoo het toch mocht bezwijken, voorkomen dat de meettoestellen in het bad daarbij beschadigd zullen worden. De waterstof wordt niet onmiddellijk in het vacuumglas $B'o_1$ gestort, maar in een glazen beker *Ba*, die in het vacuumglas wordt geplaatst (verg. Med. N°. 23, Jan. '96

§ 1 slot) doch daarvan gescheiden door een nieuwzilveren bakje, dat als het ware een voering ervan vormt (verg. X, *L* Pl. I). Verder wordt de verdampte waterstof langs de buitenzijde van het vacuumglas $B'o_1$ geleid. Ten einde ook bij gereduceerden druk te kunnen werken en elke bijmenging van lucht bij de gebruikte zuivere waterstof uit te sluiten, is het geheele bad geplaatst in een stevige cylindrische koperen kast *Ub*, die luchtledig gepompt kan worden.

De thans beschreven cryostaat is in 't bijzonder voor waterstof geschikt, doch vervangt met voordeel de tot nog toe beschrevene, wanneer het ten minste niet noodig is te zien wat binnen het bad geschiedt. Een gewijzigden vorm, die dit op de wijze van den cryostaat met vloeibare zuurstof in Med. N°. 14, Dec. '94 toelaat, hoop ik eerlang te beschrijven.

Men kan in den te beschrijven cryostaat, evenals in den vorigen, zonder iets aan de opstelling van de meettoestellen te veranderen met de laatste alle temperaturen van — 23° tot — 90° met chloormethyl, van — 103° tot — 160° met aethyleen, van — 183° tot — 217° met zuurstof en van — 252° tot — 259° met waterstof doorloopen (alleen voor temperaturen tusschen — 160° en — 180° is methaan nog noodig).

§ 2. *Beschrijving.*

a. De nieuwe cryostaat is afgebeeld op Pl. V. De letters zijn, voor zoover de deelen dezelfde beteekenis hebben, dezelfde als die gebruikt zijn bij de beschrijving der andere cryostaten; gewijzigde deelen zijn door nieuwe accenten en nieuwe deelen door analoge letters aangegeven, zoodat de toelichtingen bij Med. N°. 83, Med. N°. 94^c en Med. N°. 94^d omtrent het verkrijgen van gelijkmatige en standvastige temperaturen, waarop ik voor 't overige verwijs, ook hier onmiddellijk kunnen dienen. Op Pl. II is aangegeven hoe de cryostaat in den waterstofcyclus is opgenomen. Onder X § 7 is beschreven hoe de vloeibare waterstof in den cryostaat wordt gebracht. Men vergelijke verder deze plaat, vooral wat het regelen van de temperatuur betreft met Pl. VI van Med. N°. 83 Febr. '03. In plaats van *Bu Vac* op die laatste plaat, treedt hier (zie Pl. II van de Med. van heden) de compressor 𝔖 als vacuumpomp op.

b. De meettoestellen (voorgesteld is als op de plaat bij Med. N°. 94^a VIII, de vergelijking van een thermoelement en een weerstandsthermometer) bevinden zich binnen den beschermenden cylinder ξ_0 van den roertoestel. Deze wordt op zijn plaats gehouden door 4 glazen buisjes ξ_{40} waaromheen komvormige koperen busjes ξ_{41} en ξ_{42} aan het einde van de stangetjes grijpen.

De beker *Ba*, die het bad van vloeibare waterstof bevat, wordt gedragen door een nieuwzilveren drager Ba_2 in welks cylindervormigen rand, Ba_0 het glas juist past, en wordt daarbij op zijn plaats gehouden door vier in de figuur niet afgebeelde, van Ba_0 uit afdalende en onder den bodem van *Ba* zich vereenigende, platte, dunne nieuwzilveren trekbandjes. De ring Ba_0 is de voortzetting van den cylinder Ba_2, waaraan hij door zes versterkte draagribben Ba_1 verbonden is. Aan het boveneinde is hij versterkt met een messingrand Ba_3 met verdikt gedeelte, tegen hetwelk de bovenrand *Ua* van de kast *U* aangedrukt wordt. Op Ba_3 rust verder het deksel N_{01} waarin de stop wordt geplaatst, welke de meettoestellen draagt. Sluiting wordt verkregen door den caoutchoucband (zie verder Med. N°. 83, 94[c] en 94[d]).

c. In de kast *U* hangt het vacuumglas B'_0 waarvan de binnenwand B'_{01} beschermd wordt door het dunne nieuwzilverbakje *Bb*, aan trekbandjes L'_2 en steunende op het houten blokje L'_1. Het cartonnen omhulsel B_4 dwingt de verdampte waterstof, die tusschen de draagbalkjes Ba_1 uittreedt, over het cartonnen scherm B'_{030}, met steunnokjes B'_{031} den door de pijltjes aangegeven weg te volgen om bij T_{12} te ontwijken. De kast is gevoerd met vilt, bedekt met nikkelpapier (verg. med. N°. 14 Dec. '94 en med. N°. 51 Sept. '99).

d. Het opsluiten van vloeibare waterstof binnen een gesloten ruimte, van welke de wanden voor een groot deel op een veel hoogere temperatuur dan de kritische van waterstof zijn, maakt bijzondere veiligheidsmaatregelen noodig. Dat dit geen noodelooze voorzorg is, bleek, toen bij het onverwachts springen van het vacuumglas (zie X § 1) van meer dan 1,5 Liter vloeibare waterstof binnen een paar seconden niets meer te zien was. Dit verdwijnen staat toch gelijk met het plotseling vormen van eenige honderden liters gas, die de kast zouden doen ontploffen indien niet een ruime gelegenheid aan het gas werd aangeboden, om zoodra de druk even boven den atmosferischen stijgt, te ontsnappen.

Dit gevaar wordt bij den nieuwen cryostaat op dezelfde wijze ontgaan als waarop ik het indertijd, toen ik voor het eerst een bad van vloeibare zuurstof in een gesloten toestel wilde afschenken, (zie Med, N°. 14 van Dec. '94) vermeed.

De bodem van de kast *U* is tot een veiligheidsdop van zeer groote afmeting gemaakt; hij sluit als deksel W_2 van geperforeerd koper met versterkte ribben in de met den rand *W* versterkte cylindervormige kast *Ub*. Hierover is aan de buitenzijde (als in de veiligheidsbuizen bij den waterstofliquefactor) een dun caoutchouc blad W_1 — van het koper gescheiden door een blaadje papier, — gespannen, hetwelk bij den geringsten overdruk opzwelt en springt, terwijl verder het

geheele vacuumglas of stukken daarvan, zoo zij uit de kast mochten worden gestooten, het deksel W_2 zonder weerstand voor zich uitdrijven. Daar de luchtdichte sluiting van het caoutchoucblad W_1 op den ring W niet te vertrouwen zou zijn en diffusie door aanraking van het caoutchoucblad met lucht moet worden voorkomen wordt het gebracht in een omgeving van waterstof, door den caoutchouccylinder Wa gespannen op den steunring Ub_4 en het hulpdeksel Wb langs Wc met dit gas te vullen.

De touwen Wd dienen om het hulpdeksel Wb met een bepaalde kracht tegen het veiligheidsblad te drukken nl. zooveel als de overdruk bedraagt, die men om een of andere reden in de kast wil toelaten. Om te zorgen dat het caoutchouc niet afgekoeld wordt, waardoor de inrichting niet aan de bedoeling zou beantwoorden, is de kast naar beneden cylindervormig verlengd met Ub_2 en dit deel tusschen den rand Ub_4 en het hoofddeel van de kast om de afkoeling van den benedenrand te voorkomen van nieuw zilver gemaakt. Het geheele benedenste deel is met lagen vilt en wol opgevuld terwijl nog een roodkoperen flens Ub_3 dient om, door warmtegeleiding van buiten af, den benedenwand tegen afkoeling te beschermen.

e. De waterstof wordt toegevoerd door het nieuwzilveren buisje a, waarop de hevelbuis van een vacuumglas (X § 7) met een eindje caoutchoucslang a'_2 (dat anders met een tap a_4 is gesloten, verg. X § 4 a) wordt bevestigd. Het nieuwzilveren buisje wordt gestoken door een nieuwzilveren zijstuk Ud, dat op de kast vastgesoldeerd en met kapok, tegen gehouden door een papieren buisje Ue, opgevuld is en aan 't eind een steunkurkje Uf draagt. Wanneer het vacuumglas B_0 met de kast U om den beker Ba wordt gebracht, trekt men het buisje a_1 een weinig terug. Is de kast op haar plaats bevestigd dan schuift men het vooruit tot een nokje op a_1 stuit in een uitholling in Ud, zoodat het uiteinde ervan uitsteekt binnen den beker Ba en de waterstof hierin uit kan stroomen. Met het caoutchoucbuisje a_2 verkrijgt men sluiting op a_1 en Ud.

§ 3. *Opmerkingen over het meten met den cryostaat.*

In X § 7 is reeds medegedeeld hoe de voorloopige afkoeling verkregen wordt. In een der proeven werd daarvoor bijv. verbruikt 3 Liter vloeibare lucht en was de temperatuur verlaagd tot —110°. Er werd toen zeer voorzichtig waterstof in den cryostaat overgeheveld, onder voortdurend werken van den roerder; eene hoeveelheid van 5 Liter was voldoende om het bad van 1,5 Liter te verkrijgen. Er verdampte toen verder circa 0,2 Liter per uur. Bij het reduceeren van den druk tot circa 60 mm. verdampte ± 0,2 Liter, daarna bleef de verdamping

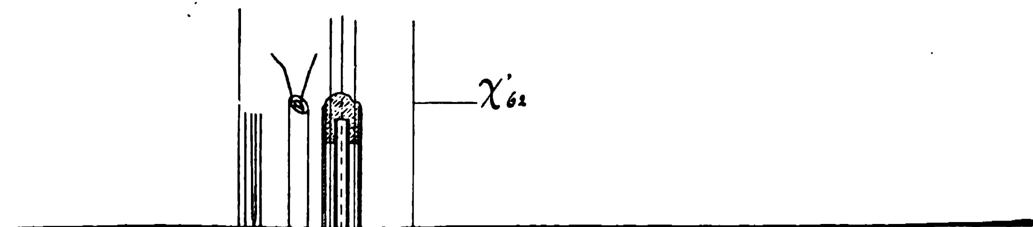
weder ongeveer dezelfde. De temperatuur kon op de in vroegere mededeelingen beschreven wijze tot op 0°.01 constant gehouden worden. De verkregen temperatuurkrommen waren niet minder regelmatig dan die op Pl. III van Med N°. 83 (Dec. '02 en Febr. '03).

Wordt de druk tot op 54 mm. gereduceerd dan wordt het tikken van de kleppen van den roerder van dofferen klank, daar dan vaste waterstof zich af gaat zetten.

XIII. *Bereiding van vloeibare lucht met het Cascadeproces.*

§ 1. *Doeltreffendheid van de regeneratieve cascade methode.* Er bestond tot nog toe geen aanleiding om in een der Mededeelingen uitvoeriger te handelen over de bereiding van vloeibare lucht door het Leidsche cascade-proces. Bij de beschrijving van de bereiding van vloeibare zuurstof (in Med. N°. 24 Dec. '94) werd ook vermeld, dat in 't bijzonder de aethyleenrefrigerator met zorg was geconstrueerd, en dat daarin het beginsel lag, naar hetwelk verschillende cycli, in de *regeneratieve cascade* werkende, kunnen worden uitgevoerd.

Toen de nieuwe chloormethylcirculatie (zie Med. N°. 87, Juli '03) voltooid en de gebrekkige chloormethylrefrigerator door een, volgens het model van de aethyleenkookflesch met toepassing van de opgedane ervaring geconstrueerden, vervangen was, kon men een veel grootere hoeveelheid vloeibare zuurstof, (gemakkelijk 10 Liter per uur) met dezelfde aethyleenkookflesch bereiden. Deze hoeveelheid zal nog aanzienlijker worden, wanneer ook de regenerator in de aethyleenkookflesch, zooveel wordt vergroot als nu weder volgens de ervaring met den nieuwen chloormethylregenerator wenschelijk is gebleken en wanneer de zuigbuis van de aethyleenkookflesch door een wijdere dan oorspronkelijk gebruikt kon worden, vervangen zal zijn. Het tusschenschakelen van een stikstofoxydule- en van een methaancyclus, waaraan in '94 in de eerste plaats gedacht werd, is op den achtergrond getreden toen het ook uit anderen hoofde (verg. XII § 1 slot) wenschelijk bleek vacuumpompen van grooter verplaatsend vermogen aan te schaffen ('96) en de inrichting daarvan voor het werken met zuivere gassen (beschreven in Med. N°. 83, Febr. '03) ze geschikt had gemaakt voor inlassching in den aethyleen- en den chloormethylcyclus (terwijl voor de cryostaten met deze cycli kon worden volstaan). Er konden grootere hoeveelheden zuurstof dientengevolge verwerkt worden, waarvoor (als in '94 reeds aangegeven) een Brotherhood-compressor in gebruik kwam (zie de beschrijving van de inrichting voor het werken met zuiver gas in Med. N°. 51 § 3, Sept. '99). Een afbeelding van de cascademethode in dit stadium is gevoegd


χ'_{61}

bij een beschrijving van het cryogeen laboratorium door H. H. FRANCIS HYNDMAN in „Engineering" 4 Mrt. '04) gegeven.

In die afbeelding is aangegeven hoe van den zuurstofcyclus gebruik gemaakt wordt om de circulatie in den stikstofcyclus, beschreven in Med. N°. 83, Febr. 1903 te onderhouden. Op dezelfde wijze als stikstof wordt ook lucht met den zuurstofcyclus vloeibaar gemaakt. Bij het aftappen stroomt de vloeibare lucht met een flinken straal uit het buisje; per uur wordt circa 9 liter vloeibare lucht opgevangen, zoodat op een dag gemakkelijk een halve hectoliter kan worden bereid.

Vloeibare lucht heeft in 't oog vallende voordeelen boven vloeibare zuurstof, wanneer het er op aankomt groote voorraden te bewaren of om, met in het cryogeen laboratorium vloeibaar gemaakt gas, toestellen in andere localiteiten af te koelen. Alleen waar het op standvastige temperaturen aankomt zal men voor afkoeling aan zuivere zuurstof of stikstof de voorkeur geven en ook dan kan de vloeibare lucht middelaar zijn, want men behoeft de genoemde gassen slechts door een koelslang gedompeld in vloeibare lucht te leiden om bijna evenveel ervan vloeibaar te maken als er lucht verdampt. Geleidelijk heeft dan ook de permanente voorraad van vloeibare lucht, die in het Natuurkundig Laboratorium onderhouden wordt, grooter omvang verkregen, zoodat al sedert jaren geregeld naar binnen- en buitenland op aanvraag onmiddellijk verzonden wordt.

§ 2. *De luchtliquefactor.* De toestel voor de bereiding van vloeibare lucht met behulp van vloeibare zuurstof is in beginsel dezelfde als die, welke voor stikstof dient, doch van grootere afmetingen. (Zie Pl. IV).

Dezelfde letters wijzen overeenkomstige deelen van den (Med. N°. 83, pl. VII) afgebeelden toestel voor 't vloeibaar maken van stikstof aan. Om lucht vloeibaar te maken wordt gewone atmosferische lucht, na door een oplossing van Natriumhydraat van CO_2 te zijn bevrijd, tot op 10 atmosfeeren gecomprimeerd in de spiraal $RgRf$ Pl. VI fig. 1. Deze spiraal ontspruit uit de buis Rq_{00} in het soldeerstuk Rg_{01} en heeft vier takken Rg_1, Rg_2, Rg_3 en Rg_4. Elk dezer buizen heeft een diameter inwendig van 3,5 mM. en uitwendig van 5,8 mM. en is lang 22 M. De spiraal is gewonden in 63 lagen evenals de regeneratorspiraal van den waterstofliquefactor (zie X) en is, met flanel bekleed passend geschoven om de nieuwzilveren buis p_0 in de nieuwzilveren kast p. De 4 windingen vereenigen zich onderaan in eenzelfde soldeerstuk tot de spiraal Rf, lang 8 M., die in een bad van vloeibare zuurstof wordt gedompeld en waaruit de vloeibare lucht door Rf_2 in den opvangtoestel (zie fig. 2) stroomt. Deze bevindt zich naast den hoofdtoestel

(zie fig. 2) en bevat het opvangglas r_0, waarin de vloeibare lucht wordt afgescheiden en waaruit zij wordt afgetapt door het hevelbuisje. Het opvangglas is met een drijver *dr* voorzien. Bij het werken ziet men dezen vrij snel regelmatig stijgen.

§ 3. *Verdere verbetering.* Er zoude aan de regeneratieve cascade nog allerlei te verbeteren zijn voor het beginsel ervan ten volle verwezenlijkt is en deze of gene verbetering, in een der cycli aangebracht, ook overal in de andere teruggevonden wordt, en het rendement tot een maximum is opgevoerd; doch dit is meer van technischen aard. De beschikbare tijd wordt liever aan andere vraagstukken gewijd, daar de regeneratieve cascade voldoende vloeibare lucht geeft. Voldoende, maar niet te veel, daar voor het werken met vloeibare waterstof (zie X) naast andere onderzoekingen op cryogeen gebied het van groot belang is te beschikken over zulke betrekkelijk overvloedige voorraden vloeibare lucht als de Leidsche cascade levert.

XIV. *Bereiding van zuivere waterstof door distillatie van minder zuivere.*

Het lag voor de hand om de zuivere waterstof ten behoeve van de vulling van thermometers en piëzometers[1]) te verkrijgen door vloeibare waterstof onder verlaagden druk over te laten distilleeren[2]) en de op deze wijze verkregen zeer zuivere vloeistof weder te laten verdampen. Daartoe is het volgende toestelletje (Fig. 4) ingericht.

Het vacuumglaasje *A* wordt aan den liquefactor zie Pl. I en III bij N_8 of aan een voorraadflesch verbonden, luchtledig gepompt en als aan-

[1]) In Med. N⁰. 94*e* (Juni '05) werd aangegeven, dat eene zuivering door samenpersing gepaard aan afkoeling voor waterstof nog nadat deze in den ontwikkelingstoestel (Med. N⁰. 27, Mei '96 en Med. N⁰. 60, Juni 1900) over P_2O_5 geleid was van nut kon zijn. Ik had daarbij vooral opnemen van waterdamp op het oog daar bij eene goede uitvoering het gas, ten minste tot merkbare dampspanning, niet anders dan H_2O en SO_4H_2 kan bevatten. Hoe volledig de bevrijding van waterdamp op deze wijze kan zijn, blijkt uit een berekening van Dr. W. H. Keesom, waarbij gebruik gemaakt is van de formule van Scheel Verh. D. ph. G. 7. p 391. 1905 en waaruit voor de spanning van waterdamp (boven ijs) volgt 10^{-19} mM., zoodat water volledig wordt achtergehouden als het gas lang genoeg in den toestel blijft. Hetzelfde geldt van alle stoffen met hooger kookpunt dan water (SO_3 dampen, vetdampen enz.). Ook om deze stoffen tegen te houden is de bewerking wenschelijk. Wat nu een alleen door water verontreinigd gas betreft, zoo zal daarin, wanneer het in een stroom van 3 Liter per uur door eene buis van 2 cM. diameter en lang 8 cM. over P_2O_5 wordt gevoerd, niet meer dan 1 mGr. per 40000 Liter overblijven (Morley, Amer. Journ. of Sc. 3 Ser. 34 o. 149, 1887). Deze hoeveelheid van 1 mGr. is waarschijnlijk slechts voor een klein deel water (Morley. Journ. d. ch. phys. 3. p. 241 1905). Volstrekt noodig zou dus de aangegeven bewerking, althans wat waterdamp betreft, niet zijn wanneer men zeker was van voldoende aanraking met het P_2O_5. Zij neemt echter de onzekerheid weg, die daaromtrent blijft bestaan.

[2]) Dit is eene voor de hand liggende uitwerking van wat Dewar aangeeft. Proc. Chem. Soc. 15, p. 71, 1899.

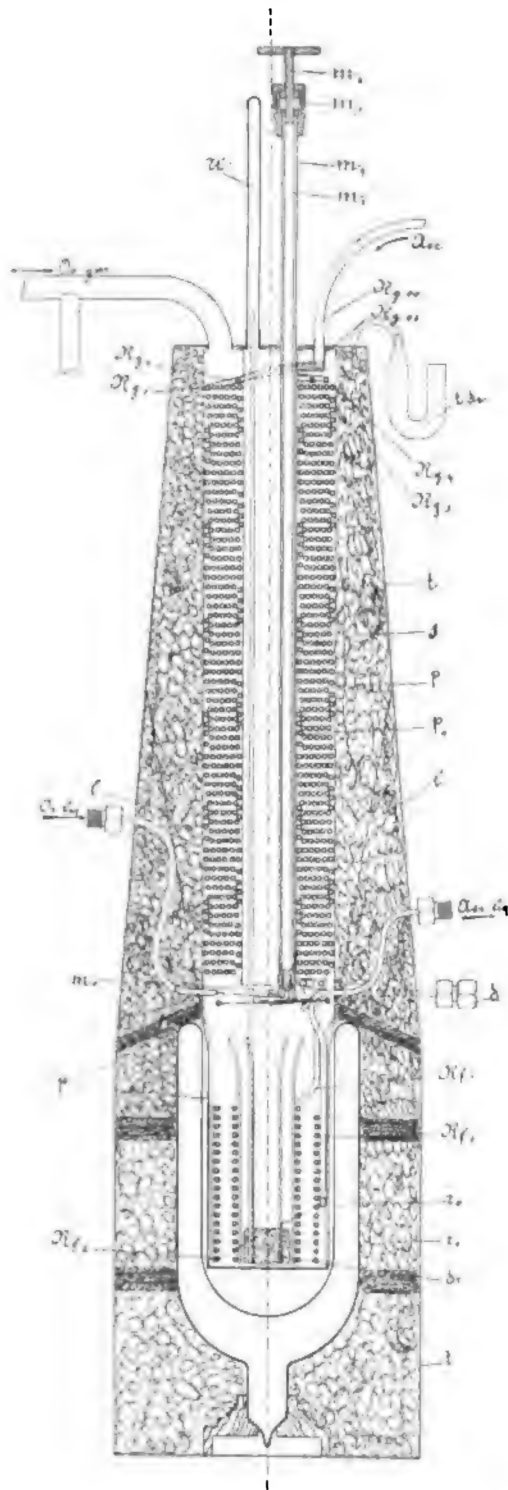


Fig. 1.

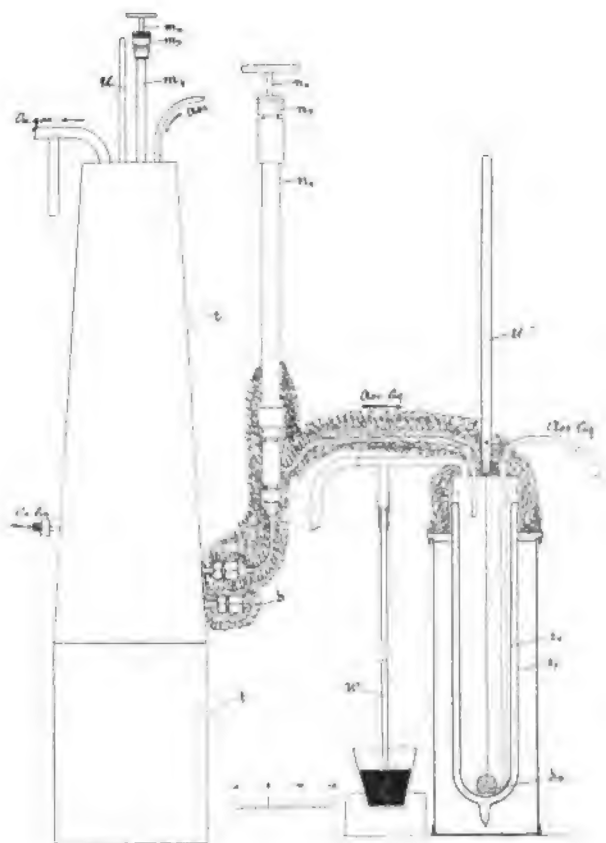


Fig. 2.

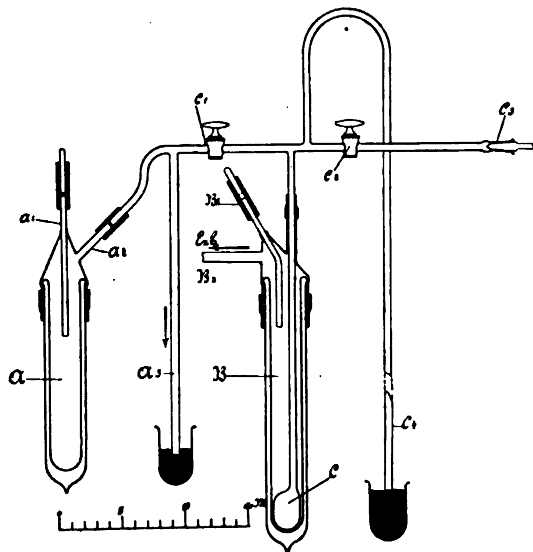


Fig. 4.

gegeven in X § 7 gevuld met vloeibare waterstof. Vervolgens wordt C in het vacuumglaasje B (dat vooraf luchtledig gepompt is) eenige malen van uit A gevuld, en het vacuumglaasje B met B_1 aan den liquefactor verbonden, en evenals A leeggepompt en eveneens met vloeibare waterstof gevuld, en bij B_2 met de gewone luchtpomp verbonden, zoodat de waterstof in B bij 60 m.m. kookt. Men laat dan in het reservoir C waterstof langs c_1 overdistilleeren, sluit c_1 en koppelt het caoutchoucslangetje bij a af en brengt den geheelen toestel over naar de meettoestellen, die men met zuivere waterstof vullen wil, waartoe de toestel bij c_2 met de voor dit doel bestemde kwikluchtpomp verbonden wordt. Ten einde te zorgen dat de waterstof in B slechts langzaam verdampt en die in C dus niet verloren gaat voor men tot het vullen van de toestellen wil overgaan, wordt B in een vacuumglas met vloeibare lucht geplaatst.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N° 95[a] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer.*”

§ 1. *Inleiding.*

De in het volgende medegedeelde metingen vormen een deel van eene reeks, die reeds lang geleden werd ondernomen met het oog op het verkrijgen van zooveel mogelijk onafhankelijke en onderling controleerbare gegevens over de betrouwbaarheid van de bepaling

van lage temperaturen. Daartoe bestond het plan een thermo-element [1]), een goud- en een platina-weerstandsthermometer [2]) elk voor zich met twee gasthermometers en verder onderling te vergelijken, terwijl de afwijking der gasthermometers door een differentiaalthermometer [3]) zou worden bepaald. Oorspronkelijk was naast waterstof, stikstof gekozen, voor de stikstof kwam later helium in de plaats. Van al deze metingen zijn, tengevolge van herhaling bij steeds aangebrachte verbeteringen, nog slechts cijfers medegedeeld, die betrekking hebben op den goud- en den platina-weerstandsthermometer [4]), en ook deze, welke in Med. 95[c] door andere vervangen worden, hebben alleen beteekenis, voor zoover zij aantoonen, dat de gevolgde methode tot de gewenschte nauwkeurigheid kan voeren. De door ons, wat bovengenoemd thermo-element betreft, verkregen uitkomsten beantwoorden ook nog niet in alle opzichten aan de gestelde eischen; intusschen scheen het toch wenschelijk ze te publiceeren, daar de temperatuurbepalingen bij verschillende metingen, over welke binnen niet al te langen tijd mededeelingen zullen worden gedaan, met dit thermo-element zijn verricht.

§ 2. *Vergelijkingen door andere waarnemers.*

a. Constantaan-ijzer elementen, zijn alleen door HOLBORN en WIEN[5]) en LADENBURG en KRÜGEL [6]) met den waterstofthermometer vergeleken. De calibratie der beide eerstgenoemde onderzoekers berust op eene vergelijking bij twee punten nl. in vast koolzuur en alcohol (waarvoor —78°.3 opgegeven wordt) en in vloeibare lucht (waarvoor zij —189°.1 vonden). Zij meenen de temperatuur door de formule

$$t = aE + bE^2$$

voor te kunnen stellen, en vermelden, dat bij een controlewaarneming in kokende zuurstof (— 183°.2 bij 760 m.m. kwikdruk) een goede overeenstemming verkregen werd.

LADENBURG en KRÜGEL vinden HOLBORN en WIEN's formule onvoldoende en stellen voor

$$t = aE + bE^2 + cE^3.$$

Zij vergelijken het thermo-element met den waterstofthermometer bij 3 punten, nl. vast koolzuur met alcohol, kokend aethyleen en

1) Zie Med. N°. 27 en 89. (Versl. Kon. Ac. 30 Mei 1896, 27 Juni 1896 en 28 Nov. 1903).

2) Zie Med. N°. 77 en 93. (Idem 22 Febr. 1902 en 25 Juni 1904).

3) Zie Med. N°. 94[c]. (Idem 27 Mei 1905).

4) Zie Med. N°. 93. (Idem 25 Juni 1904).

5) Sitz.ber. Ac. Berlin. Bd. 30, pg. 673, 1896, en Wied. Ann. Bd. 59, pg. 213. 1896.

6) Chem. Ber. Bd. 32, pg. 1818. 1899.

vloeibare lucht. Ter controle bepalen zij het smeltpunt van ether (— 112°), waarbij zij eene afwijking van 1° vinden. Hiermede stellen zij zich tevreden.

ROTHE [1]) kon slechts tot eene indirecte vergelijking met den waterstofthermometer geraken. Hij vergeleek zijne thermo-elementen constantaan-ijzer bij — 79° met den alcoholthermometer, dien WIEBE en BÖTTCHER [2]) aan den gasthermometer hadden aangesloten en bij — 191° met een platina-weerstandsthermometer, die bij ongeveer dezelfde temperatuur door HOLBORN en DITTENBERGER [3]) in de Phys. Techn. Reichsanstalt met den waterstofthermometer vergeleken was.

De thermostaat was zeer gebrekkig; afwijkingen in de temperatuur van 0°.4 tot 0°.7 kwamen binnen 10 minuten voor. (Verg. wat dit betreft § 7). Daar ROTHE zich tot twee punten bepaalde, moest hij zich met eene quadratische formule tevreden stellen en berekende hij dezelfde formule als HOLBORN en WIEN.

Uit de medegedeelde cijfers voor andere temperaturen is alleen af te leiden, dat de onderlinge verschillen van de afwijkingen der verschillende thermo-elementen constantaan-ijzer en constantaan-koper van hunne quadratische formules een paar tiende graden konden bedragen. Omtrent de aansluiting bij den waterstofthermometer blijkt niets. Op het vraagstuk, waarmede wij ons bezig houden, heeft dit onderzoek verder geen betrekking.

b. Onder de thermo-elementen van andere samenstelling vermelden wij dat van WROBLEWSKI [4]), die zijn nieuw-zilver-koper element bij + 100° (water), — 103° (aethyleen onder atmospherischen druk kokend) en — 131° (aethyleen onder gereduceerden druk kokend) met den waterstofthermometer vergeleek en hieruit eene cubische formule voor *t* berekende. Hij toetste deze door de kookpunten van zuurstof en stikstof te bepalen, en vond een overeenstemming binnen 0°.1 met den waterstofthermometer. Daar echter WROBLEWSKY voor het kookpunt van zuivere zuurstof bij 750 m.M. druk 181°.5 vond, is aan de door hem vermelde overeenstemming geene waarde te hechten.

Het onderzoek van DEWAR [1]) over het element platina-zilver had voorloopig enkel ten doel na te gaan of dit element geschikt is, voor het meten van temperaturen bij — 250° en daar beneden (waar de gevoeligheid van den weerstandsthermometer belangrijk vermindert), en heeft zich bepaald tot het bewijs, dat dit werkelijk het geval is.

---

[1]) Ztschr. für Instrumentenk. Bd. 22 pg. 14 en 33. 1902.

[2]) „ „ „ Bd. 10 pg. 16. 1890.

[3]) Drude's Ann. Bd. 6 pg. 242. 1901.

[4]) Sitzungsber. Ac. Wien Bd. 91. pg. 667. 1885.

c. Er is dus nog geen onderzoek verricht, hetgeen, gelijk het in deze mededeeling bevatte, de gelegenheid geeft te beoordeelen in hoeverre thermo-elementen voor de nauwkeurige bepaling van lage temperaturen (b.v. tot op $^1/_{20}{}^\circ$ nauwkeurig), geschikt zijn, alsmede door welke formule en met hoeveel punten van calibratie een willekeurige temperatuur in een aangegeven gebied tot op dit bedrag kan worden bepaald.

§ 3. *Wijzigingen in de thermo-elementen en hulptoestellen.*

Wij vermelden hier eenige wijzigingen en verbeteringen, die in § 1 van Med. N°. 89 nog niet beschreven zijn. De eerste twee (*a*. en *b*.) zijn bij het element waarmede de volgende metingen zijn verricht, ook niet aangebracht, doch zij zijn sedert dien bij andere elementen toegepast, en worden daarom volledigheidshalve vermeld.

a. Let men er op, dat het thermo-element bij verschillende metingen niet altijd onder dezelfde omstandigheden gebruikt wordt, b.v. niet tot op dezelfde diepte in het bad wordt gedompeld enz., en dat, al geschiedt dit ook al, de tijd gedurende welke dit bij gelijkblijvende temperatuur het geval is, niet altijd zoo lang zal zijn, dat in beide gevallen dezelfde verdeeling der temperatuur in de metaaldeelen van het element zal zijn verkregen, dan blijkt het van 't grootste belang er voor te zorgen, dat de temperatuur van de soldeerplaats, die door de electromotorische kracht wordt gegeven, van die van het oppervlak van het koperen beschermingsblokje d.w.z. die van het bad zoo weinig mogelijk en in alle gevallen slechts zeer weinig verschilt.


Fig. 1.

De constructie van de contactplaats, in fig. 1 afgebeeld, biedt daarvoor meer waarborg, dan die op Plaat I van Med. N°. 89. De draden *a* en *b* zijn gesoldeerd op den bodem van kleine holten *c*, die in het beschermingsblokje zijn uitgeboord, en zijn elk door een dunwandig glazen buisje geïsoleerd. Is de constructie van Plaat I Med. N°. 89 niet volgens de bedoeling uitgevoerd (doorzagen van proefstukken bewijst in hoeverre men daarin geslaagd is) en bevindt zich dus de soldeerplaats op eenigen afstand van het bovenvlak van het blokje, zoo kan men gemakkelijk berekenen, dat ten gevolge van de warmtegeleiding langs de draden, wanneer het thermo-element in vloeibare zuurstof gedompeld is, zelfs wel een graad temperatuursverschil tusschen de contactplaats en het blokje kan bestaan.

---

1) Proc. R. S. Bd. 76, pg. 317. 1905.

Bij wijziging in de omstandigheden, waaronder het element wordt gebruikt, zal dit verschil eene andere waarde aannemen en komt er dienovereenkomstig onzekerheid in de bepaling van de temperatuur van het blokje. Allicht zal dan ook eene traagheid in de aanwijzingen van het element worden waargenomen.

Ofschoon deze constructie (fig. 1) (die een blokje van grootere dikte eischt dan die volgens Med. N°. 89, Plaat I) bij het gebruikte element niet is toegepast, behoeven wegens de groote zorg, waarmede dit laatste geconstrueerd is, onzekerheden uit dien hoofde niet gevreesd te worden.

b. Worden temperaturen, lager dan —253° bepaald, zoo zou in plaats van de in § 1 van Med. N°. 89 vermelde vulling met waterstof, eene met helium kunnen treden.

c. De glazen buizen der kwikcommutatoren, beschreven in Med. N°. 27, zijn niet meer in kurken (zie Pl. IV, fig. 4, *k*) maar in paraffine gevat, ten einde een volkomen isolatie te verkrijgen, die blijkens ervaring door den glaswand niet gewaarborgd wordt. De buisjes zijn bij de insmeltplaats der platinadraden c_1 c_2 c_3 en c_4 verder

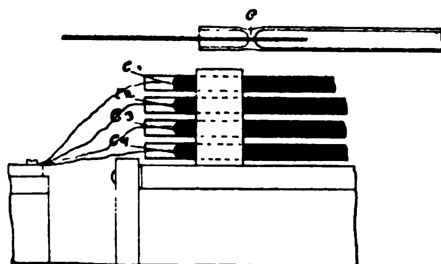


Fig. 2 en 3.

verlengd, (zooals afgebeeld in fig. 2 en 3), ten einde het vroeger dikwijls voorkomende afbreken der platinadraden tegen te gaan.

d. De platinadraden der Westonelementen werden geamalgameerd door koken met kwik, (welke methode sedert door die met den electrischen stroom vervangen is [1])). De elementen zelve hebben zich al de jaren uitstekend gehouden.

e. Niettegenstaande alle voorzorgen beschreven in Med. N°. 89, blijven er toch thermo-electromotorische krachten in de draden over, die bij het groote temperatuursverschil op verschillende punten van eenzelfden draad zonder twijfel een meetbaar bedrag hebben. Wanneer er echter voor gezorgd wordt, dat de omstandigheden, waaronder het element gebruikt wordt wat de temperatuur langs de draden betreft, nagenoeg dezelfde zijn als die bij de calibratie, zal toch aan

---

[1]) Vgl. JAEGER, Die Normalelemente, pg. 57.

een bepaalde temperatuur van het koperen blokje een bepaalde waarde van de electromotorische krachten beantwoorden. Er wordt niet beoogd de electromotorische kracht van de combinatie der metalen, die bij de soldeerplaats in aanraking met elkaar zijn, nauwkeurig te bepalen, maar enkel, dat een bepaalde electromotorische kracht bij een bepaalde temperatuur van het bad, waarin het element gedompeld wordt, nauwkeurig wordt aangewezen. (Verg. overigens § 5).

Ten einde den invloed der warmtegeleiding langs de draden bij de soldeerplaats nog te verminderen zal bij nieuwe elementen de proef genomen worden met het onderbreken van de glazen buis 2 cM. boven den koperen rand van het koperen blokje door een aan weerszijden aan de glazen buis gesoldeerde kopere buis, 5 cM. lang, die in het bad onder de vloeistof gedompeld blijft.

§ 4. *Voorzorgen bij de metingen van de electromotorische krachten.*

a. De in § 3 van Med. N°. 89 beschreven toestellen en schakelingen zijn geheel opgesteld op paraffine, waarmede ook de omhullende deelen van de toestellen geïsoleerd zijn. Niet van paraffine-isolatie voorzien zijn alleen de draden, die tusschen de verschillende vertrekken loopen en die op porceleinen dragers, van welke de hooge isolatie-weerstand herhaaldelijk is gecontroleerd, gespannen zijn. De ijspotten hangen op porceleinen isolatoren. Alle deelen der opstelling werden natuurlijk, voor zij in gebruik genomen werden, zorgvuldig wat hunne isolatie betreft onderzocht.

b. De noodzakelijkheid van het voortdurend aanstampen van het ijs in de ijspotten, werd reeds in Med. N°. 89 betoogd.

c. De stopcommutatoren zijn van roodkoper. Alle contacten van verschillende metalen in de schakeling zijn zorgvuldig door inpakking in wol of watten, waarvan ze door paraffine geïsoleerd zijn, in kartonnen doozen tegen temperatuursverandering beschermd. Alleen werd dit achterwege gelaten bij de contactplaatsen van de roodkoperen toeleidingsdraden met de messing-klemmen der weerstandsbanken. Om aan de Westonelementen een onveranderlijke temperatuur te waarborgen, is ook voor eene behoorlijke verpakking van deze zorg gedragen. De accumulator is in een houten kist geplaatst.

d. Wat de controle-elementen betreft, werd er op gelet, dat de stoom uit de kooktoestellen (verg. Med. N°. 27, § 8) met een aangenomen standvastige snelheid uitstroomde.

e. Alvorens tot eene meting wordt overgegaan, wordt door kortsluiting in de roodkoperen commutatoren in de geleidingen, die van de thermo-elementen en de Westonbatterij naar de schakeling voeren nagegaan of alle electromotorische krachten in de schakeling zoo

klein en standvastig zijn (niet meer dan eenige microvolts), dat eliminatie door omlegging der verschillende commutatoren volkomen zeker mag geacht worden.

§ 5. *Controle der thermo-elementen.*

Aangetoond werd:

a. dat wanneer alle contactplaatsen in ijs gepakt waren, de electromotorische kracht van het element minder dan één microvolt bedroeg.

b. dat verwisseling der beide contactplaatsen constantaan-staal, zóó, dat nu eens de één, dan weer de andere in den cryostaat geplaatst werd, slechts een zeer gering verschil in electromotorische kracht aanwees. Er wordt echter zorg voor gedragen, dat steeds hetzelfde been in den cryostaat wordt gebracht.

c. dat bij het op- en neerschuiven van de contactplaats in het bad, geen verschil in aanwijzing te bespeuren valt (temperatuursverschil dus zeker $< 0^\circ.02$).

Uit dit alles blijkt, dat de electromotorische krachten, die buiten de contactplaatsen in het element worden opgewekt, uiterst gering zijn.

§ 6. *Correcties en berekeningen van de bepalingen der electromotorische krachten.*

a. R_w R_c R' hebben in het volgende de beteekenis die in Med. N°. 89 § 3 is uiteengezet. E_w, E_c en E' beteekenen de electromotorische krachten resp. van waarnemingselement, controle-element en Westonbatterij. Zijn R_w R_c en R' verkregen zoo volgt:

$$E_w = \frac{R_w}{R_c} E_c \text{ of } E_w = \frac{R_w}{R'} E' .$$

Ter controle dient dan:

$$E_c = \frac{E'}{R'} R_c .$$

b. Om R_w te vinden worden op de stoppen der weerstandsbank afgelezen R'_w (in den tak van kleinen weerstand), en R''_w (in den tak van grooten weerstand), welke naast elkaar geschakeld zijn om R_w te vormen.

α. Temperatuurcorrecties behoefden bij geen der weerstandsbanken (ook niet bij die, welke R_c en R' leveren) te worden aangebracht.

β. Bij R'_w moest soms gevoegd worden de overgangsweerstand der stoppen.

γ. Bij R'_w wordt gevoegd de correctie op internationale ohms volgens de calibratietabel der Phys. Techn. Reichsanstalt.

δ. Bij R''_w wordt gevoegd het bedrag, dat noodig zou zijn om de compensatie volledig te maken, welk bedrag uit de uitslagen van den galvanometer bij twee waarden van R''_w (zie tabel I en IV) wordt berekend.

c. Om R_c te vinden handelt men met R'_c en R''_c, die een overeenkomstige beteekenis ten opzichte van R_c, als R'_w en R''_w ten opzichte van R_w hebben, als met R'_w en R''_w wat betreft de correcties α, β, γ en δ. De hieruit verkregen uitkomst R'''_c geldt voor de temperatuur bij welke het water in den kooktoestel kookt bij den gedurende de waarneming daar heerschenden barometerstand *B*.

ε. R'''_c wordt nu gecorrigeerd tot de waarde, die zij zou hebben bij 760 m.m. kwikdruk op 45° N.B.

d. Om R' te vinden, worden aan den onveranderlijken weerstand R', de boven met γ en δ aangeduidde correcties aangebracht.

e. E', betrekking hebbende op de temperatuur t' van de Westonbatterij, wordt aan de tabel van JAEGER [1]) ontleend.

§ 7. *Overzicht van eene bepaling.* In tabel I zijn opgenomen al de aflezingen, welke voor eene bepaling van de electromotorische kracht dienen, en wel voor die bij — 217° (Zie § 8). Ondersteld wordt, dat gedurende den korten tijd noodig voor de verschillende aflezingen (verg. § 3 van Med. N°. 89) de electromotorische kracht van den accumulator (zie § 4, *c*) constant blijft. Men verzekert zich er verder van, dat de temperatuur in den kooktoestel van het controle-element eene genoegzaam standvastige waarde behouden heeft en dat het gelukt is, [2]) de temperatuur van het bad in den cryostaat tot op 0°.01 standvastig te houden [3]). (zie tabel I).

Op volkomen dezelfde wijze werden op denzelfden waarnemingsdag verkregen de waarden voor de electromotorische krachten vereenigd in Tabel III.

Uit het voorafgaande overzicht kan worden opgemaakt, dat de bepalingen zelfs bij — 217° nog met de gewenschte nauwkeurigheid kunnen worden verricht. Bij — 253° is de gevoeligheid van het element constantaan-staal belangrijk kleiner dan bij — 217°. Het komt ons

---

[1]) JAEGER, Die Normalelemente 1902. pg. 118.

[2]) Vgl. Med. N°. 83, § 5 en Plaat III.

[3]) Bij de aflezing worden ook opgenomen de temperaturen van het vertrek (t_k) en van den galvanometer (t_g); deze zijn van belang wanneer men later, in verband met de gevoeligheid, den weerstand, dien galvanometer en toeleidingsdraden tijdens de waarneming hadden, wenscht te kennen. Wat betreft de vermelding der combinatie $P_3 + Q_2$ bij de controle-elementen kan op Med. N°. 89 § 2 verwezen worden.

TABEL I.

Calibratie van het thermo-element P_1 Contactplaats C in den cryostaat.

6 Juli 1905. Serie XV (zuurstof kokend onder gereduceerden druk) No. 1. Tijd: 3u55'—4u11'.

Waarnemingselement.								Controle-element. Combinatie $P_3 + Q_3$.					
$R'_w = 50+2+1+1.$ $R''_w = 7700.$					$R'_w = 50+2+1+1$ $R''_w = 7200.$			$R'_c = 50+1.$ $R''_c = 3600.$			$R'_c = 50+1.$ $R''_c = 3800.$		
Rheostaat. S. en H No. 15938.								Rheostaat S. en H. No. 15689.					
Galvanometeruitslagen.								Galvanometeruitslagen.					
Commutatoren. elem.	galv.	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts
			64.65			65.55			66.15			66.50	
I	I	64.65			66.60			65.45			64.35		
			64.81			65.63			66.23			66.54	
I	II			65.00			64.85			65.65			67.65
			65.35			65.70			66.35			66.60	
II	I	65.50			67:25			67.80			66.65		
			65.42			65.84			66.43			66.72	
II	II			65.50			64.75			63.60			65.55
			65.50			66 00			66.50			66.80	

Barometerstand 76.14 cm.
(Aneroïde Kipp. 2652)
$t = 19°.4$ (bijbehoorende thermometer)

Westonelementen.						
$R'_1 = 8000.$				$R'_1 = 8004.$		
Rheostaat No. 17161.						
Galvanometeruitslagen.						
comm. Galv.	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts.
		66.80			66.90	
I	67.00			65.80		
		66 84			66.96	
II			66.65			68.20
		66.90			67.00	

$t' = 18°.9$. (Thermometer No. 138)
$t_k = 19°.0$. (» » 86)
$t_g = 18°.8$. (» » 149)

Uit tabel I volgt onmiddellijk

TABEL II.

Correcties en uitkomsten.

Waarnemingselement.	Controle-element.	Westonelementen.
corr. β $R'_w = + 0.001\ \Omega$ corr. γ $R'_w = + 0.0080\ \Omega$ corr. δ $R''_w = + 179\ \Omega$	corr. β $R'_c = + 0.001\ \Omega$ corr. γ $R'_c = - 0.00015\ \Omega$ corr. δ $R''_c = + \cdot 149\ \Omega$	 corr. γ $R'_1 = - 2.4\ \Omega$ corr. δ $R'_1 = + 0.654\ \Omega$
	$R'''_c = 50.3163\ \Omega$	
	Baromet.st.45°N.B.=76.21cM. corr. ε $R'''_c = - 0.0373\ \Omega$	
	Einduitkomsten.	
$R_w = 53.6404\ \Omega$	$Rc = 50.2787\ \Omega$	$R' = 7998.3\ \Omega$
		$t = 18°.8$ $E' = 1.0187$ volt.
$E_w = 6.8312$ milliv. 4u 3'	$E_c = 6.4037$ milliv.	

TABEL III.

	E_w	E_c
	6.8312	6 4037
	6.8308	6.4039
	6.8310	6.4038
Gemiddeld	6.8310	6.4038

echter wel van belang voor, ook van eene zoo lage temperatuur een volledig overzicht der instellingen te geven, om een oordeel mogelijk te maken over 't geen wij daar nog bereikt hebben.

TABEL IV.

Calibratie van het thermo-element P_1, Contactplaats C in den cryostaat.

5 Mei 1906. Serie XXX. (Waterstof, kokend onder atm. druk). No 1. Tijd : $2^u.19'—2^u.28'$.

		Waarnemingselement.						Controle-element. Combinatie $P_3 + Q_2$.					
		$R'_w = 50+5+1+0.5+0.1$ $R''_w = 5200$			$R'_w = 50+5+1+$ $+0.5+0.1$ $R''_u = 5400$			$R_c' = 50+0.5+$ $+0.2+0.1+$ $+0.1$ $R''_c = 5500$			$R'_c = 50+0.5+$ $+0.2+0.1+$ $+0.1$ $R''_c = 5300$		
		Rheostaat S. en H. No. 15398.						Rheostaat S. en H. No. 15689.					
		Galvanometeruitslagen.						Galvanometeruitslagen.					
Commutatoren. elem.	galv.	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts
			39.89			40.32			41.08			41.63	
I	I	39.15			40.83			38.82			38.45		
			39.94			40.38			41.22			41.81	
I	II			39.87			39.16	.		39.84			41.50
			40.05			40.45			41.35			42.02	
II	I	39.85			41.50			42.37			41.80		
			40 17			40.65			41.49			42.15	
II	II			39.70			39.18			36.80			38.65
			40.32			40.90			41.63			42.20	

Barometer 76 77 cm.
(Aneroïde Kipp. No. 2652)
$t = 18°.0$ (bijbehoorende thermometer)

	Westonelementen.					
	$R'_1 = 8000$			$R'_1 = 8004$		
	Rheostaat S. en H. No. 17161.					
	Galvanometeruitslagen.					
comm. Galv.	links	nulp.	rechts	links	nulp.	rechts
		43.10			43.55	
I	42.90			45.20		
		43.34			43.66	
II			43.84			42.28
		43.55			43.78	

$t = 18°.7$ (Thermometer No. 138).
$t_k = 19°.6$ (" No. 96).
$t_g = 19°.2$ (" No 149).

TABEL V.

Correcties en uitkomsten.

Waarnemingselement.	Controle-element.	Westonelementen.
corr. $\beta . R'_w = +0.001\ \Omega$ corr. $\gamma . R'_w = +0.00537\ \Omega$ corr. $\delta . R''_w = +20\ \Omega$.	corr. $\beta . R'_c = +0.001\ \Omega$ corr. $\gamma . R'_c = +0.0084\ \Omega$ corr. $\delta . R''_c = -209\ \Omega$	 corr. $\gamma . R'_1 = -2.4\ \Omega$ corr. $\delta . R'_1 = +0.8\ \Omega$
	$R'''_c = 50.4133\ \Omega$	
	Barom.st. 45° N.B. = 76.82 cM. corr. $\varepsilon\ R'''_c = -0.1459\ \Omega$	
Einduitkomsten.		
$R_w = 55.9981\ \Omega$	$R_c = 50.2644\ \Omega$	$R' = 7998.4\ \Omega$
		$t' = 18°.5$ $E' = 1.0187$ volt.
$E_w = 7.1321$ milliv. 2u24′	$E_c = 6.4075$ milliv.	

§ 8. *De temperaturen.*

a. Het thermo-element werd gebracht in een cryostaat, zooals afgebeeld op de plaat van Med. N°. 94[d], behalve dat daar een piëzometer zich bevindt op de plaats, die bij onze metingen door een waterstofthermometer werd ingenomen. Ten einde eene gelijkmatige verdeeling van de temperatuur in het bad te bevorderen is eene buis van denzelfden vorm en afmeting als het thermo-element symmetrisch daaraan opgesteld. Verg. verder Med. N°. 94[c] § 1. Voor wat het verkrijgen van een standvastige en gelijkmatige temperatuur met dezen cryostaat betreft, verwijzen wij naar Med. N°. 94[d] en de daar aangehaalde mededeelingen. De temperatuurregeling geschiedde met behulp van een weerstandsthermometer. Voor de beide metingen in vloeibare waterstof werd gebruik gemaakt van den cryostaat, beschreven in Med. N°. 94*f*.

b. Met vloeibaar chloormethyl als bad in den cryostaat werden

verkregen de temperaturen — 30°, — 59° en — 88°; met aethyleen — 103°, — 140° en — 159°; met zuurstof — 183°, — 195°, — 205° — 213° en — 217°; met waterstof — 253° en — 259°.

c. De temperaturen zijn gemeten op de schaal van den waterstofthermometer beschreven in Med. N°. 27 en 60. Omtrent de bepalingen met dezen toestel bij lage temperaturen zal eerlang nog eene mededeeling gedaan worden.

§ 9. *Uitkomsten.*

In de volgende tabel VI zijn gegeven, in kolom I het nummer van de meting, in kolom II de datum, in kolom III de temperatuur, direct gemeten met den waterstofthermometer, in kolom IV de electromotorische kracht $-E_w$ in millivolts, in kolom V het aantal waarnemingen, in kolom VI de grootste afwijking in de verschillende bepalingen van E_w, waarvan de bijbehoorende E_w het gemiddelde is, in kolom VII hetzelfde tot graden herleid.

TABEL VI.

CALIBRATIE VAN HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL.

I	II	III	IV	V	VI	VII
20	27 Oct. 05	— 58°.753	2.3995	3	0.0006	0.016
21	30 Oct. 05	— 88.140	3.4825	3	29	81
17	8 Juli 05	— 103.833	4.0229	3	56	168
16	7 Juli 05	— 139.851	5.1469	3	6	21
18	26 Oct. 05	— 139.873	5.1469	4	12	41
19	26 Oct. 05	— 158.831	5.6645	3	15	59
11	27 Juni 05	— [182.692]	6.2297	3	10	46
28	2 Mrt. 06	— 195.178	6.4717	4	28	150
12	29 Juni 05	— [204.535]	6.6382	3	31	186
27	2 Mrt. 06	— 204.694	6.6361	4	26	156
14	30 Juni 05	— [212.832]	6.7683	3	8	56
13	6 Juli 05	— 212.868	6.7668	3	15	106
29	3 Mrt. 06	— 217.411	6.8221	3	14	112
15	6 Juli 05	— 217.416	6.8310	3	4	32
30	5 Mei 06	— 252.93	7.1315	4	17	39
31	5 Mei 06	— 259.24	7.1585	1	—	—

Waarneming n°. 11, 12 en 14 zijn onzeker, omdat de waterstofthermometer hierbij een bijzonder nauwe capillair had, zoodat het evenwicht niet voldoende gewaarborgd was. Volgens andere gelijktijdige waarnemingen (Med. N°. 95*c*, deze zitting), die sedert herhaald werden, is de correctie bij n°. 11 waarschijnlijk — 0°.058.

De gemiddelde afwijking van E_c voor de verschillende dagen, van de middelwaarde, alsook de gemiddelde grootste afwijking van de waarden van E_c op éénzelfden dag gevonden, bedraagt 3 microvolt; een bedrag dat aanwijst dat, bij de waarneming van het controle-element aan het een of ander, wat nog niet opgehelderd is, niet de noodige zorg is besteed, daar het waarnemingselement voor ditzelfde gemiddelde slechts 1,8 microvolt oplevert.

§ 10. *Indirecte bepalingen.*

Om tot de meest geschikte voorstelling van E_w als functie van t te geraken, was het gewenscht niet alleen de in § 9 medegedeelde waarnemingen te gebruiken, maar ook partij te trekken van een groot aantal indirecte metingen, verkregen door gelijktijdige waarneming van het thermo-element en een platina-weerstandsthermometer, welke laatste direct met den waterstofthermometer was vergeleken (zie Med. N°. 95*b*, deze zitting).

Deze getallen zijn in tabel VII samengevat, waar de kolommen

TABEL VII.

INDIRECTE CALIBRATIE VAN HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL

I	II	III	IV	V	VI	VII
22	13 Dec. 05	— 29°.825	1.2523	3	0.0005	0°.012
24	14 Dec. 05	— 58.748	2.3980	4	6	16
23	13 Dec. 05	— 88.161	3 4802	3	6	17
1	23 Jan. 05	— 103.576	4.0100	5	9	27
3	30 Jan. 05	— 182.640	6.2270	4	32	147
5	16 Mrt. 05	— 182.828	6.2340	3	13	60
4	2 Febr. 05	— 195.135	6.4730	3	20	107
6	17 Mrt. 05	— 195.261	6.4814	5	10	53
7	30 Mrt. 05	— 204.895	6.6397	3	55	330
26	26 Jan. 06	— 212 765	6.7637	4	33	233
8	3 April 05	— 212.940	6.7686	4	15	106
25	25 Jan. 06	— 217.832	6.8276	4	29	232

volkomen dezelfde beteekenis hebben als in de vorige tabel, alleen zijn hier de temperaturen uit weerstandsmetingen berekend.

§ 11. *Voorstelling der waarnemingen door eene formule.*

a. Al dadelijk viel in 't oog dat de formule van AVENARIUS:

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2$$

slechts voor een zeer beperkt gebied eene voldoende aansluiting kan geven. Legt men b.v. de parabool door 0°, —140° en —253°, dan vindt men:

$$a = +\ 4.7448$$
$$b = +\ 0.76117.$$

In dit geval bedraagt de afwijking bij —204° niet minder dan 7° Beperkt men zich tot een kleiner gebied en legt men de parabool door 0°, —88° en —183°, dan vindt men:

$$a = +\ 4.4501$$
$$b = +\ 0.57008,$$

terwijl bij —140°, de afwijking nog 1°.3 bedraagt.

Eene dergelijke voorstelling is dus geheel onbruikbaar.

b. Met eene kubische formule van den vorm

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3$$

kan natuurlijk een betere aansluiting verkregen worden. Wordt deze kubische parabool b. v. gelegd door 0°, —81°, —159° en —253°, dan vindt men:

$$a = +\ 4.2069$$
$$b = +\ 0.158$$
$$c = -\ 0.1544$$

en is de afwijking bij —204° 0°.94. Een kubische formule beperkt tot het gebied van 0° tot —183°, gaf bij —148°, een afwijking van 0°.34 [1]). Eene kubische formule voor t, uitgedrukt in E (zie § 2) geeft veel grootere afwijkingen.

c. Een formule, door STANSFIELD [2]) voor temperaturen boven 0° voorgesteld, van den vorm

---

[1]) Bij het ter perse gaan, komen ons de waarnemingen van HUNTER (Journ. of phys. chem. Bd. 10, pg. 319, 1906) onder oogen, die meent met behulp van eene, met de punten —79° en —183° bepaalde kwadratische formule, temperaturen bij —122°, tot op 0°.1 te kunnen bepalen. Hoe dit resultaat met het onze te rijmen is, blijft nog onopgehelderd.

[2]) Phil. Mag. Ser. 5, Bd. 46, pg. 78, 1898.

$$E = aT + b \log T + c,$$

waarin T de absolute temperatuur voorstelt, bleek absoluut onbruikbaar.

d. Er werd beproefd met een vijftermige formule naar machten van t eene betere aansluiting aan de waarnemingen te verkrijgen. Tweeërlei vormen zijn daartoe beproefd:

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + e\left(\frac{t}{100}\right)^5 + f\left(\frac{t}{100}\right)^7 \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

en

$$E = a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + e\left(\frac{t}{100}\right)^4 + f\left(\frac{t}{100}\right)^5 \quad . \quad . \quad (B)$$

Er werd begonnen de constanten te bepalen van beide vergelijkingen, zóó, dat de vergelijkingen voldoen aan de temperaturen —59°, —140°, —159°, —183° en — 213°. (*A*) vertoonde nu bij —253° eene afwijking van 113.1 microvolt, (*B*) eene afwijking van 91.8 microvolt. De voorkeur werd nu verder gegeven aan de vergelijking (*B*) en wel werden gezocht eene vergelijking (*B*IV), die zoo goed mogelijk het temperatuurgebied van 0° tot —217° zou voorstellen, twee vergelijkingen (*B*I en *B*III), die bovendien niet al te groote afwijking bij — 253° zouden vertoonen, en, waarvan bij de eene (*B*III) eene groote afwijking bij — 217° werd toegelaten, terwijl bij de tweede (*B*I) de afwijkingen meer gelijkmatig over alle temperaturen verdeeld zijn, en ten slotte eene vergelijking (*B*II), waarin, behalve —253°, ook —259° zou opgenomen zijn.

§ 12. *Berekening van de coëfficienten in de vijftermige formule.* De coëfficienten werden eerst uit 5 zooveel mogelijk gelijkmatig over het waarnemingsgebied verdeelde temperaturen bepaald en daarna naar alle overige verbeterd, echter zonder strenge toepassing van de methode der kleinste kwadraten.

Om deze vereffening te vergemakkelijken is van een door Dr. E. F. v. d. Sande Bakhuyzen aangegeven handelwijze gebruik gemaakt, waarbij in plaats van de 5 onbekende coëfficienten 5 andere lineair van de eerste afhangende onbekende worden ingevoerd [1]). En wel worden als zoodanig gekozen de juiste waarden van E voor de vijf oorspronkelijk gebruikte waarnemingen, of liever de verschillen tusschen deze en hunne in eerste benadering gevonden waarden.

Vijf hulprekeningen doen den invloed kennen van kleine variaties der nieuwe onbekende (10 microvolt) op de voorstelling der andere waarnemingen en met behulp van deze is een benaderde vereffening

[1]) Ook bij de strenge toepassing van de methode der kleinste kwadraten zal deze substitutie waarschijnlijk de rekening vergemakkelijken.

veel gemakkelijker uit te voeren dan door onmiddellijk met de variaties der oorspronkelijke coëfficienten te werken[1]).

Na de berekening der eerste voorloopige formule, werden daarna alle 28 waarnemingen voorgesteld. De zoo gevonden waarden duiden wij aan door R_0. De afwijkingen van de waargenomen waarden van de uit deze eerste formule berekende zijn in tabel VIII in kolom III opgenomen onder W-R_0. De afwijkingen van de temperaturen in de onmiddellijke nabijheid van elkaar werden tot normaalverschillen gemiddeld en zijn opgenomen in kolom IV onder (W-R_0).

Het waren deze afwijkingen, die als grondslag dienden voor eene volgens de boven uiteengezette beginselen ondernomen vereffening.

Zij gaf de volgende uitkomsten:

laat men — 253° en — 259° buiten rekening, zoo vindt men als coëfficienten van de vergelijking (B) (zie § 11):

$$\left.\begin{array}{ll} a_4 = +\ 4.32044 & e_4 = +\ 0,011197 \\ b_4 = +\ 0,388466 & f_4 = -\ 0,0044638 \\ c_4 = +\ 0.024019 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (BIV)$$

Laat men alleen — 259° buiten rekening, dan vindt men voor de coëfficienten van vergelijking (B) de beide volgende (zie § 11) stellen:

$$\left.\begin{array}{ll} a_3 = 4.33049 & e_3 = 0,053261 \\ b_3 = 0.436676 & f_3 = 0,003898 \\ c_3 = 0,048091 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (BIII)$$

en

$$\left.\begin{array}{ll} a_1 = 4.35603 & e_1 = 0,103459 \\ b_1 = 0,531588 & f_1 = 0,0118632 \\ c_1 = 0,157678 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (BI)$$

Neemt men alle temperaturen, ook die van de vloeibare waterstof onder gereduceerden druk kokend, in de vergelijking op, dan vindt men voor de coëfficienten van de vergelijking (B)

$$\left.\begin{array}{ll} a_2 = 4.35905 & e_2 = 0,111619 \\ b_2 = 0,542848 & f_2 = 0,0132130 \\ c_2 = 0,172014 & \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (BII)$$

De afwijkingen die deze verschillende vergelijkingen van de waarnemingen vertoonen vindt men onder ($W - R_1$), ($W - R_2$), ($W - R_3$) en ($W - R_4$) in de kolommen V, VI, VII en VIII van tabel VIII.

[1]) Wanneer het gebruikte polynoom opvolgende machten van de veranderlijke van de eerste macht af bevat, wordt die invloed bepaald door de interpolatiecoëfficienten van Lagrange.

TABEL VIII.
AFWIJKINGEN DER CALIBRATIE-FORMULES VOOR HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
No.	t	$W—R_0$	$(W—R_0)$	$(W—R_1)$	$(W—R_2)$	$(W—R_3)$	$(W—R_4)$
22	— 29°.825	—0.0080	—0.0080	—0 0030	—0 0032	—0.0013	—0.0011
24	— 58.748	— 13	— 6	+ 26	+ 26	+ 16	+ 11
20	— 58.753	0					
21	— 88.140	+ 44	+ 29	+ 31	+ 32	+ 8	+ 7
23	— 88.161	+ 14					
1	—103.576	0	+ 14	+ 4	+ 4	— 16	— 11
17	—103.833	+ 43					
16	—139.851	+ 5	+ 1	— 20	— 20	— 18	+ 4
18	—139.873	— 2					
19	—158.831	0	0	— 20	— 20	— 10	— 5
3	—182.604	+ 31					
11	[—182.750]	+ 26	+ 37	+ 21	+ 23	+ 28	+ 21
5	—182.828	+ 53					
4	—195.135	+ 15					
28	—195.178	— 6	+ 28	+ 13	+ 17	+ 12	+ 4
6	—195.261	+ 76					
12	[—204 535]	+ 34					
27	—204.694	— 17	+ 5	— 10	— 5	— 20	— 20
7	—204 895	— 11					
26	—212.765	+ 21					
14	[—212.832]	+ 58	+ 40	+ 25	+ 29	+ 8	+ 22
13	—212.868	+ 38					
8	—212.940	+ 45					
29	—217.411	— 36					
15	—217.416	+ 52	— 7	— 23	— 10	— 45	— 18[5]
25	—217.832	— 36					
30	—252.93	0	0	— 20	— 40	— 20	+ 280
31	—259.24	+ 87	+ 87	+ 68	+ 37	+ 90	+ 490

In deze tabel is aan de waarneming 11 aangebracht de correctie genoemd bij Tab. VI. Aan waarneming 17 en 7 is het halve gewicht toegekend wegens de groote afwijking van de enkele bepalingen onderling (zie Tab. VI en VII).

§ 13. *Slotsom.* De middelbare fout voor iedere temperatuur is bij:

index coeff.	*microv.*
1	± 2.8
2	± 3.3
3	± 2.2
4	± 1.9

De middelbare fout van de uitkomst van één dag is:

± 2.9 microvolt.

waaruit men vindt, dat de middelbare fout van één temperatuur is, stellende dat gemiddeld twee daguitkomsten tot één temperatuur gemiddeld zijn:

± 2.0 microvolt.

Het schijnt dus wel, dat de voorstelling door de vijftermige formule tot op 2 microvolt voldoende is. (2 microvolt stemt bij — 29° met 0°.05, bij — 217° met 0°.16 overeen). Voor de calibratie tot — 217° zijn dus metingen bij minstens 5 temperaturen noodig.

De voorstelling met insluiting van de temperaturen van de vloeibare waterstof, is veel minder goed; de middelbare fout is ± 3.2 microvolt, overeenkomende met 0°.075 bij — 29° en 0°.74 bij — 252° en — 259°.

Om dus de waterstoftemperaturen in de formule op te nemen, is waarschijnlijk een 6de term noodig.

Voor metingen bij de allerlaagste temperaturen is trouwens het element constantaan-staal weinig geschikt (verg. § 7).

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan Mej. T. C. JOLLES en de Heeren C. BRAAK en J. CLAY voor hunne hulp bij dit onderzoek.

Natuurkunde. — De heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. n°. 95^b uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. X. Uitzettingscoëfficiënt van Jenaglas en van platina tusschen* + 16° *en* — 182°."

§ 1. *Inleiding.*

De afwijking van de coëfficiënten a en b in de uitzettingsformule voor de lineaire uitzetting $l = l_0 \left(1 + \left\{a \frac{t}{100} + b \left(\frac{t}{100}\right)^2\right\} 10^{-6}\right)$ en k_1 en k_2 in de formule voor de kubische uitzetting

$$v_t = v_0 \left[1 + \left\{k_1 \frac{t}{100} + k_2 \left(\frac{t}{100}\right)^2\right\} 10^{-6}\right]$$

tusschen 0° en — 182° door KAMERLINGH ONNES en HEUSE (zie Med. N°. 85 Juni '03) gevonden, van die welke WIEBE en BÖTTCHER en THIESEN en SCHEEL voor temperaturen boven 0° hebben gevonden, maakten het wenschelijk de sterke aangroeiing van b bij lage temperaturen door nadere metingen buiten twijfel te stellen [1]).

In de eerste plaats hebben wij gebruik gemaakt van nadere bepalingen van de verandering van den weerstand van platinadraden met de temperatuur (zie Med. N°. 95^c dezer zitting) om de in Med. n°. 85 opgegeven temperaturen, welke slechts hadden kunnen dienen voor de berekening van een voorloopige formule door meer juiste te vervangen en met behulp daarvan nieuwe waarden voor a en b te berekenen, die de uitkomsten der metingen beter voorstellen, dan de in Med. N°. 85 opgegevene.

Wij kwamen met de formule

$$W_t = W_0 (1 + 0{,}00390972\, t - 0{,}0_6 9861\, t^2),$$

die voor de soort van platinadraad, in Med. n°. 85 gebruikt, geldt, tot de volgende verbeteringen.

In tabel IV moet gelezen worden	— 87°,14	in plaats van	— 87°,87
en	—181°,42	„ „ „	—182°,99
In tabel V moet gelezen worden	— 86°,98	„ „ „	— 87°,71
en	—181°,22	„ „ „	—182°,79

Daaruit volgt dan voor

Jenaglas 16^{III}	**a = 781**	**b = 90**	**1903.**
	k_1 = 2343	**k_2 = 272.**	
Thüringerglas (n°. 50)	**a = 920**	**b = 120**	
	k_1 = 2761	**k_2 = 362.**	

In de tweede plaats bleef het onzeker of soms de gemiddelde temperatuur van de einden wel juist die waren, welke volgens de in § 4 meegedeelde methode gevonden waren. Bij uitvoering van de Med. N°. 85 § 4, aangegeven controlebepaling, (zie § 4) bleek dat de methode in dit opzicht niets te wenschen overliet.

Wij hebben verder de uitzetting van dezelfde staaf Jenaglas, gebruik makende van de ervaring bij de vroegere bepalingen verkregen, nog eens gemeten en zijn daarbij tot nagenoeg dezelfde, door

---

[1]) Dat de uitzettingscoëfficiënt bij lage temperaturen geringer wordt is door J. ZAKRZEWSKI (Bull. Krakau 1889) door metingen tot — 103° aangetoond. Dit is in overeenstemming daarmede, dat de uitzetting van de meeste stoffen boven 0° door eene kwadratische formule met positieve waarde van b wordt aangegeven. Ons onderzoek heeft betrekking op de vraag of b zelf nog weder bij lagere temperaturen grooter wordt.

meerdere daaraan bestede zorg, nog meer vertrouwbare uitkomsten gekomen.

Eindelijk was het van belang uit te maken of de sterke toename van b met lage temperatuur ook bij andere vaste stoffen voorkwam en dus als een eigenschap van den vasten toestand van meerdere amorphe stoffen mocht worden beschouwd. Wij hebben daartoe, daar het ook uit anderen hoofde wenschelijk was de uitzetting van platina te kennen, de uitzetting van eene platinastaaf op dezelfde wijze als die van de glasstaaf gemeten. Ook bij platina hebben wij dezelfde sterke toename van b gevonden, wanneer deze voor een zelfde interval, bij lagere temperaturen berekend wordt, zoodat kubische vergelijkingen voor de lengte van beide stoffen moeten worden gebruikt wanneer men ook de uitzetting tot —182° wil voorstellen.

Nadat deze metingen afgeloopen waren heeft SCHEEL (Zeitschr. f. Instr. April 1906 p. 119) ook gevonden, dat de uitzetting van platina van 0° tot —190° kleiner is dan volgt uit de kwadratische formule voor de uitzetting boven 100°. Voor de uitzetting van + 16° tot — 190° per meter vindt SCHEEL — 1641 μ, terwijl uit onze metingen zou volgen —1687 μ. Hij meent echter dat door een kleine wijziging in de coëfficienten der kwadratische formule zijne waarnemingen in overeenstemming gebracht kunnen worden met die boven 100°. Onze uitkomst wijst echter duidelijk op eene grootere waarde van b beneden 0°.

Dat een kubische formule met negatieven coëfficient van t^3 moet worden aangenomen, kan in overeenstemming geacht worden met de negatieve uitzetting van amorphe kwarts tusschen 16° en — 190° door SCHEEL (l. c.) gevonden, in verband met de waarde van a en b in eene kwadratische formule van deze stof tusschen 0° en + 250°.

Een nader onderzoek van deze vragen zou natuurlijk met nauwkeuriger hulpmiddelen moeten geschieden. Als zoodanig ligt de methode van FIZEAU voor de hand. Reeds voor vele jaren werd door een van ons (K. O.) bij een bezoek te Jena met Prof. PULFRICH het brengen van een dilatometer van ABBE in den Leidschen cryostaat met vloeibare gassen besproken, doch de middelen om den toestel aan te schaffen ontbraken tot nu toe. Het onderzoek volgens deze methode is intusschen door de Reichsanstalt [1]) ter hand genomen. Een cryostaat gelijk de Leidsche, die veroorlooft een temperatuur geruimen tijd op 0,01° constant te houden zou daarbij waarschijnlijk een geschikt hulpmiddel blijken.

---

[1]) HENNING later SCHEEL, Zeitschr. f. Instrk. April 1905, p. 101 en April 1906, p. 118. RANDALL, Phys. Review 20, p. 10, 1905, heeft een dergelijken toestel geconstrueerd.

TRAVERS, SENTER en JAQUEROD [1]) geven als uitzettingscoëfficient van een niet nader bepaalde glassoort tusschen 0° en — 190° 0,0000218 op. Uit den gemiddelden uitzettingscoëfficient van 0° tot 100° meenen wij op te maken dat dit glas overeenkomt met ons Thüringerglas.

De gemiddelde uitzettingscoëfficient tusschen 0° en — 190° voor Thüringerglas in 1903 te Leiden gevonden is 0,00002074.

§ 2. *Meting van den uitzettingscoëfficient van Jenaglas en van platina tusschen 0° en* — 182°.

De gebruikte staaf Jenaglas was dezelfde als die van Med. N°. 85.

Aan de uiteinden van de 85 cM. lange platinabuis waren glazen uiteinden gesoldeerd van dezelfde soort als de Jenastaaf. Ter bepaling van de gemiddelde temperatuur der uiteinden waren deze uiteinden met dunnen platinadraad omwikkeld, die aan beide einden in twee platina toeleidingsdraden overging en met eenige lagen papier omwoeld was, om de uitwendige warmtegeleiding zooveel mogelijk te verminderen.

De temperatuur van 't middengedeelte van de Jenastaaf werd eveneens bepaald door dat daar omheen een platinadraad als in Med. N°. 85 gewonden was. De staaf was verder omwikkeld met dun papier, geplakt met vischlijm, en opzettelijk werd voor en na het plakken de weerstand gemeten om de isolatie te controleeren. De temperatuur van het bad werd op 't midden van de hoogte van 't bad bepaald met het thermoëlement constantaan-staal. (zie Med. N°. 95*a*. deze zitting).

Deze temperatuur werd aangenomen als de gemiddelde temperatuur van de platinabuis, die geheel door het vloeibare gas omgeven was en alleen aan de uiteinden met de veel slechter geleidende glasstukken in aanraking was, die gedeeltelijk uit 't bad staken.

De schaal (zie Med. N°. 85) was omwonden met een dikke laag wol waar omheen nog bordpapier met zooveel mogelijk dichtgeplakte naden. De temperatuur van het vertrek werd door kunstmatige verwarming en afkoeling met smeltend ijs zooveel mogelijk standvastig gehouden, zoodat de temperaturen van de schaal slechts weinig veranderen.

Zij werden op drie thermometers onder, midden en boven afgelezen.

De schaal en de punten van de glasstaven werden verlicht door spiegels, die het daglicht of het door papier gereflecteerd en diffuus gemaakte booglicht terugkaatsten.

De vacuumbuis (verg. Med. N°. 85) werd in den loop der metingen

---

[1]) TRAVERS, SENTER and JAQUEROD, Phil. Trans. A 200.

door een nieuwe vervangen. Bij deze was de evacueering beter geslaagd. Dit gaf een groote besparing in 't verbruik van vloeibaar gas. Bij de meting met vloeibare zuurstof was bij de eerste $1^1/_4$ liter per uur noodig terwijl bij de tweede $^1/_4$ liter gebruikt werd. Van N_2O was bij de eerste slechts $^1/_4$ liter per $1^1/_4$ uur verbruikt.

Het bad werd, om onregelmatigheden in de gemiddelde temperatuur zooveel mogelijk te voorkomen, zoo hoog mogelijk gevuld, terwijl voortdurend droge lucht tegen de uitstekende punten werd geblazen. Deze bleven juist vrij van ijs. Bij twee opzettelijk veroorzaakte uiterste gevallen — het bad met zuurstof zoo hoog mogelijk gevuld en de punten met ijs bedekt, en 't bad zoodanig, dat de drijver op zijn laagst stond, d. i. ongeveer 2 cM. beneden den rand, en de punten geheel vrij van ijs — bedroeg het verschil in gemiddelde temperatuur der uiteinden 10°, overeenkomende met 4 micron lengteverschil. Het grootste verschil, dat bij de waarnemingen is voorgekomen, is zeker kleiner geweest en de geheele onzekerheid in lengte uit dien hoofde kan niet meer dan 2 micron geweest zijn.

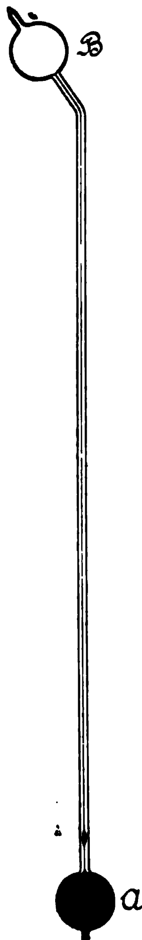


Fig. 1.

Bij de benedenuiteinden is 't verschil nog kleiner.

Dit alles geldt voor zuurstof, in stikstofoxydule zijn dergelijke veranderingen in temperatuur-verdeeling geheel te verwaarloozen.

Bij enkele metingen werd waargenomen, dat de lengte der staven wanneer zij na afkoeling teruggekeerd waren tot de gewone temperatuur eerst grooter was dan de oorspronkelijke, doch na twee dagen terugkeerde tot die waarde.

De oorzaak dier afwijkingen is niet opgehelderd. In een geval, toen een bijzonder groote afwijking geconstateerd werd, die niet geheel tot nul terug liep, bleek bij het afwikkelen der punten, dat in het glas een scheurtje gekomen was.

Om na te gaan of hier een thermische nawerking in het spel was werd een thermometerbol (zie figuur 1) met fijne capillair met kwik gevuld. De stand van 't kwik werd eerst bij kamertemperatuur in een waterbad, in een vacuumglas, met een nauwkeurige thermometer vergeleken. Daarna werd de toestel omgekeerd zoodat al 't kwik naar 't andere reservoir *B* liep, in dezen stand gedurende 3 uur in vloeibare lucht afgekoeld en vervolgens weer op kamertemperatuur gebracht en omgedraaid en weder in 't waterbad gebracht. De

afwijking van den stand van 't kwik was van dezelfde orde als de afleesfout van den thermometer, ongeveer 0.003°. Merkbare thermische nawerking vinden wij dus niet.

TABEL I. — JENAGLAS 16 ^{III}.

Datum	Tijd	Temp. schaal	L_t	L 16°	W_t	W_o	ϑ	λ
16 Dec.	2h.35	15.7	1026.285	1026 280	40.620		15.9	
1904	3h 50	16.0	.286	.279	40.786		17.0	
	4h.22	16.3	.292	.290	40.845		17.4	
20 Dec	1h.50	15.3	1025.571	1025.559	s. 3.503	5.021		λ_s = 40.6
	2h.10	15.4	.560	.550	m.25 029	38.28	—86.78	
	2h.30	15.4	.571	.561	i. 6.300	7.191		λ_i=22.1
21 Dec.	3h.15	14 6	1026.308	1026.291	m.40.523		15.1	
	3h.45	14.7	.299	.284			15.1	
	4h.15	14.7	.308	.289	m 40.583		15.6	
22 Dec.	10h 50	15.0	1025.108	1025.091	s. 2.105	5.021		λ_s=30.8
	12h.15	15.0	.112	.095	m. 9.880	38.28	—181.48	
	12h.50	15.0	.115	.098	i 5.005	7.191		λ_i=18.0
23 Dec.	12h.30	15.8	1026.341	1026.341	m.40.606		15.6	
	3h.	15.6	.339	.339			15.2	
	3h.30	15.6	.335	.336	m.40.537		15.2	
11 Jan.	3h.40	15.4	1026.288	1026.278	40.634		15.9	
1905	4h.30	15.5	.291	.280	40.703		16.4	

In tabel II (p. 157) zijn de temperaturen gebruikt die met 't thermo-element gevonden werden. Eene contrôlemeting met het thermo-element geplaatst in dezelfde vacuumbuis zonder staaf gaf voor de temperatuur in stikstofoxydule — 87°,3 in plaats van — 86°,32.

Het gemiddelde van beide bepalingen is voor de berekening gebruikt.

Een bijkomstige aanleiding om ter controle de temperatuur van 't bad met een thermoëlement te meten was 't groote verschil van de

TABEL II. — PLATINA.

Datum	Tijd	Temp. schaal	L_t	L 16°	W_t	W_0	ϑ	λ
16 Dec.	5h 50	16.5	1027.460	1027.461			17.0	
1904		16.4	1027.461	1027.459			17.0	
17 Dec. [1]	1h 45	16.6	1026.620	1026.630				
	9h 45	16.3	1026.618	622				
	10h 5	16.3	613	617				
19 Dec.	8h	14.8	1027.459	1027.442			15.5	
	8h 30	14.8	457	1027.440			15.5	
20 Dec.	3h	15.5	1026.627	1026.630	s 3.475	4.993		$\lambda_s = 40.2$
	3h 30	15.5	630	633	m		−86.32	
	3h 55	15.4	631	635	i 7.575	8.653		$\lambda_i = 31.5$
21 Dec.	4h 40	14.7	1027.460	1027.441			15.5	
	5h 10	14.9	459	444			15 5	
	6h	14.8	459	442			15.5	
22 Dec.	10h 40	15.3	1025.963	1025.951	s 2.140	4.993		$\lambda_s = 28.9$
	11h 10	15.3	1025.973	961	m		−182.6	
	1h 45	14.9	1025.964	947	i 5.649	8.653		$\lambda_i = 18.5$
23 Dec.	11h 25	15.7	1027.434	1027.436			15.0	
		15.6	440	441			15.0	
		15.7	440	442			15.2	
3 Febr.	2h	15.4	1027.463	1027.459			15 2	
		15.4	459	455			15.2	

gevonden gemiddelde temperatuur met het door RAMSAY en SHIELDS [2]) opgegeven kookpunt van stikstofoxydule —89°.

Bij het ter perse gaan vonden wij door HUNTER [3]) voor die temperatuur — 86°.2 opgegeven.

[1]) Bij deze meting in N_2O is geen temperatuurbepaling met het thermoëlement verkregen. Deze bepalingen is verder niet in de berekening opgenomen. Zij wordt hier vermeld wegens de overeenstemming met de bepaling van 20 Dec., die overigens geheel onder dezelfde omstandigheden geschiedde.

[2]) Journ. Chem. Soc. 63. p. 135. 1893.

[3]) Journ. Phys. Chem. May 1906. p. 356.

§ 3. *Uitkomsten.*

Jenaglas 16 III	**a**	**835**	**b**	**117**	**1905**
	k_1	**2505**	k_2	**353**	
Platina	**a**	**905,3**	**b**	**49,4**	
	k_1	**2716**	k_2	**148,4**	

Wat Platina betreft vinden:

BENOIT	van 0° tot 80°	*a* 890,1	*b* 12,1	1905
SCHEEL	van 20° tot 100°	*a* 880,6	*b* 19,5	
HOLBORN en DAY	van 0° tot 1000°	*a* 886,8	*b* 13,24	

Wat de verschillen van de thans verkregen waarden met die van Med. N°. 85 (zie § 1) betreft, zoo is op te merken, dat deze bijna geheel liggen aan de verschillen in de temperatuursbepalingen. De onzekerheid van deze laat echter de gevolgtrekking omtrent *b* en de noodzakelijkheid eener kubische formule onaangetast.

Er bestaat alle aanleiding om te beproeven onze bepalingen voor Jenaglas boven en beneden 0° samen te vatten in zulk eene kubische formule. Met de vroegere bepaling 242.10^{-6} als gemiddelden kubischen coef. van 0° tot 100° (Med. N°. 60 Juni 1900 § 20) vinden we in de zooeven opgegeven formule voor de lineaire uitzetting beneden 0° en in de overeenkomstige voor de kubische uitzetting

$$l_t = l_0 \left[1 + \left\{ a' \frac{t}{100} + b' \left(\frac{t}{100} \right)^2 + c' \left(\frac{t}{100} \right)^3 \right\} 10^{-6} \right]$$

Jenaglas 16 III	**a'**	**789,4**	k'_1	**2368,1**
	b'	**39,5**	k'_2	**120,2**
	c'	**— 28,8**	k'_3	**86,2**

§ 4. *Controle proef.*

De uiteinden van de Jenaglas staaf werden daarna afgesneden en met een kort tusschenstaafje aan elkaar gesmolten. Deze korte staaf werd geplaatst in een glas van dezelfde wijdte als de vacuumbuis met dezelfde stop en zoo kort dat de punten er op dezelfde wijze boven uitstaken als die van de staven in 't vacuumglas. Nu werd slechts een dubbel glas genomen met wol opgevuld, omgeven met een bordpapieren trechter en buis voor de afvoer der koude dampen.

De metingen zijn opgegeven in tabel III.

De λ's bij de proef gevonden zijn van dezelfde grootte als die bij de lange staven. De berekening met de in § 2 gevonden coëfficienten *a* en *b* geeft:

$l = 227{,}547$ terwijl gevonden werd $l = 227{,}544$

$l = 227.487$ „ „ „ $l = 227{,}488$.

TABEL III. — JENA GLAS UITEINDEN.

Datum	Temp. schaal	L_t	L_{16°	W_t	W_0	ϑ	λ
12 April 1905							
10h 15	15.4	227.684	227.683			15.4	
11h		.686	.685			15.4	
11h 11.43	15.4	227.684	227.682			15.5	
	15.4	.681	.679			15.5	
N_2O							
3h 50	15.4	227.533	227.536	s 3.473	5.021		λ_s = 42.3
4h 24	15.4	.543	.541				
4h 52	15.4	.550	.548	i 5.490	7.191		λ_i = 32.3
13 April	17.4	227.677	227.681			17.1	
14 April	16.2	227.675	227.676			15.9	
10h 10							
O_2							
2h 50	18.4	227.474	227.482	s 1.911	5.021		λ_s = 35.5
4.22	18.9	.482	.494	i 4.683	7.191		λ_i = 8.9
15 April	16.6	227.725	227.727			15.7	
11h 1	16.6	.724	.726			16.0	
4h 20	16.4	227.706	.708			15.8	
4h 46	16.4	.711	.713			16.0	
16 April	14.1	227.706	227.702			13.6	
17 April	14.2	227.682	227.678			14.0	
		.685	.681				

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan Mej. T. C. JOLLES en Mej. A. SILLEVIS voor de hulp ons bij dit onderzoek verleend.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 95[c]. H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. XI. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den waterstofthermometer.*"

§ 1. *Inleiding.* Het volgende onderzoek werd reeds voorbereid in Med. N°. 77 en Med. N°. 93 VII, van B. MEILINK, als deel van het in Med. N°. 95[a] genoemd meer uitgebreid onderzoek over de thermometrie bij lage temperaturen.

In die mededeelingen werd hoofdzakelijk uitgewerkt dat deel van het onderzoek hetgeen betrekking heeft op de electrische metingen.

Wat den waterstofthermometer betreft werd toen (vergel. Med. N°. 93 § 10) zooals ook nu de inrichting, in Med. N°. 60 behandeld, gevolgd. Het is later echter gebleken dat de thermometer toen niet met zuivere waterstof gevuld was, maar dat deze door lucht verontreinigd moet zijn geworden. Over de wijziging, die dientengevolge in Tab. V en Tab. VI van Med. N°. 93 moet worden gebracht en die in 't bijzonder de allerlaagste temperatuur betreffen, zal in eene afzonderlijke mededeeling worden gehandeld.

Hier wordt een nieuwe vergelijking meegedeeld, waarbij ook de vulling met de waterstof met betere inachtneming van al de in Med. N°. 60 bedoelde voorzorgen is geschied.

In 't bijzonder hebben wij getracht het bestaan van het *buigpunt* aan te toonen dat, in de lijn, (zie § 6) die den weerstand als functie van de temperatuur voorstelt, verwacht mag worden in verband in 't bijzonder met de onderstelling, dat de weerstand bij zeer lage temperaturen een *minimum* bereikt, om bij nog lager temperaturen weder toe te nemen en bij de absolute temperatuur zelfs oneindig te worden. (verg. Suppl. 9 Febr. '04). En dit wel in het bijzonder omdat metingen met den weerstandsthermometer zoo nauwkeurig en eenvoudig zijn.

Uit het oogpunt der thermometrie is 't van belang te weten door welke formule de weerstand van een platinadraad voor een bepaald gebied met een gegeven nauwkeurigheid kan worden voorgesteld, en hoeveel punten voor de calibratie in dit gebied moeten worden gekozen.

In Med. N°. 93 § 10 was de conclusie getrokken, dat tusschen 0° en —180° een kwadratische formule de waarnemingen niet nauwkeuriger dan tot op 0°.15 kan voorstellen, en dat er daar voor een grootere nauwkeurigheid een vergelijking op meer dan twee punten met den waterstof-thermometer noodig is, en dat voor temperaturen beneden — 197° een afzonderlijk onderzoek noodig is. De temperaturen beneden —180° zijn in 't thans medegedeelde onderzoek in 't bijzonder bestudeerd; het heeft zich ook tot de tempera-

turen, welke met vloeibare waterstof verkregen konden worden, uitgestrekt.

Van groot belang is, of de thermometer gedurende langeren tijd in 't gebruik bij lage temperaturen denzelfden weerstand behoudt. Op de beantwoording van deze vraag hopen wij later terug te komen. Hier zij vermeld dat met 't oog daarop de draad voor de calibratie gegloeid werd. Wij zullen 't verschil van platinadraden, door HERAEUS op verschillende tijden geleverd eveneens in een volgende Mededeeling behandelen.

§ 2. *Onderzoekingen van anderen.* Sedert Med. N°. 93 is wat dit betreft nog gepubliceerd het onderzoek van TRAVERS en GWYER [1]). Zij hebben twee punten bepaald. Wat betreft de standvastigheid der temperaturen hebben zij niet over voldoende cryostaten, gelijk ons ten dienste stonden, beschikt. Omtrent de zooeven genoemde vraag hoe men een weerstands-thermometer verkrijgt, die met bepaalde nauwkeurigheid alle temperaturen binnen een gegeven gebied aanwijst, bevat hunne verhandeling geene gegevens.

§ 3. *Wijziging in de inrichting der weerstanden.* De verandering van 't nulpunt van den gouddraad in Med. N°. 93, VIII, vermeld, deed ons betwijfelen of de micablaadjes tusschen de metaaldeelen wel volkomen isolatie gaven en ook de bewegelijkheid van 't eene gascylindertje deed ons besluiten een wijziging in de constructie der weerstanden aan te brengen, die zeer goed voldeed en van welke reeds partij werd getrokken bij 't regelen van de temperaturen in 't onderzoek waarvan in med. N°. 94^d sprake is.

Aan deze inrichting kleeft een bezwaar, dat wij niet onvermeld willen laten. De wijze waarop deze thermometer is gemonteerd laat niet toe dat hij geheel in zuur wordt gedompeld. Eene inrichting geheel van platina en glas, die dit wel veroorlooft, blijft dus wenschelijk. Zulk een inrichting is dan ook reeds verwezenlijkt. De beschrijving daarvan zal later worden meegedeeld. De thans meegedeelde cijfers hebben uitsluitend betrekking op den in Med. 94^d beschreven thermometer.

Wat de toeleidingsdraden betreft is er voor gezorgd dat de beide paren aan elkaar gelijk waren. De meting van den weerstand wordt daardoor zeer bespoedigd, zoodat zelfs voor de regeling van de tem-

---

1) TRAVERS and GWYER Z. f. Phys. Chem. L II, 4, 1905. De draad waarvan OLZEWSKI, 1905, Drude's Ann. B 17, p. 990, de calibratie opgeeft is zooals hij zelf mededeelt blijkbaar geen platinadraad. (Zie verder § 6 noot 1).

peratuur in den cryostaat en voor de meting onder gunstige omstandigheden dezelfde weerstandsthermometer kan dienen.

§ 4. *De temperaturen.*

Zij werden verkregen in den cryostaat van Med. 94[d]. met behulp van vloeibaar chloormethyl — 39°, — 59°, — 88°, van vloeibaar aethyleen — 103°, — 140°, — 159°, van vloeibare zuurstof — 182°, — 195°, — 205°, — 212°, — 217° met behulp van vloeibare waterstof — 252° en — 259°. De metingen geschiedden als boven § 1 vermeld met den waterstofthermometer.

§ 5. *Uitkomsten voor den platinadraad.* Deze zijn medegedeeld in Tabel I.

De waarnemingen gemerkt met [ ] zijn onzeker wegens de oorzaak vermeld in Med. N°. 95[a] § 10. niet gebruikt bij de afleiding der formules en de vereffening er van. Wat betreft de beteekenis van $W—R_{A_I}$ in kolom opmerkingen zie § 6.

§ 6. *Voorstelling door eene formule.*

a. Omtrent de kwadratische formule [1]) werd reeds in § 1 medegedeeld, dat ze reeds onvoldoende was voor 't gebied van 0—180°.

Legt men een kwadratische formule door — 103° en — 182°, zoo vindt men:

$$W_t = W_0 \left(1 + 0{,}39097 \left(\frac{t}{100}\right) - 0{,}009862 \left(\frac{t}{100}\right)^2\right).$$

Zij geeft bijvoorbeeld bij — 139° $W - R$ + 0,084. Men kan door — 182°, — 195°, — 204° en — 212° een rechte lijn leggen en — 217° wijkt daar 0°,25 van af, naar de andere zijde als — 158°. 't Bestaan van een *buigpunt* is dus zeker (zie onder *d*). 't Is dus duidelijk dat een kwadratische formule voor lagere temperaturen niet meer zal voldoen.

b. Maar ook eene kubische formule, die waterstoftemperaturen zou bevatten blijkt geheel onbruikbaar te zijn.

Voor de kubische formule door de punten —88°,14, —158°,83, —204°,53, krijgt men:

$$W_t = W_0 \left(1 + 0{,}39451 \frac{t}{100} - 0{,}0_3 5116 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + 0{,}0_3 1407 \left(\frac{t}{100}\right)^3\right),$$

Zij geeft b.v. bij — 195° eene afwijking van + 0,024.

c. Wegens de moeilijkheden ondervonden met formules naar opklimmende machten van t zijn toen formules met reciproke machten

[1]) Op een kwadratische formule komt ook neer de correctie van CALLENDAR, bij lage temperaturen gebruikt door TRAVERS en GWYER, Z. f. Phys. Chem. LII, 4, 1905. De kwadratische formule van DICKSON Ph. Mag. Juni 1898 is van anderen aard, doch heeft ook niet voldaan, zie DEWAR Proc. R. Soc. 64 p. 227. 1898.

De calibratie van een platinathermometer door twee vaste punten wordt bij gebrek aan een waterstofthermometer nog dikwijls toegepast (b.v. BESTELMEYER Drude's Ann. 13. p. 968 '04).

TABEL I. VERGELIJKING VAN DEN PLATINAWEERSTANDS-THERMOMETER MET DEN WATERSTOF THERMOMETER.

Datum		Temperatuur waterstoftherm.	Gemeten weerstand	Opmerkingen
0°		0°	137.884 Ω	gemiddelde van 5 metingen.
27 Oct. '05	5 h. 0	— 29.80	121.587	
	2 h. 50	— 58.75	105 640	
30 Oct. '05	3 h. 50	— 88.14	89.277	
8 Juli '05	10 h. 12	— 103.83	80.448	
26 Oct. '05	5 h. 20	— 139.87	59.914	
7 Juli '05	4 h. 25	— 139.85	59 920	
26 Oct. '05	3 h. 16	— 158.83	48.929	
27 Juni '05	1 h. 40	[— 182 69]	34.861	$W—R_{A_I} = + 0.021$
30 Juni '06	11 h. 0	— 182.75	34 858	
27 Juni '05	3 h. 50	[— 195.30]	27 598	$W—R_{A_I} = — 0.082$
2 Maart '06	3 h. 35	— 195.18	27.595	
29 Juni '05	11 h. 6	[— 204.53]	22.016	$W—R_{A_I} = + 0.110$
2 Maart '06	1 h. 30	— 204.69	22.018	
30 Juni '05	3 h. 0	[— 212.83]	17.255	$W—R_{A_I} = + 0.082$
5 Juli '05	5 h. 53	— 212.87	17.290	
5 Juli '05	3 h. 20	— 217.41	14.763	
3 Maart '05	10 h. 0	— 217.41	14.770	
5 Mei '06	3 h. 0	— 252.93	1.963	
5 Mei '06	5 h. 7	— 259.24	1.444	

der absolute temperaturen (zie de onderstelling in § 1 omtrent het oneindig worden van den weerstand bij 't absolute nulpunt) gebruikt.

Drie er van zijn reeds onderzocht.

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{273{,}09}\right) \quad . \quad . \quad (A)$$

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{273{,}09}\right) + $$
$$+ e\left[\frac{10^4}{T^2} - \frac{10^4}{(273{,}09)^2}\right] \quad . \quad (B)$$

$$\frac{W_t}{W_0} = 1 + a\frac{t}{100} + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + d\left(\frac{10^2}{T} - \frac{10^2}{273{,}09}\right) + $$
$$+ e\left(\frac{10^3}{T^3} - \frac{10^3}{(273{,}09)^3}\right) \quad . \quad (C)$$

Beproefd wordt ook een formule met een term $\frac{e}{T^4}$ in plaats van $\frac{e}{T^3}$.

Voor de eerste werd gezocht een voorloopig stel constanten hetgeen vervolgens verbeterd werd naar de benaderde handelwijze, die ons was aan de hand gedaan door Dr. E. F. VAN DE SANDE BAKHUIZEN (zie med. 95*a*) en wel op twee wijzen. In de eerste plaats werd verkregen een stel constanten A_I waarbij tot — 217° een vrij nauwkeurige aansluiting bereikt werd, bij — 252° een vrij groote en bij — 259° een matige afwijking. In kolom $W - R_{AI}$ Tabel II zijn de afwijkingen opgegeven. In de tweede plaats een stel constanten, die een redelijk nauwkeurige aansluiting gaven met insluiting van — 252°, doch bij 259° een groote afwijking. In Tabel II zijn deze aangegeven als $W - R_{II}$.

Eindelijk werd er ook nog verkregen een voorloopige oplossing B welke alle temperaturen, — 252° en — 259° ingesloten, redelijk voorstelt, van welke de afwijkingen in Tabel II zijn aangegeven als $W - R_B$, en een oplossing van den vorm C die alleen tot 252° aansluit en op welke $W - R_C$ betrekking heeft.

De constanten der bedoelde formules zijn

	A_I	A_{II}	B	C
a	+ 0.399625	+ 0.400966	+ 0.412793	+0.40082
b	— 0 0002575	+ 0.001159	+ 0.013812	+0.001557
c	+ 0.0049412	+ 0.0062417	+ 0 012683	+0.00557
d	+ 0.019380	+ 0.026458	+ 0.056221	+0.01975
e			— 0.0033963	—0.16501

TABEL II.

VERGELIJKING VAN DEN PLATINAWEERSTANDSTHERMOMETER MET DEN WATERSTOFTHERMOMETER.

Temperatuur waargenomen met den waterstoftherm.	aantal waarnemingen met den waterstof therm.	Waargenomen weerstand. in Ω	$W-RA_I$	$W-RA_{II}$	$W-RB$	$W-RC$
0°		137.884	0	0	0	0
— 29.80	3	121.587	+ 0.025	+ 0.066	+ 0.210	+ 0 063
— 58.75	3	105 640	+ 0.011	— 0.011	+ 0.153	+ 0.048
— 88.14	4	89 277	— 0 012	— 0.050	— 0.001	+ 0.008
— 103.83	3	80.448	— 0.023	— 0.061	— 0.075	— 0.015
— 139.87	3*	59 914	+ 0.004	— 0.005	— 0.082	— 0.005
— 158.83	3	48.929	+ 0.023	+ 0.044	0	+ 0.008
— 182.75	2	34.858	— 0.029	+ 0.027	+ 0.083	— 0 035
— 195.18	2	27 595	+ 0.009	+ 0.061	+ 0.148	+ 0 007
— 204.69	1	22.018	— 0.014	+ 0.012	+ 0.100	— 0.014
— 212 87	3	17.290	— 0.024	— 0.065	— 0.001	— 0.031
— 217.41	4*	14.763	+ 0.028	— 0.048	+ 0.270	+ 0.007
— 252.93	2	1.961	+ 2.430	+ 0.064	0	0
— 259.24	1	1.444	+ 0.230	— 4.170	0	

Waar de $W—R$ uit twee bepalingen gevormd zijn is in de 2de kolom een * geplaatst.

Wanneer men uit de afwijkingen tusschen waarneming en berekening, tot —217° met behulp van A_I de middelbare afwijking van eene waarneming van de formule berekent, dan vindt men deze uitgedrukt in weerstand ± 0,025 Ω, in temperatuur ± 0°,044.

De middelbare fout van eene waarneming van den waterstofthermometer, voor zoover de toevallige fouten betreft, bedraagt 0°,02 overeenkomende in weerstand met ± 0,10 Ω.

Voor het buigpunt wordt volgens B gevonden — 180° [1]).

Ten slotte betuigen wij onzen hartelijken dank aan Mej. T. C. Jolles en den Heer C. Braak voor hunne hulp bij dit onderzoek.

1) Wegens e negatief geeft (B) geen minimum; een term als die met e is echter niet in strijd met de onderstelling $w = \infty$ van T 0 (§ 1) daar de formule slechts tot —259° geldt.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Med. N°. 95^d uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en J. CLAY: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XII. Vergelijking van den platinaweerstandsthermometer met den goudweerstandsthermometer.*

§ 1. *Inleiding.* Uit het onderzoek van Med. N°. 93 Juni '04 VIII werd afgeleid, dat als metaal voor weerstandsthermometers bij lage temperaturen goud boven platina te verkiezen zou zijn, wegens het verloop van de kromme, die 't verband aangeeft van den weerstand met de temperatuur.

Zuiver goud schijnt ook daarom nog beter geschikt omdat aan het bereiken van den uitersten graad van zuiverheid bij dit metaal wegens de beteekenis er van als muntmateriaal de uiterste zorg wordt besteed en het gehalte aan bijmengsels bij niet geheel zuiver goud zeer juist gevonden kan worden. Een voortzetting tot lage temperaturen van de metingen vermeld in Med. N°. 93 VIII, — waarvan een herhaling noodig was, omdat, al was ook de bruikbaarheid der methode door het zooeven genoemde onderzoek van MEILINK gebleken, voor den weerstand voor en na de blootstelling van den draad bij lage temperaturen niet dezelfde waarde werd gevonden, — kreeg door deze beteekenis, aan het goud gehecht, eene bijzondere waarde.

Het *buigpunt* van den weerstand als functie van de temperatuur moet, zooals uit het volgende zal blijken, bij goud veel lager liggen dan bij platina. Onze gunstige meening omtrent het goud als thermometrische stof werd bevestigd wat betreft temperaturen tot iets beneden —217°. Wat de lagere temperaturen betreft staat deze nog volstrekt niet vast. Een *minimum van weerstand* schijnt bij —259° niet meer ver af.

§ 2. *De toestellen en de metingen.* Omtrent de metingen is niet anders op te merken, dan dat zij geheel geschieden volgens de in Med. N°. 93 uitgewerkte methoden.

Het zuivere goud ontvingen wij door de vriendelijke zorg van Dr. C. HOITSEMA. Het werd door HERAEUS tot draad van 0,1 mM. diameter getrokken.

De gouddraad werd op 2 cylinders gewonden, had een lengte van ongeveer 18 M. en de weerstand bij 0° was 51,915 Ohm. De temperaturen werden verkregen in den cryostaat van Med. N°. 94^d als Med. 95^c.

De temperatuurbepalingen zijn geschied met behulp van den weerstand van den platinadraad van Med. 95^c. De bepalingen van 't nulpunt voor en na de metingen bij lage temperaturen kwamen geheel

overeen (deze overeenkomst had bij de metingen behandeld in Med. N°. 93 te wenschen overgelaten).

De metingen geschiedden deels direkt met behulp van den differentiaalgalvanometer, deels indirekt door den goudweerstand te vergelijken met een platinaweerstand, die zelf met den oorspronkelijk gecalibreerden platinaweerstand was vergeleken (zie Med. 95^c).

§ 3. *De uitkomsten*, langs direkten en indirekten weg verkregen, zijn onderscheiden door *d* en *i* opgegeven in kolom 3 van tabel III.

Bij de waarnemingen werd de cryostaat gebracht op de gewenschte temperatuur door deze zoo te regelen, dat de weerstand van den platinadraad de met deze temperatuur overeenkomende waarde had, en het bad verder gedurende de metingen van den weerstand van den gouddraad, deze temperatuur te doen behouden. De in Tabel III opgegeven temperaturen zijn de temperaturen op den waterstofthermometer volgens de waarnemingen van Med. 95^c behoorende bij den weerstand van den platinathermometer.

TABEL III.

CALIBRATIE VAN DEN GOUDWEERSTANDSTHERMOMETER.

Datum.	Temperatuur weerstand.	Waargenomen goudweerstand.	$W-R_A$	$W-R_{BI}$	$W-R_{BII}$
1906	0	51.915 *d*	0	0	0
1 Febr. 5 h. 57	— 28°.96	46 137 *i*	— 0.009	— 0.023	+ 0.032
» 3 h. 40	— 58.58	40 326 *i*	+ 15	+ 6	+ 48
» 12 h. 25	— 87.43	34.640 *i*	— 26	— 5	0
12 Juni 2 h. 50	— 103.82	31.432 *d*	— 25	+ 9	— 2
» 11 h.	— 139.86	24.284 *d*	— 20	+ 13	+ 1
17 Jan. 3 h. 20	— 159.11	20.394 *i*	— 38	— 22	— 14
1 Juni 11 h. 50	— 182.75	15.559 *d*	+ 10	— 2	+ 27
» 5 h. 8	— 195.18	12.980 *d*	+ 40	+ 22	+ 40
» 4 h.	— 204.69	10.966 *d*	+ 30	+ 18	+ 1
» 3 h.	— 212.87	9.203 *d*	— 1	— 3	— 76
12 Jan. 11 h.	— 216.25	8.460 *i*	— 33	— 23	— 129
18 Mei 4 h. 10	— 252.88	2.364 *d*	+ 1.046	0	— 7
» 6 h.	— 259.18	2.047 *d*	+ 1.326	— 3.270	— 42

Wat de door DEWAR [1]) gevonden verdere daling in waterstof, die bij 30 m.M. druk verdampt, betreft, welke daling volgens DEWAR zou behooren bij 4° daling op den gasthermometer, zoo wordt door ons opgemerkt, dat wij in overeenstemming met TRAVERS SENTER en JAQUEROD [2]) een temperatuurs verschil vinden van 6,°3 tusschen 't kookpunt van waterstof bij 760 m.M. druk en bij 60 m.M. druk.

§ 4. *Voorstelling van de verandering van den goudweerstand door een formule.* Wij sluiten ons wat dit betreft aan bij Med. N°. 95[c], XII. § 6. De weerstand van den gouddraad, kan tot —217°, als functie van de temperatuur tamelijk goed voorgesteld worden door een formule van de vorm A.

$$\frac{W_t}{W_o} = 1 + 0,38947 \frac{t}{100} + 0.0160098 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + $$
$$+ 0,0079000 \left(\frac{t}{100}\right)^3 + 0.00782278 \left(\frac{T}{100} - \frac{100}{273.09}\right) \quad . (A)$$

Deze formule A is niet geschikt om de waterstoftemperaturen op te nemen. Voor de afwijkingen $W—R_A$ zie tabel III.

We hebben derhalve gebruik gemaakt van eene formule B en wel geeft

$$\left.\begin{array}{l} \frac{W_t}{W_o} = 1 + 0,381606 \left(\frac{t}{100}\right) + 0,0090626 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + \\ \quad + 0,0031377\left(\frac{t}{100}\right)^3 - 0,0268385\left(\frac{100}{T} - \frac{100}{273,09}\right) + \\ \quad\quad + 0,00518085 \left(\left(\frac{100}{T}\right)^2 - \left(\frac{100}{273,09}\right)^2\right) \end{array}\right\} (B\,I)$$

een goede aansluiting tot — 253° en

$$\left.\begin{array}{l} \frac{W_t}{W_o} = 1 + 0,394548 \left(\frac{t}{100}\right) + 0,0200118 \left(\frac{t}{100}\right)^2 + \\ \quad + 0,0102889 \left(\frac{t}{100}\right)^3 + 0,0229106 \left(\frac{100}{T} - \frac{100}{273,09}\right) \\ \quad\quad - 0,00094614 \left(\left(\frac{100}{T}\right)^2 - \left(\frac{100}{273,09}\right)^2\right) \end{array}\right\} (B\,II)$$

eene redelijke aansluiting ook bij — 259°.

De afwijkingen zijn onder $W—R_{B\,I}$ en $W—R_{B\,II}$ in de 5[de] en 6[de] kolom van Tabel III opgenomen. De middelbare afwijking van eene waarneming met form. $B\,I$ bedraagt in weerstand ± 0,020 Ω, in temperatuur ± 0°,09. Formule $B\,I$ levert voor het buigpunt van den goud weerstand — 220°.

[1]) DEWAR, Proc. Roy Soc. Vol. 68 p. 360. 1901.

[2]) TRAVERS SENTER en JAQUEROD, Transact. Roy Soc. A. 200. Proc. Roy. Soc. Vol. 68, p. 361, 1901.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer LORENTZ namens den Heer J. M. VAN BEMMELEN: „Ueber den Unterschied zwischen Hydraten und Hydrogelen und die Modifikationen der Hydrogele (Zirkonsäure und Metazirkonsäure)": Sonderabdruck aus Zeitschrift für anorganische Chemie.

De vergadering wordt gesloten.

ERRATUM.

In het verslag der vergadering van 24 Juni 1905 leze men:

p. 154, r. 4 v. o.: —195° in plaats van 195°.
„ 156, „ 18 „ „ : Pl. VI „ „ „ Pl. IV.
„ „ „ 10 „ „ : 51 „ „ „ 57.

In Plaat V behoorende bij meded. N°. 83 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, Zittingsverslag Februari 1903, p. 667 is het vacuumglas B'_0 18 cM. te lang geteekend.

Erratum van de mededeeling van den Heer L. E. J. BROUWER, „*Meerdimensionale Vectordistributies*", verslag der vergadering van 26 Mei 1906. De uitdrukking voor de tweede afgeleide pag. 18 onderste regel worde met een — teeken voorzien; in overeenstemming hiermee wordt stelling 3:

$$\nabla^2 = - \sum_{h=1}^{h=n} \frac{\partial^2}{\partial x_h^2}$$

Verder leze men pag 20 r. 1 v. o. $k_n r^{n-1}$ in plaats van $k_n \pi r^{n-1}$; en $k_n (n-2) r^{n-2}$ in plaats van $k_n \pi r^{n-2}$ op de volgende plaatsen:

pag. 20 r. 2 v. o.
„ 21 „ 11 „ b. en r. 6 v. o.
„ 22 „ 9 „ „ „ „ 10 „ b.
„ 23 „ 1 „ „ „ „ 3 „ „
„ 26 „ 3 „ o.

(20 Juli, 1906).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 29 September 1906.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.

Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 172.

In memoriam Prof. C. A. J. A. OUDEMANS, p. 174.

Concept antwoord aan den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het inrichten van het nieuw te stichten Instituut voor hersenonderzoek, p. 178.

Verslag van de Heeren KAMERLINGH ONNES, HAGA en VAN DER STOK over de vraag of het wenschelijk is dat het douane onderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende vermeden worde, p. 178.

J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge betrekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908", p. 179. (Met één plaat).

W. H. JULIUS: „Het voortplanten van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van absorptielijnen", p. 211.

J. P. VAN DER STOK: „Mededeeling over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September l.l.", p. 211.

JAN DE VRIES: „Quadratische omwentelingscomplexen", p. 211.

A. PANNEKOEK: „De samenhang van spectrum en kleur der sterren". (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 216.

J. J. VAN LAAR: „Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen" (4de mededeeling: De lengteplooi). (Aangeboden door de Heeren H. A LORENTZ en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 227. (Met één plaat).

F. MULLER: „De placentatie van Sciurus vulgaris". (Aangeboden door de Heeren A. A. W. HUBRECHT en L. BOLK), p. 236.

J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: „Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen". (Aangeboden door de Heeren C. WINKLER en T. PLACE), p. 246.

W. VAN BEMMELEN: „Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia". (Aangeboden door den Heer J. P. VAN DER STOK), p. 250.

R. A. WEERMAN: „Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide". (Aangeboden door de Heeren S. HOOGEWERFF en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 262.

A. F. HOLLEMAN en H. A. SIRKS: „Over de zes isomere dinitrobenzoëzuren". p. 264.

A. F. HOLLEMAN en J. HUISINGA: „Over de nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur", p. 270.

J. J. BLANKSMA: „Nitratie van meta-gesubstitueerde phenolen". (Aangeboden door de Heeren A. F. HOLLEMAN en P. VAN ROMBURGH), p. 276.

W. BURCK: „Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen". (Aangeboden door de Heeren F. A. F. C. WENT en J. W. MOLL), p. 278.

C. EYSBROEK: „Over de amboceptoren van een antistreptococcenserum". Aangeboden door de Heeren C. H. H. SPRONCK en C. A. PEKELHARING), p. 285.

L. E. J. BROUWER: „Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde ruimten". Aangeboden door de Heeren D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE), p. 293.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK; „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer", p. 310.

Aanbieding van een boekgeschenk, p. 310.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Naar aanleiding hiervan deelt de Secretaris mede dat de Heeren LELY en WEBER verslag uitgebracht hebben over het verzoek tot de Akademie gericht, om zich op het Congrès international pour l'étude des regions polaires te doen vertegenwoordigen. In dit verslag werd de wenschelijkheid betoogd een vertegenwoordiger te zenden. De Heer VAN DER STOK heeft zich daartoe op verzoek van den Voorzitter bereid verklaard. Verder deelde de Secretaris mede dat de Letterkundige Afdeeling bericht heeft, dat er bij haar geen bezwaar bestaat dat de Keiz. Akademie van Wetenschappen te Tokyo toetreedt tot de Internationale Associatie van Akademiën. Daar op de vraag van den Voorzitter geen der leden van de Natuurkundige Afdeeling hiertegen bezwaar maakt zal hiervan aan de Kais. Akademie der Wissenschaften te Weenen bericht worden gezonden.

Ingekomen zijn:

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, J. A. C. OUDEMANS, P. H. SCHOUTE en H. KAMERLINGH ONNES dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Missive van den Heer S. H. KOORDERS te Poerworedjo (Kedoe) dat hij onder dankzegging zijne benoeming tot Correspondent der Akademie aanvaardt.

3°. Missive van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 19 Juli l.l. waarbij Z.Exc. om bericht vraagt over een schrijven van den Belgischen gezant, waarbij de Regeering uitgenoodigd wordt zich te doen vertegenwoordigen op een Congres voor poolonderzoek te Brussel te houden.

Aan den Minister is geantwoord dat de Heer J. P. VAN DER STOK, als vertegenwoordiger der Akademie op dat Congres, zeker bereid zoude zijn de Regeering aldaar te vertegenwoordigen.

4°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 18 Augustus 1906 met verzoek te willen berichten of er wetenschappelijke inrichtingen of instellingen bekend zijn voor welke het van belang is dat het douane onderzoek voor voorwerpen op de luchtscheepvaart betrekking hebbende, vermeden worde.

In handen gesteld van de Heeren KAMERLINGH ONNES, HAGA en VAN DER STOK om advies.

5°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28 Juli 1906 ter begeleiding van een schrijven van Burgemeester en Wethouders van Amsterdam en met verzoek om nader advies omtrent de inrichting van de localiteiten voor de instelling van hersenonderzoek.

In handen gesteld van de Heeren WINKLER, BOLK, MAC GILLAVRY, VAN WIJHE en ROSENBERG om advies.

6°. Brief van den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 18 September 1906 met verzoek om advies omtrent eene doelmatige inrichting ter ventileering van de bovenzalen van 's Rijksmuseum.

In handen gesteld van de Heeren KAMERLINGH ONNES, WIND, ZEEMAN, DE BRUYN en MAC GILLAVRY om advies.

7°. Brief van administrateuren van het P. W. Korthalsfonds waarbij zij bericht geven hunne goedkeuring te hechten aan het voorstel der Afdeeling om de dit jaar beschikbare *f* 600.— uit genoemd fonds aan te wenden ten behoeve van den Heer J. BOLDINGH Docs. in de plant- en dierkunde te Utrecht, voor de bewerking van de flora der Nederlandsche bovenwindsche eilanden, St. Eustatius, Saba en St. Martin. Dit bedrag is sedert ontvangen en zal ter beschikking gesteld worden van de Maatschappij voor het Natuurkundig onderzoek der Nederlandsche Koloniën.

8°. Missive van de American Philosophical Society ter begeleiding van een medaille ter herinnering van den 200-jarigen geboortedag van BENJAMIN FRANKLIN. Onder dankbetuiging aanvaard.

9°. Bericht van het overlijden van den Heer Prof. LUDWIG BOLTZMANN te Weenen, Buitenlandsch Lid der Akademie, op 8 September l.l. Is met een brief van rouwbeklag beantwoord.

Verder is ingekomen het bericht van het overlijden van

Dr. C. A. J. A. OUDEMANS,

rustend lid der Afdeeling.

Dit bericht is met een brief van rouwbeklag beantwoord. Naar aanleiding hiervan zegt de Voorzitter het volgende:

Mijne Heeren!

Het zij mij vergund enkele woorden te wijden aan de nagedachtenis van ons voormalig oudste rustend lid Dr. C. A. J. A. OUDEMANS.

Geboren 7 December 1825, studeerde OUDEMANS aan de Leidsche Universiteit, alwaar hij in 1847 in de geneeskunde promoveerde. Ter voltooiing zijner medische studiën begaf hij zich naar Parijs en toen aldaar in Februari 1848, wegens het uitbreken der revolutie, de colleges gesloten werden, naar Weenen; van waaruit hij nog datzelfde jaar, toen het lectoraat in de botanie, zoölogie en materies medica aan de Klinische School te Rotterdam openviel, naar die betrekking solliciteerde om zich na zijne benoeming, tevens aldaar als praktizeerend geneesheer te vestigen.

In het bezit gekomen eener zich uitbreidende praktijk, aarzelde hij evenwel niet daarvan afstand te doen toen hem in 1859, door zijne benoeming tot hoogleeraar in de botanie en pharmakognosie aan het Athenaeum te Amsterdam, de gelegenheid geboden werd zich meer uitsluitend te wijden aan de botanische wetenschap, wier beoefening hem reeds te Leiden, onder den invloed van den hoogleeraar REINARDT en van den aldaar als geneesheer gevestigden Dr. MOLKENBOER, lief geworden, en daarna meer en meer tot eene levenstaak geworden was.

Reeds een jaar vroeger, in 1858, hadden zijne botanische geschriften hem toegang tot onze Akademie verschaft, van welke hij van 1879—1896 het secretariaat bekleedde, in welk laatste jaar, dat van het intreden van zijn emeritaat als hoogleeraar aan de Amsterdamsche Universiteit, Amsterdam door hem met der woon verlaten werd om zich aanvankelijk des zomers te Apeldoorn, des winters te Arnhem, later uitsluitend in deze laatste plaats te vestigen.

Bij de meesten onzer zal de herinnering nog levendig zijn aan de opgewektheid en zorgvuldigheid waarmede dit secretariaat, zooals trouwens alles wat de overledene ondernam, door hem werd waargenomen.

Reeds in 1850 begint de reeks zijner wetenschappelijke geschriften met een kort opstel getiteld: „Morphologische beschouwingen omtrent de ranken van Vitis viniferi", en sedert dien tijd wordt zij bijna onafgebroken, tot enkele maanden voor zijn overlijden, voortgezet; getuigenis afleggende, van buitengewone werkkracht en wetenschappelijken ijver. Men vindt die geschriften, waaronder velen van grooten omvang, in tal van tijdschriften: in het Nederlandsch Kruidkundig Archief, het Nederlandsch Lancet, de Botanische Zeitung, de Annales des Sciences Naturelles, de Verslagen en Mededeelingen, de Verhandelingen en de Zittingsverslagen dezer Akademie, in het „Bulletin du Congrès International de Botanique" van 1865 te Amsterdam, van welk congres de overledene het voorzitterschap bekleedde, in „Hedwigia, Notizblatt für kryptogamische Studien", in de „Annales mycologici", in het botanische Centralblatt en wellicht nog anderen.

En daarnaast staan afzonderlijke werken, die elk voor zich eene uitgebreide studie hebben vereischt, als daar zijn: zijne „Aanteekeningen op het pharmakognostisch-botanisch gedeelte der Pharmacopoea Neerlandica" (1854—1856); zijne „Flora van Nederland" in drie deelen met atlas (1859—1862), het standaardwerk op dit gebied, zijne „Handleiding tot de pharmakognosie van het planten- en dierenrijk" (1865) en zijn „Leerboek der

plantenkunde" (1866—1870), dat vele jaren lang *het* leerboek voor deze wetenschap in Nederland is geweest tot het vervangen werd door het boek waarvan DE VRIES de anatomie en physiologie, OUDEMANS zelve de morphologie en de systematiek bewerkte. Bovendien verschenen onder zijne leiding de drie jaargangen van Neerland's plantentuin (1865—1867).

Op onderscheiden gebied bewegen zich deze geschriften. Zoo vindt men er naast dezulken, die de systematiek betreffen, eene studie „over de prikkelbaarheid der bladen van „Dionaea muscipula" (1859) en meerdere, die zich met den anatomischen bouw der planten bezighouden, onder welke vooral zijn onderzoek betrekkelijk het velamen der luchtwortels der orchideën (1860) bekendheid verworven heeft.

Veelal sloten deze botanisch-anatomische onderzoekingen zich aan bij zijn onderwijs in de pharmakognosie. Op pharmakologisch gebied heeft OUDEMANS zich dan ook een grooten naam verworven, vooral daar hij een der eersten was die ter herkenning der „simplicia" van hun anatomischen bouw gebruik maakten.

En hierbij valt tevens te vermelden het zeer ruime aandeel door hem genomen in de bewerking (1865—1861) der tweede uitgave der Nederlandsche Pharmacopoea, als secretaris, en der derde uitgave (1884—1888), als voorzitter, der daartoe benoemde commissie.

Niet minder verdienstelijk heeft OUDEMANS zich gemaakt voor de kennis der Flora van Nederland. Talrijke nieuwe vondsten zijn onder zijn naam te vinden of werden uitgegeven in het door hem bewerkte Herbarium van Nederlandsche planten. In zijn reeds vermeld standaardwerk heeft hij alles bijeengebracht wat op dat oogenblik omtrent de vaderlandsche flora bekend was.

Vooral de studie der zwammen was het tot welke hij zich reeds spoedig met voorliefde wendde. Aan hem is het te danken dat de Nederlandsche schimmelflora thans vrij goed bekend is, vooral niet minder dan die der omringende landen.

Tot in zijne laatste levensjaren werd door hem met onverminderden ijver en onverzwakte geestvermogens in die richting voortgewerkt.

Nog bij de voltooiing, in 1904, zijner „Catalogue Raisonné des Champignons des Pays-Bas" sprak hij de hoop uit, dit, zijn laatste werk, geregeld door jaarlijksche supplementen voort te zetten, aussi longtemps que les conditions pour atteindre ce but ne me manqueront pas".

Dit heeft niet zoo mogen zijn; een omstreeks November l.l. ingetreden verval van krachten heeft op tachtigjarigen leeftijd een einde gemaakt aan een zoo vruchtbaar en werkzaam leven.

Dankbaar zullen wij blijven gedenken wat OUDEMANS der Nederlandsche wetenschap geschonken heeft.



Concept antwoord aan den Minister van Binnenlandsche Zaken betreffende het inrichten van het nieuw te stichten Instituut voor herzenonderzoek.

In handen uwer commissie is gesteld een schrijven van Zijne Excellentie den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 28 Juli 1906 N°. 1988, afdeeling K. W. begeleidend een missive aan het gemeentebestuur van Amsterdam d.d. 21 Juli 1906 N°. $\frac{11719}{3022}$ 0.

In laatstgenoemde missive deelt het gemeentebestuur mede, dat het bereid is een Instituut voor Hersenonderzoek naast het nieuw te stichten Instituut voor Anatomie te bouwen, volgens een plan, waarvan het avant-projet de missive vergezelt.

Dit avant-projet omvat een bouwplan: photografisch atelier op de 2de verdieping, 4 localen voor hersenonderzoek van 5 bij 9 M. op de eerste verdieping, 2 dergelijke lokalen gelijkvloers, benevens de daaronder gelegen kelderverdieping. Het gemeentebestuur van Amsterdam wenscht aan die bereidverklaring de voorwaarde te verbinden „dat de te stichten instelling moet worden gesteld onder een directeur met een commissie van advies naast zich, welke commissie zou moeten bestaan uit drie hoogleeraren aan de Gemeentelijke Universiteit en wel dien in de Anatomie, dien in de Psychiatrie en dien in de Zoölogie.”

Uw commissie is van meening dat het door het gemeentebestuur van Amsterdam voorgestelde Instituut voldoet aan de voor dit doel te stellen eischen. Zij is voorts van meening, dat de voorwaarde welke de gemeente Amsterdam aan den afstand van het Instituut aan den Staat verbindt, billijk is.

Zij stelt U dus voor om den Minister te adviseeren het aanbod der gemeente Amsterdam te aanvaarden.

Natuurkunde. — De Heeren KAMERLINGH ONNES, HAGA en VAN DER STOK brengen het volgende verslag uit:

De ondergeteekenden stellen voor te antwoorden:

Onderwerp.
Renvooi dd. 18 Aug. 1906,
N°. 2169, Afd. K. W.

Aan
Zijne Excellentie den Minister
van Binnenlandsche Zaken.

Met referte aan het in hoofde aangehaalde renvooi heeft de Kon. Akad. v. Wet., Afd. Wis- en Natuurk., de eer Uwe Excellentie mede te deelen:

dat door het Kon. Ned. Meteor. Instituut te De Bilt wordt deelgenomen aan de internationale wolkenwaarnemingen op grond waarvan deze instelling alle publicaties van luchtscheepvaartkundige instellingen ontvangt. Genoemd Instituut heeft derhalve, zij het nog geen direct, dan toch middellijk belang bij de ontwikkeling van het op internationaal overleg gegronde onderzoek der hooge luchtlagen.

Ook is de mogelijkheid niet uitgesloten dat, te eeniger tijd, ook door Nederland een meer werkdadig aandeel aan dit onderzoek zal worden genomen.

Op grond hiervan meent de W. Nat. Afd. der K. A. v. W. toetreding tot het door Rusland gedane voorstel te mogen aanraden.

get. H. HAGA.
H. KAMERLINGH ONNES.
J. P. VAN DER STOK.

Sterrenkunde. — De Heer J. A. C. OUDEMANS biedt aan: „*Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in* 1908."

N.B. In de onderstaande mededeeling worden de vier sedert 1608 bekende wachters van Jupiter, naar hunne middelbare afstanden van de planeet I, II, III en IV genoemd, terwijl verder de toegevoegde letters *n* en *v* beteekenen, dat de wachter *nabij* of *veraf* is, d. w. z. zich in de naar ons toe- of van ons afgekeerde helft zijner loopbaan bevindt. De jovicentrische lengten worden, even als de geocentrische amplituden, in „teekens" en „graden" geteld, de laatsten van de bovenste geocentrische conjunctie af; de oostelijke elongatie, aangeduid door *o.e*, heeft plaats bij eene amplitude van 3^s, de westelijke elongatie *w.e*, bij eene amplitudo van 9^s.

Om den tekst niet telkens door bijzonderheden te storen, worden deze in aanteekeningen achteraan gevoegd.

EERSTE AFDEELING. BEDEKKINGEN.

In de nummers 3846 en 3857 der *Astronomische Nachrichten* komen twee berichten voor, het eerste van den Heer PH. FAUTH te Landstuhl, van 8 December 1902, met postscriptums van 29 December 1902 en 14 Januari 1903, het andere van den Heer A. A. NIJLAND te Utrecht, van 27 Februari 1903, betreffende door hen waargenomene bedekkingen van den eenen Jupiterswachter door den anderen. (1) en (2).

FAUTH herinnert bovendien nog, dat HOUZEAU in zijn *Vademecum*, blz. 666, een paar dergelijke waarnemingen vermeldt, (3) en dat STANLEY WILLIAMS den 27sten Maart 1885 te $12^u\,20^m$ den 3en wachter den 1en zag voorbijgaan, doch zóó, dat beide wachters te zamen één peervormig uiterlijk hadden. (4)

De wachters van Jupiter beschrijven loopbanen, die slechts zeer geringe hellingen maken met het vlak van Jupiter's equator. LAPLACE nam voor elken wachter een vast vlak aan, waarmede het vlak der loopbaan van dien wachter een standvastigen standhoek maakt, terwijl de snijlijn dezer beide vlakken, de knoopenlijn, eene langzame teruggaande beweging heeft. De vaste vlakken maken hoeken van slechts enkele minuten met het vlak van Jupiter's equator, en snijden het vlak der Jupitersbaan langs dezelfde knoopenlijn als het equatorvlak; terwijl de helling van dit vlak op het vlak van Jupiter's loopbaan wordt opgegeven $3°\,4'$ te bedragen, en de lengte van den klimmenden knoop, dus ook die der vaste vlakken, thans ongeveer $315\frac{1}{2}°$ is.

Om het tijdvak te vinden, wanneer ongeveer, gezien van de Aarde, bedekkingen van den eenen wachter door den anderen, mogelijk zijn, is de kennis noodig van de lengte van den klimmenden knoop en van de helling van het gemiddelde vaste vlak ten opzichte van het vlak der aardbaan. Gaat dat gemiddelde vaste vlak, verlengd, door de aarde, dan kunnen er bedekkingen van den eenen wachter door den anderen waargenomen worden, en daar de omloopstijd van Jupiter om de zon bijna 12 jaar bedraagt, zoo zullen die tijden ongeveer zes jaar uit elkander liggen; zóó namelijk, dat Jupiter den eenen keer door den klimmenden, den anderen keer door den dalenden knoop van een vlak gaat, dat, evenwijdig aan het gemiddelde vaste vlak, door het middelpunt der zon loopt.

Daar er nu in 1902 bedekkingen van den eenen wachter door den anderen zijn waargenomen, is het te verwachten, dat die verschijnselen in 1908 weêr zullen kunnen gezien worden, (5).

Het kwam mij wenschelijk voor, van die conjuncties van twee

wachters, in het gunstigste gedeelte van 1908, eene vooruitberekening te maken en daardoor hare waarneming te verlichten. De vroegere methode toch, om de loopbanen der wachters te bepalen door de herhaalde meting van hunne afstanden van, en van hunne richtingen met betrekking tot de planeet, is vervangen door het meten, (liefst met een heliometer) der afstanden en richtingen van de wachters onderling (6). De omloopstijden der wachters kan men, voor waarnemingen, die een niet te lang tijdvak omvatten, als nauwkeurig bekend onderstellen en dan biedt elke loopbaan voor een bepaald tijdvak zes onbekenden aan, indien men althans geen gebruik maakt van de derde wet van KEPPLER, en dus van elken wachter de groote as der loopbaan als onbekende invoert. Meet men afstand en richting tusschen planeet en wachter, zooals BESSEL te Koningsbergen in 1834—39 en SCHUR te Göttingen in 1874—80 gedaan hebben, dan verkrijgt men twee vergelijkingen tusschen zes onbekenden; meet men echter afstand en richting tusschen twee wachters onderling, dan is het aantal onbekenden in deze vergelijkingen dubbel zoo groot, dus = 12. En worden alle combinaties twee aan twee genomen, zooals GILL en FINLAY aan het Kaap-Observatorium gedaan hebben, dan verkrijgt men in het geheel een groot aantal vergelijkingen met 24 onbekenden, die dan door de methode der kleinste vierkanten behooren opgelost te worden. Voegt men er nu de massa's der wachters bij, die niet anders kunnen gevonden worden, dan uit de storingen, die de eene wachter in de beweging der andere wachters veroorzaakt, alsmede de afplatting van Jupiter, die door den achteruitgang der knoopenlijnen op de vaste vlakken bepaald wordt, dan wordt het aantal onbekenden op 29 gebracht (7).

De overweging nu, dat eene waarneming van eene bedekking, zelfs van eene conjunctie zonder bedekking, door iedereen verricht kan worden, die over een kijker van voldoende grootte beschikt, en dat zulk eene waarneming even goed twee vergelijkingen tusschen de onbekenden oplevert, (indien ten minste, bij eene niet-centrale bedekking of enkelen voorbijgang, het verschil in breedte, met een dradenmikrometer uitgemeten wordt), heeft mij aanleiding gegeven, voor het gunstigste gedeelte van 1908 de tijden dier conjuncties vooruit te berekenen. Blijkt het door de ondervinding, dat deze voorbereidende arbeid goede resultaten oplevert, dan zou eene voortzetting er van bij een volgend gunstig tijdvak, b.v. 1914, overweging verdienen.

Voor het oogenblik dat het gemiddelde vaste vlak, door het middelpunt der aarde gaat, vind ik, zie Aant. 5, 8 Juli 1908 te $19^{u},6$ Midd. Tijd te Greenwich.

Het is jammer dat dit tijdstip zeer ongunstig valt, want dien dag gaat Jupiter te Greenwich te $2^u 10^m$ M. T. door den meridiaan, bij eene noorderdeclinatie van 16°48',5, terwijl de zon 22°30' noorderdeclinatie heeft. Voor Utrecht vind ik bijv., voor 8 Juli, de straalbreking in aanmerking nemende:

Ondergang van den bovenrand der zon	te	$8^u 20^m$	Midd. tijd,
„ „ Jupiter	„	9 44 ,5	„ „

De kans, om eene der berekende bedekkingen waar te nemen, is voor Utrecht dus gering. Voor zuidelijkere sterrewachten is zij grooter, bijv. voor de Kaap heeft men:

Ondergang der zon	te	$5^u 5^m$	Midd. tijd
„ van Jupiter	„	7 25	„ „

Te Utrecht gaat Jupiter den 8sten Juli 1908 dus $1^u 24^m,5$ na de zon onder, aan de Kaap $2^u 20^m$.

Wij hebben nu alle conjuncties berekend, die in het tijdvak van 31 Mei tot 20 Juli 1908 tusschen de wachters van Jupiter zullen plaats vinden, en zullen in het kort den weg beschrijven, dien wij gevolgd hebben om ze op te sporen.

In den *Nautical Almanac* vindt men opgegeven de *geocentrische bovenste conjuncties*; in dien van 1908 op blz. 504 en 505.

Wij begonnen met voor elk tijdvak van twee geocentrische synodische omloopstijden van I, (nagenoeg 85 uren), eene teekening op maat te teekenen van de vier als cirkelvormig aangenomene loopbanen der wachters, en op deze banen (met behulp van verdeelde kartonnen bogen) van twee tot twee uren, de plaatsen der wachters aan te geven, en het aantal sedert het beginpunt verloopene uren er bij te zetten. Middelpuntsvereffening enz. werden verwaarloosd.

De schaal dezer teekening was 4" = 1 mm. De stralen der loopbanen waren dus: voor I 27,9 mm.; voor II 44,45 mm.; voor III 70,9 mm. en voor IV 124,7 mm.

De richting van het nulpunt van I naar het middelpunt van al de cirkels, gaf de richting naar de aarde aan, en het was nu gemakkelijk, voor elke der zes mogelijke combinaties, twee aan twee, der wachters, de gelijke uurcijfers op te zoeken, wier verbindingslijn aan die richting evenwijdig loopt; deze verbindingslijnen zullen dan nagenoeg de tijden aangeven, waarop de eene wachter voor de aarde in conjunctie met den anderen is. Het gebrek aan evenwijdigheid, in de natuur, der verbindingslijnen van de aarde met de jupiterwachters, in verschillende punten hunner loopbanen, kan hierbij gerust verwaarloosd worden. De bij deze mededeeling gevoegde

J. A. C. OUDEMANS. „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908."

Beginpunt: de geocentrische bovenste conjunctie van I, van 12 Juli 1908, te 11ᵘ 2ᵐ,3 M. T. Greenwich = 11ᵘ 11ᵐ,65 M. T. Parijs = 23ᵘ 11ᵐ,65 Burgerl. Tijd Parijs.

Schaal $\frac{1}{30\,168\,000\,000}$ 1mm. = 8″ heliocentrisch.



De eenheid is de straal van den aard-equator.

plaat stelt op halve grootte de teekening voor, dienende van 12 Juli 1908 te $11^u 2^m,3$ Midd. tijd te Greenwich tot 85 uur later. De stippellijnen duiden de verbindingslijnen der gelijkvormige cijfers aan, en stellen dus elk eene conjunctie van twee wachters voor. De overeenkomstige tijden, in deze figuur:

$6^u,2$:	IV_v	bedekt	door	III_n,
21 ,8 :	IV_v	„	„	I_n,
25 ,0 :	IV_v	„	„	II_n,
35 ,0 :	I_v	„	„	II_n,
66 ,25 :	II_v	„	„	I_n,
71 ,0 :	III_v	„	„	I_n,

werden gevoegd bij het tijdstip, dat voor de figuur als nulpunt moet aangezien worden; uit den *N. Almanac* kennen wij dat in middelbaren tijd te Greenwich; de oogenblikken der conjuncties werden daarna, door bijtelling van $12^u 9^m 21^s$, in burgerlijken tijd te Parijs omgezet, en vervolgens werden, met behulp van de *Tables écliptiques* van DAMOISEAU, 2e gedeelte, (8) van de beide wachters de elongatie en de breedte berekend, uitgedrukt in stralen van Jupiter. Kwamen nu de elongaties niet volkomen overeen, dan voerde eene lichte berekening tot den meer nauwkeurigen conjunctietijd. (9).

De correctie van den aangenomen tijd was, als de beide wachters elkander te gemoet schenen te gaan, (hetgeen het geval is als de eene ver af, de andere nabij is), meestal zeer gering; als zij daarentegen denzelfden kant opgingen, (hetgeen het geval is, als beiden „veraf" of „nabij" zijn, en dus de een den ander moet inhalen), dan bedroeg de correctie somtijds een uur of meer. Zoodra echter, in welk geval ook, de correctie 20 minuten overschreed, werd de berekening met het verbeterde tijdstip herhaald.

Hierachter volgt de lijst der gevondene resultaten. Van 31 Mei tot 19 Juli, dus in 50 dagen, hebben er 72 conjuncties plaats; jammer dat er voor éëne bepaalde plaats slechts zeer weinig zichtbaar zullen zijn. Alleen die conjuncties zijn namelijk zichtbaar, die tusschen den ondergang der zon en dien van Jupiter vallen. Voor Utrecht heeft men, in middelbaren tijd:

	Ondergang van den bovenrand der zon.	Ondergang van Jupiter.	Verschil
1908 Juni 1	$8^u 10^m$	$11^u 54^m$	$3^u 44^m$
„ 11	8 20 ,5	11 19	2 58 ,5
„ 21	8 24	10 44	2 20
Juli 1	8 24	10 9	1 45
„ 11	8 18	9 34	1 16
„ 21	8 7,5	8 59	0 51 ,5

Voor de Kaap de Goede Hoop:

1908 Juni 1	4^u59^m	9^u18^m	4^u19^m
„ 11	4 57 ,5	8 46 ,5	3 49
„ 21	4 58	8 16	3 18
Juli 1	5 2	7 46	2 44
„ 11	5 6 ,5	7 16	2 9 ,5
„ 21	5 13	6 47	1 34

Men ziet dus dat de omstandigheden voor eene zuidelijke sterrewacht aanmerkelijk gunstiger zijn dan voor eene noordelijke.

Verscheidene bedekkingen zullen niet waarneembaar zijn, doordien de gemeenschappelijke elongatie der satellieten kleiner is dan de eenheid, d. i. dan de straal van Jupiter. Dit is het geval met de nummers 8, 9, 12, 13, 15, 16, 20, 23, 39 en 64. De planeet staat in de acht eerste en in het laatste dezer gevallen tusschen de beide wachters in, zoodat de conjunctie dezer lichamen niet waarneembaar is. Bij N°. 39 zijn beide wachters, I en IV, achter de planeet verborgen [1]).

Bij andere conjuncties kan het voorkomen dat een der beide wachters in de schaduw der planeet staat, waardoor hij voor ons onzichtbaar wordt. Zoo is

(N°. 21),	den 13 Juni te	9^u28^m	M. T. Grw.,	II	verduisterd
(N°. 31),	„ 20 „ „	12 51	„ „ ,	II	„
(N°. 51),	„ 4 Juli „	18 15 ,7	„ „ ,	II	„
(N°. 65),	„ 13 „ „	12 3	„ „ ,	IV	„

Is de wachter, die bij eene conjunctie het meest naar de aarde staat, verduisterd, dan zou hij zich, uit ons standpunt gezien, op den anderen wachter geheel of gedeeltelijk als een zwart vlekje kunnen projecteeren; dit geval heeft zich echter bij onze berekeningen niet voorgedaan.

De laatste der zoo even genoemde conjuncties is misschien nog wel zichtbaar, want volgens den *N. Almanac* heeft de uittrede van IV uit de schaduw der planeet plaats te $12^u7^m15^s$ midd. tijd te Greenwich, en de voorspellingen der eklipsen van dezen wachter zijn wel eens enkele minuten fout. Weinige minuten later, nl. te 12^u16^m, treedt, volgens den *N. Almanac,* II op de schijf van Jupiter in.

[1]) De Nautical Almanac heeft voor dezen nacht, (midd. tijd te Greenwich):

IV.	Occultation	Disappearance	10^h19^m
I.	Occultation	Disappearance	11 20
I.	Eclipse	Reappearance	14 26 27^s
IV.	Occultation	Reappearance	15 18
IV.	Eclipse	Disappearance	18 5 6
IV.	Eclipse	Reappearance	22 52 2.

AANTEEKENINGEN.

(1) Het artikel van den heer FAUTH luidt, verkort aldus:

— — — Ausser den in HOUZEAU, Vademecum p. 666 aufgeführten Beobachtungen, (zie hierachter Aanteekening 3), kenne ich aus neuerer Zeit nur einen Fall: STANLEY WILLIAMS sah am 27 März 1885 an einem 7 cm. Rohre mit 102-facher Vergrösserung um 12^h 20^m den III Trabanten vor dem I, wobei beide ein birnformiges Objekt bildeten.

— — — In fünf Wochen konnte ich drei Bedeckungen verfolgen, wobei auzunehmen ist, dass mir durch schlechte Witterung etwa 10 andere Gelegenheiten entgangen sein mögen, unter denen sicher einige Bedeckungen vorkommen. Nach meiner Erfahrung können Konjunctionen der Jupitermonde unter sich weit genauer beobachtet werden als Bedeckungen durch Jupiter oder Vorübergänge vor ihm. Somit möchten die hier angegebenen Beispiele Anlass bieten, in den späteren Oppositionen Jupiters den durchaus nicht seltenen Bedeckungen oder wenigstens Berührungen und sehr nahen Konjunktionen der Trabanten unter sich mehr Aufmerksamkeit zu schenken, zumal schon kleine Instrumente zur Wahrnehmung der Phasen einer event. Bedeckung genügen. Die Beobachtungen der letzten Zeit sind:

1. Oct. 7; II bedeckt I; die S. Ränder berühren sich und I ragt im N. etwas hervor. Konj. um 9^h 16^m M. E. Z. [1])

2. Oct. 23; II bedeckt III so, dass die Mitte von II nördlich am N. Rand von III vorbeigeht; Konjunktion um 8^h 7^m 3^s,5.

3. Nov. 10; III bedeckt I so, dass der S. Rand von III die Mitte von I streift (gute Luft); Konjunktion um 7^h 33^m 20^s.

Instrument: 178 mm., Vergrösserung 178 fach.

Landstuhl, 1902 Dez. 8.

P.S. vom 29 Dezember. Am Abend des 24 Dezember gelang nochmals die Beobachtung einer Bedeckung, bei welcher I über IV hinwegzog. Aus je fünf vor- und nachher notierten Zeitmomenten folgen als Mittelwerte 6^h 24^m,25, 24^m,625, 24^m,50, 24^m,625 und 24^m,50. Die Konjunktion fand also statt 6^h 24^m 30^s.

Der Uhrstand war um 3^h mit dem Zeitsignal verglichen worden. IV Stand ein wenig südlicher als I, vielleicht um ein Viertel seines Durchmessers. Die weitaus interessantere Konjunction zwischen II und IV am 25 Dezember blieb gegenstandslos, weil IV um etwa zwei Durchmesser vorüberging,

P.S. vom 14 Januar (1903). Heute Abend, am 14 Januar, bewegte

---

[1]) D. i. Mittlere Europäische Zeit, 1^u later dan Greenwich-tijd.

sich der Trabant III über II hinweg. Die sehr schlechte Luft liess nur den ersten Kontakt auf etwa $6^h\ 2^m$ feststellen. Um $6^h\ 18^m$ mochten sich beide Komponenten so weit getrennt haben, dass dies in einem weniger schlechten Augenblick bemerkt wurde; um $6^h\ 32^m$, dem nächsten blickweisen Auftauchen der beiden Lichtpunkte, waren diese um etwa einen Durchmesser von einander entfermt. Die Bedeckung war fast genau central. PH. F.

(2) De Heer NIJLAND schreef in N°. 3857 der *Astronomische Nachrichten*:

— — — Am 15 Juli 1902 fand eine Konjunktion der Trabanten II und III statt, welche ich bei guter Luft am Refraktor (Brennweite 319 cm., Oeffnung 26 cm.) mit Vergr. 248 beobachten konnte. Es wurde III nahezu central von II bedeckt. Einige Minuten lang blieb eine feine schwarze Linie zwischen den beiden Scheibchen sichtbar, welche um $14^h 10^m 11^s$ M.Z. Utrecht verschwand and um $14^h 20^m 31^s$ wieder erschien; die Konjunktion musz also um $14^h 15^m 21^s$ stattgefunden haben. Dass diese Trennungslinie vor und nach der Konjunktion immer dieselbe Richtung hatte, und zwar scheinbar senkrecht auf der Bahnebene der Trabanten stand, mag als Beweis dafür gelten, dass der Vorübergang wirklich nahezu central gewesen ist. Dann lässt sich aber aus dieser centralen Passage die Summe der Durchmesser der Monde II und III mit erheblicher Genauigkeit bestimmen.

Nehme ich für die mittlere Entfernung ♃ — ☉ die Halbmesser der Bahnen gleich 177″,8 und 283″,6, so finde ich für die relative Bewegung von II und III zur Beobachtungszeit 13″,86 pro Stunde. Aus der beobachteten Zeitdauer von $10^m 20^s = 0^h172$ folgt dann für die Summe der beiden Durchmesser, 2″,38. Wird (siehe die Angaben von DOUGLASS, Astr. Nachr. 3500) für das Verhältniss der Durchmesser von II und III $^4/_{11}$ angenommen, so finde ich in vorzüglichen Uebereinstimmung mit den a. a. O. genannten Werten für den Durchmesser von II 0″,87 und von III 1″,51 (in mittl. Entf.).

Utrecht, 1903 Febr., 27. A. A. NIJLAND.

Aanmerking. Daar wij uit de waargenomene tijdstippen een eenigszins ander resultaat verkregen dan de Heer NIJLAND, gaf ZEd. ons, op ons verzoek, de herleiding dezer waarneming ter inzage; het bleek dat hij, om de amplituden te vinden, de vorige „Geocentric superior conjunction" met den daarop volgenden „transit" verbonden had, uit wiens „Ingress" en „Egress" de onderste conjunctie kon afgeleid worden. Er was echter eene kleine rekenfout in de herleiding ingeslopen; deze verbeterende, verkregen wij voor de relatieve beweging der beide wach-

ters 13",786, en voor de som der middellijnen 2",874. Verder is op te merken dat de verhouding 4 tot 11 blijkbaar zijn moet 4 tot 7, hetgeen ook bedoeld werd; wij verkrijgen dus voor de middellijnen 0",863 en 1",511, dus toch zoo goed als in overeenstemming met den Heer NIJLAND. Daar voor de stralen der loopbanen de waarden genomen zijn, die gelden voor den middelbaren afstand van Jupiter tot de zon, behoeven deze waarden geene verdere herleiding.

(3) Men leest in HOUZEAU, *Vademecum* (Bruxelles, 1882), p. 666: On rapporte une occultation du satellite II par le satellite III, observée à Sommerfeld, près de Leipzig, par C. ARNOLDT, le 1er novembre 1693, (WHISTON, *The longitude discovered by the eclipses*, 8°, London, 1738), et une autre du satellite IV, également par le IIIme, vue par LUTHMER à Hanovre, le 30 octobre 1822 (*Nature*, 4°, London; vol. XVII, 1877, p. 148).

1e Aanmerking. Het hier genoemde werkje van WHISTON bevindt zich in de Universiteits-Bibliotheek te Utrecht, onder de afdeeling P, 8vo, en het nummer 602. Wij hebben het herhaalde malen doorgebladerd, maar er de waarneming van C. ARNOLDT niet in vermeld gevonden. Wel prijst de S. in § XVIII de waarneming der onderlinge bedekkingen der wachters aan, merkt op, dat als zij zich bij zulk eene bedekking tegen elkander in bewegen, de relative snelheid „verdubbeld" wordt; vermeldt de klacht van DERHAM [1]) dat de waarneming dezer bedekkingen door het sterke licht van Jupiter in hooge mate bemoeielijkt wordt; merkt op, dat haar aantal in denzelfden tijd anderhalf maal grooter moet zijn, dan dat der eklipsen; verder dat LYNN in de *Philosophical Transactions* N°. 398 de eerste is, die voorgesteld heeft, deze conjuncties, die dikwijls met eene nauwkeurigheid van minder dan eene halve minuut kunnen waargenomen worden [2]), voor lengtebepaling aan te wenden, maar ik vind er geene enkele waarneming eener bedekking in vermeld, evenmin voorspeld.

Het vereischt nauwelijks betoog, dat de conjuncties, die op plaatsen, waarvan men het lengteverschil wil bepalen, zichtbaar zijn, te weinig voorkomen, om voor dat doel van veel beteekenis te zijn. In nauwkeurigheid der waarneming worden zij in alle geval door sterrebedekkingen overtroffen; maar zij kunnen toch wel met de eklipsen der wachters van Jupiter op eene lijn gesteld worden, en zouden, met betrekking tot waarnemingen van eklipsen van Jupiters wachters, in alle geval dit voor hebben, dat zij in weinige minuten een resultaat geven, onafhankelijk van de sterkte der kijkers, hetgeen bij eklipsen pas het geval is als men eene verdwijning met eene wederverschijning kan verbinden.

---

[1]) In POGGENDORFF's *Biographisches Wörterbuch*, I, 553, blijkt op den naam van W. DERHAM niet, waar die klacht te vinden is; zelfs niet, waar hij over de waarneming der Jupiterswachters geschreven heeft.

[2]) Als er maar geene undulatie der lichtbeelden bestond. Zie het slot van aanteekening 4.

2e Aanmerking. Het oorspronkelijke bericht omtrent de waarneming van LUTHMER is door hem aan BODE medegedeeld, die het in het (Berliner) *Astronomisches Jahrbuch* für 1826 blz. 224 plaatste:

„Am 30 Oct. Ab. 6^u $55'$ Bedeckung des vierten ♃ Trabanten vom dritten."

Aannemende dat Hannover 9°42′ oostelijk van Greenwich ligt, $= 38^m 48^s$, dan is dit $= 6^u\ 16^m\ 12^s$ M. T. Greenwich; ten minste in de vooronderstelling, dat het toen reeds gebruik was, de waarnemingen in middelbaren tijd aan te geven.

In *Nature*, XVII (Nov. 1877—April 1878) blz. 149 (niet 148) vindt men onder de rubriek „*Our Astronomical Column*":

„JUPITER'S SATELLITES. — Amongst the recorded phenomena connected with the motions of the satellites of Jupiter are several notices of observed occultations of one satellite by another, and of small stars by one or other of the satellites. [3]) The following cases may be mentioned: — On the night of November 1, 1693, CHRISTOPH ARNOLDT, of Sommerfeld, near Leipzig, observed an occulation of the second satellite by the third at $10^h\ 47^m$ apparent time. On October 30, 1822, LUTHMER, of Hannover, witnessed an occultation of the fourth satellite by the third at $6^h\ 55^m$ mean time.

De redacteur van *Nature* vatte de opgaaf dus ook op als in middelbaren tijd gedaan.

(4) Niet geslaagd zijnde, het verslag dezer waarneming van den heer STANLEY WILLIAMS in de te mijnen dienste staande tijdschriften te vinden, verzocht ik dien heer, die te Hove bij Brighton woont, mij omtrent de plaats, waar ik haar kon vermeld vinden, nader in te lichten. Welwillend antwoordde hij mij den 7den dezer, dat de bijzonderheden zijner waarneming van 27 Maart 1885 in het 41ste deel van den „*English Mechanic*", als ook in den jaargang 1885 van het hoogduitsche tijdschrift „*Sirius*" waren bekend gemaakt.

Maar hij had ook de goedheid mij de oorspronkelijke aanteekeningen betreffende de bewuste waarneming mede te deelen, waaruit ik het volgende ontleen:

Occultation of satellite I by satellite III.

1885 March 27, ... $2^3/_4$ inch refractor. Power 102.

$11^h 55^m$ (Greenwich mean time). They are now only *just* free from contact. III ○○ I, like an elongated star with little more than a black line between the components.

$12^h 00^m$ to $12^h 04^m$. After steady gazing I cannot see any certain

[3]) Jammer dat die „several notices of observed occultations of one satellite by another" niet nader aangeduid worden.

separation between the satellites, and therefore with this instrument aud power first contact must have occurred about 12^h02^m. Definition is very bad, however, and in a larger telescope there probably might still be a small separation between the limbs.

12^h10^m. They now appear as one elongated satellite. At times a trace of the notches is apparent.

12^h20^m. The elongation is now very nearly at right angles to the direction of the motion of the satellites, and is so slight as to be scarcely noticeable in this bad and unsteady definition. I think from the smallness of the elongation that nearly half satellite I must be concealed behind III. In this bad definition it is not possible to say which satellite is in front of the other from the appearance alone.

Het schrijven van den heer STANLEY WILLIAMS bevatte nog de merkwaardige mededeeling, dat ook hij, den 15 Juli 1902, dezelfde conjunctie had waargenomen, die de heer NIJLAND beschreven had. Zijn instrument was toen een $6^1/_2$ eng. duims reflector, met eene vergrooting van 225 maal. Ziehier de door hem medegedeelde bijzonderheden:

1902 July 15, $13^h45^m,2$. Satellites II and III are in contact. The one will occult the other. See diagram III OO II.

13^h52^m. The satellites form one disc, which has the slightest possible elongation in a north and south direction. Owing to confused seeing this disc always appeared more or less fuzzy, and it is impossible from the appearance alone to say, which satellite is occulting the other.

13^h56^m. The combined disc is considerably elongated now.

$14^h02^m.2$. Satellites II and III in contact as in diagram adjoining II oO III.

14^h04^m. Satellites clearly separated. The occultation must have been nearly central. II is a little more south now relative to III, than it was before occultation. Possibly the slight elongation noted at 13^h52^m was not real.

The above times are Greenwich mean times. Satellite III was on the farther side of its orbit moving east, II on the near side moving west. As the disc of III is larger than that of II, the phenomenon should be described as a transit of II over or across III, rather than an occultation of one satellite by the other.

N.B. Het ar. midden van $13^h45^m,2$, en $14^h2^m,2$ is $13^h53^m,7$ dus $1^m,1$ minder dan volgens de waarneming van den heer NIJLAND.

(5) Wij verwijzen, omtrent de hier onder volgende getallen, naar den „*Sterrenhemel*”, 4e uitgave, 2e deel, blz. 707 en vervolgens.

De aldaar medegedeelde helling der loopbaan van III, werd door TISSERAND in het 4e Deel zijner *Mécanique Celeste*, blz. 62, naar SOUILLART, 4″ grooter, die van de loopbaan van IV 8″ kleiner aangenomen.

Voor 1908,0 hebben wij voor de loopbaan van Jupiter, naar LEVERRIER:

Klimmende Knoop = 99°31′56″,
Helling = 1 18 29 .

Voor den eersten wachter valt het vaste vlak samen met het vlak van den Jupitersequator; het heeft dus in het begin van 1908 eene lengte van den kl. knoop op het baanvlak van Jupiter van 315°33′35″ en eene helling van 3° 4′ 9″.

Verder hebben wij voor de vier vaste vlakken, ten opzichte van het baanvlak van Jupiter:

	Lengte kl. knoop	Helling	
I	315°33′35″	3° 4′ 3″	geldende voor 1908.0.
II	315 33 35	3 3 4	
III	315 33 35	2 59 11	
IV	315 33 35	2 39 57	

Voor de drie eerste wachters is dus voor het gemiddelde vaste vlak de lengte van den kl. knoop op het baanvlak van Jupiter in het begin van 1908: 315°33′35″, de helling 3° 2′ 6″.

Ten opzichte van de respectievelijke vaste vlakken is voor 1908, naar TISSERAND:

	Lengte kl. knoop	Verandering in 1000 dagen	Helling
Voor II	122°,293	— 33°,031	0°28′ 9″
III	26 ,173	— 6 ,955	0 10 44
IV	238 ,982	— 1 ,856	0 13 51

Die hellingen hebben echter slechts eene geringe uitwerking; op 90° afstand van den klimmenden knoop gaven zij slechts afwijkingen

Voor II van 1″,46,
„ III „ 0″,89,
„ IV „ 2 ,01.

Zoowel de ligging der vaste vlakken als die van de baanvlakken der wachters te hunnen opzichte zijn het, die door de metingen, welke door den heer DE SITTER te Groningen op fotografische platen,

uitgevoerd worden, eene nauwkeurigere bepaling deelachtig zullen worden, terwijl de eventueele waarnemingen van conjuncties der wachters, liefst zelfs van bedekkingen, ook het hare daartoe kunnen bijbrengen, en tot een toets der aangenomene waarden zullen kunnen strekken.

De heeren J. C. KAPTEYN en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN hebben in de vergadering onzer Afdeeling van Maart j.l. een voorloopig bericht van den heer SITTER omtrent zijne uitmetingen aangeboden [1]). Onze berekeningen waren toen reeds te ver gevorderd om ze geheel terug te houden; toch hopen wij, dat zij, ook naast die uitmetingen, van nut zullen kunnen zijn, daar conjuncties en bedekkingen van wachters onderling met goed gevolg zullen kunnen waargenomen worden op een aantal sterrewachten, die niet voor het nemen der fotografieën zijn ingericht.

Uit de bovenstaande getallen vinden wij voor de ligging van het vaste vlak ten opzichte der ecliptica (voor 1908,0),

$$\text{Klimmende knoop } 336°48'23'' = \Omega,$$
$$\text{Helling } \quad 2\ \ 7\ 17 = \text{I},$$

Zijn nu $R_♃$, $L_♃$ en β de voerstraal, de lengte en de breedte van Jupiter, $R_♁$, $L_♁$ de voerstraal en de lengte der Aarde, (die van den N. Almanac, verbeterd voor aberratie), dan moet, als het vaste vlak door de Aarde gaat, aan de vergelijking voldaan worden.

$$R_♃ \cos\beta \sin(L_♃ - \Omega) - R_♃ \sin\beta \cot I = R_♁ \sin(L_♁ - \Omega),$$

hetgeen den 8 Juli 1908, te $19^u38^m,3$ het geval is. Alsdan is namelijk

$$\log R_♃ = 0,728527 \qquad \log R_♁ = 0,007179$$
$$L_♃ = \quad 141°23'\ 9'',0 \qquad L_♁ = 286°40'\ 3'',5$$
$$\beta \quad = + \quad 0\ 52\ 26\ ,73 \qquad \Omega = 336\ 48\ 52\ ,0$$

en onze vergelijking wordt:

$$1,423706 - 2,204190 = -0,780484$$

Verder vinden wij voor den doorgang van hetzelfde vlak door het zonsmiddelpunt:

25 April 1908 te $18^u,5$ M. T. Grw.

Voor en na dit laatste tijdstip bestaat de mogelijkheid, dat de

---

[1]) Dat voorloopig bericht kan als een vervolg beschouwd worden van de dissertatie van den heer DE SITTER, door hem den 17en Mei 1901 te Groningen verdedigd, ten titel hebbende: *Discussion of Heliometer-observations of Jupiter's satellites made by sir* DAVID GILL *K.C.B. and* W. H. FINLAY *M.A.* Uitvoeriger mededeelingen zijn ons toegezegd in de *Annals of the Royal Observatory at the Cape of Good Hope.*

heliocentrische conjuncties verduisteringen van den eenen wachter door den anderen veroorzaken; welk onderwerp wij in de tweede afdeeling dezer mededeeling hopen te behandelen.

6. BESSEL mat in 1833—39 met den heliometer afstanden van al de wachters tot de beide randen der planeet, maar bovendien positiehoeken van het middelpunt der planeet tot III en IV.

Zijn heliometer was het eerste groote instrument van deze soort uit het instituut van FRAUNHOFER; het objectief had eene opening van 70,2 par. lijn en een brandpuntsafstand van 1131,4 par. lijn = 7 voet 10 duim 3,4 lijn parijsche maat, (15,84 en 255,22 cM.) De middelbare fout eener enkele afstands-meting, (die echter eigenlijk het midden was van acht instellingen), bleek te bedragen:

voor I	± 0″26,	van het resultaat v. al de metingen, den middelb. afst. zelven,	± 0″055
„ II	± 0,24,	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	± 0,067
„ III	± 0,31,	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	± 0,042
„ IV	± 0,43,	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	± 0,045
d. gem.	± 0,31,	„ „ „ „ „ „ „ „ „ „ „	± 0,052

SCHUR, te Göttingen, gebruikte de heliometers, die, door MERZ te Munchen, ten behoeve van de waarneming der overgangen, in 1874 en 1852, van Venus voorbij de zon, waren vervaardigd. De opening der objectieven dezer instrumenten was 34 par. lijnen, dus iets minder dan de helft van die van den heliometer van Koningsbergen, de brandpuntsafstand 3½ voet (113,7 cM.).

Bij deze heliometers geschiedde de aflezing, in plaats van aan twee mikrometertrommels, door een mikroskoop, dat loodrecht gericht was op twee schalen, die aan de objectiefhelften verbonden waren, doch hiermede ging meer tijd verloren, dan met het aflezen van een trommel van een mikroskoop, zooals bij de waarnemingen van BESSEL geschiedde; daarom nam SCHUR, in plaats van het midden van acht, slechts het midden van vier instellingen, hetgeen toch eene volledige meting gaf.

De door SCHUR gevondene middelbare fouten van elke vergelijking, door één stel van vier metingen kregen, was

voor	I	± 0″,34,
„	II	± 0 ,44,
„	III	± 0 ,37,
„	IV	± 0 ,42,
dus gemiddeld		± 0″,39,

hetgeen, in aanmerking genomen den korteren brandpuntsafstand, als vrij gunstig kan aangezien worden.

Het doel, zoowel van BESSEL als van SCHUR, was niet zoozeer de bepaling van de liggingen der wachter-loopbanen, als wel die van de massa van Jupiter.

SCHUR verbeterde nog in verschillende opzichten de door BESSEL uitgevoerde herleidingen zijner metingen; hierdoor ondergingen ook de middelbare fouten der enkele bepalingen van BESSEL aanmerkelijke verminderingen, en de boven voor deze aangegevene getallen werden nu

voor	I	± 0",21,
„	II	± 0 ,10,
„	III	± 0 ,26,
„	IV	± 0 ,30,
dus gemiddeld		± 0",24.

GILL en FINLAY maten, zooals gezegd is, niet de afstanden en richtingen der wachters ten opzichte van het middelpunt der planeet, maar, naar het denkbeeld van OTTO STRUVE [1]), ten opzichte van elkander. (Het instrument waarover zij konden beschikken, een heliometer van REPSOLD van 7½ inch (19,05 cm.) opening en ruim 2 meter brandpuntsafstand, liet in volkomenheid de tot nog toe gebruikte instrumenten verre achter zich). Die waarnemingen kunnen veel nauwkeuriger uitgevoerd worden; zij hebben echter tegen zich, dat de samenstelling en de oplossing der vergelijkingen zooveel omslachtiger en tijdroovender wordt. Zoowel zij beiden, als de heer de SITTER hebben zich daardoor echter niet laten afschrikken. De waarschijnlijke fout van één gemeten afstand werd bevonden te bedragen ± 0,"087, dus aanmerkelijk minder dan die van de metingen van BESSEL. De waarschijnlijke fout der middelbare afstanden, (d. i. der onbekenden) werd zelfs door den heer de SITTER niet grooter dan ± 0"020 of ± 0"021 bevonden.

(7) Wij merken hier nog op dat de heer de SITTER het geraden achtte, eene andere keuze voor de onbekenden te doen. Wel behield hij, voor elken wachter, de lengte in de baan, de helling en den klimmenden knoop ten opzichte van een aangenomen vast vlak, maar niet de excentriciteit, de ligging van het perijovium en de massa, zoodat er voor elken wachter slechts drie elementen als onbekenden overbleven, daarentegen voerde hij correcties van de coëfficiënten van storings- of liever periodieke termen in, die dan nader tot de kennis van de massaas der wachters, van de excentriciteiten en van de ligging der assen moesten leiden, alsmede een tweetal onbekenden, nl. standvastige fouten, die door ieder der waar-

[1]) Zie het eerste bericht van HERMANN STRUVE, in den 1en Supplementband der Pulkowa-waarnemingen, 1e blz. onderaan.

nemers, Gill en Finlay, bij de metingen konden begaan zijn; in het geheel verkreeg hij ook 29 onbekenden. Het oplossen van ongeveer 400 vergelijkingen met zoo vele onbekenden, is, het vereischt geen betoog, een ontzaggelijk werk, dat toch door vereenigde krachten, ook van andere rekenaars, tot stand gekomen is.

Het mededeelen van verdere bijzonderheden van dezen belangrijken arbeid zou ons echter te ver voeren, maar wij meenden toch de vermelding er van niet te mogen nalaten. Alleen moet ik nog opmerken, dat het niet voldoende is, voor een bepaald tijdstip de ligging der baanvlakken der wachters te bepalen; want zooals reeds boven gezegd is, veranderen zij aanhoudend van stand. Die veranderingen schijnen voldoende voorgesteld te kunnen worden door een geregelden teruggang van de snijlijn (knoopenlijn) met een vast vlak, terwijl de helling dezelfde blijft.

Het is voornamelijk de afplatting van Jupiter, die dezen teruggang veroorzaakt. Maar het is wenschelijk het bedrag van dien teruggang door waarnemingen vast te stellen, terwijl dan door dat bedrag dat der afplatting gevonden wordt. De ligging der baanvlakken moet dus op verschillende tijdpunten bepaald worden; ook hierin heeft zich de heer de Sitter verdienstelijk gemaakt, zie zijne boven reeds genoemde mededeeling, aangeboden door den heeren Kapteyn en E. F. van de Sande Bakhuyzen in onze vergadering van Maart j.l.

(8) Hetzelfde boekdeel, dat de ecliptische tafels van Damoiseau bevat, die alleen op den titel vermeld zijn, behelst ook, in een tweede gedeelte, tafels *„pour trouver les configurations des satellites de Jupiter.”*

Wij hebben wel de wenschelijkheid overwogen, deze tafels niet ongewijzigd voor onze berekeningen te gebruiken, en daartoe ook kennis genomen van de onderzoekingen van Souillart, Adams, Marth, Gill, Finlay, en de Sitter, maar het bleek ons, dat onze arbeid dan in hooge mate vergroot zou worden. Wij zouden eerst nieuwe elementen voor al de wachters moeten vaststellen en nieuwe tafels berekenen, en dit zou een belangrijk oponthoud gegeven hebben, dat voor ons doel, de sterrekundigen op de mogelijke, in 1908 waar te nemen, conjuncties voor te bereiden, niet noodzakelijk zou geweest zijn.

Wij hebben dus de tafels van Damoiseau voor onze berekening gebruikt, maar hebben eerst nagegaan in hoever zij de werkelijk waargenomene conjuncties teruggaven; wij zullen zoowel mededeelen, welk verschil de tafels opleverden in de elongaties, x en x', der beide wachters, uitgedrukt in den straal van Jupiter, als hoeveel de

conjunctie, naar de tafels, vroeger of later plaats heeft dan volgens de waarneming.

Waarnemer	Datum	Bedekking van	door	Fout	Relatieve beweging per uur	Correctie der Tafel	$y'-y$
				r	r	m	r
Fauth	1902 Oct 7	II_v	I_n	0,025	1,278	+ 1,2	+ 0,04
»	» » 23	III_v	II_n	0,02	1,130	+ 1,1	+ 0,08
»	» Nov. 10	I_v	III_n	0,00	0,883	0,0	+ 0,13
»	» Dec. 24	IV_v	I_n	0,10	1,089	— 5,5	+ $0{,}00^{5}$
»	1903 Jan. 14	II_n	III_n	0,11	0,314	—19,2	— 0,05
Nijland	1902 Juli 15	III_v	II_n	0,08	0,751	+ 6,4	— 0,01
Stanley Williams	» » »	»	»	0,07	0,751	+ 5,3	— 0,01
» »	1885 Maart 27	I_n	III_n	0,00	0,292	0,0	+ 0,01

De waarneming van LUTHMER te Hannover, van den 30 October 1822 heb ik hier niet opgenomen; de berekening geeft:

	Jovic. Lengte	Amplitude	x	y en y'
III	$10^t,26°,77$	$8^t,22°,25$	$-15^r,21$	$+0^r,18$
IV	9 6,74	7 2,22	— 14, 40	— 0, 74
		Verschil	$+0^r,81$	$+0^r,92$

Er is dus in de amplituden een verschil van $0^r,81, = 0,81 \times \times 18'',37 = 14'',9$ en in de breedten van $0^r,92 = 16'',9$. Waarschijnlijk is de waarneming met onvoldoende hulpmiddelen verricht, want zoo groot kan de fout der tafels van DAMOISEAU in 1822 niet geweest zijn. Dat de breedten y en y' ongelijke teekens hebben, is daaruit te verklaren, dat de klimmende knoop van het vaste vlak $10^t 14°,37$ was, liggende tusschen de beide jovicentrische lengten in.

Daar de beide wachters denzelfden kant opgingen, was de verandering per uur van hunnen afstand ook gering, n.l. $0^r,280$; om de $0^r,81$ verschil te vernietigen, zouden dus nog bijna 3 uren noodig geweest zijn.

Maar de overige waargenomene conjuncties geven toch eene voldoende nauwkeurigheid, zoodat het te verwachten is dat de mede te deelen tafel aan haar doel zal beantwoorden.

Als eene andere proef heb ik twee bovenste conjuncties en de tusschenliggende onderste conjunctie van II, die door den *Nautical*

Almanac van 1902 zijn aangegeven, door het tweede gedeelte van DAMOISEAU nagerekend. Ik vond de tijdstippen een weinig vroeger, en wel:

de bovenste conjunctie van	10 Juli $10^u46^m,9$	M.T.	Grw.	$0^m,7$,
„ onderste „ (het midden van in- en uitgang van een voorbijgang)	16 Juli $5^u40^m,0$	„	„	$0^m,3$,
„ bovenste „	17 Juli $23^u54^m,4$	„	„	$0^m,7$,

dus alle drie nog geene minuut.

Daar nu de conjuncties in den *Nautical Almanac* met de *tables écliptiques* van DAMOISEAU berekend zijn — (in aanmerking nemende eenige geringe, door ADAMS aangegevene verbeteringen, —) zoo zijn die verschillen alleen daaraan te wijten dat in het tweede gedeelte van DAMOISEAU alleen de hoofdtermen der vereffeningen en storingen zijn opgenomen.

Even nauwkeurig gaven de tafels voor I de bovenste geocentrische conjunctie van 1 Januari 1908, te $14^u4^m,2$ M.T. Grw. = 2 Januari $2^u13^m,55$ Burgerlijke Tijd te Parijs terug; de fout bedroeg hier slechts $0^s,07$, lineair $0^r,01$, die de wachter in $0^m,5$ doorloopt.

(Zie verder over de in het tweede gedeelte van de tafels van DAMOISEAU opgenomene termen het derde aanhangsel hierachter.)

De Heer STANLEY WILLIAMS maakt in zijn brief nog gewag van eene zeldzame waarneming door hem, en tevens ook door den Spaanschen waarnemer J. COMAS te Valls, (bij Tarragona), den 14 Augustus 1891 gedaan, n.l. van het samenvallen en later weer uit elkander gaan der schaduwen, op de planeet, van twee wachters, waaruit hij besluit dat er eene eklips moet hebben plaats gegrepen. Wij zullen deze verschijnselen in het tweede gedeelte dezer mededeeling behandelen.

(9) Ziehier de tafel, die voor deze berekening gediend heeft. De eenheid is de straal van Jupiter, 18″37. SOUILLART zegt in de papieren van DAMOISEAU vermeld gevonden te hebben, dat deze dit getal aan ARAGO ontleend heeft. ARAGO moet het, volgens HOUZEAU, met een dubbele-beelden mikrometer, (uitvinding van ARAGO zelf, waarvan de sterrewacht te Utrecht een exemplaar bezit), bepaald hebben, maar de bijzonderheden der metingen zijn niet bekend. Het getal is kleiner dan hetgeen door andere metingen gevonden is, zie b.v. HOUZEAU, blz. 647—650; SEE, *Astron. Nachr.* N°. 3670 (15 Aug. 1900).

Uurverandering der elongatie x in functie van de amplitude.

	+			I		II		III		IV			—		
				r		r		r		r					
0t	0°	0t(12)	0°	0.895		0,708		0,560		0,420		6t	0°	6t	0m
					4		3		2		2				
	5	11	25	0,891		0,705		0,558		0,418			5	5	25
					10		8		7		4				
	10	11	20	0,881		0,697		0,551		0,414			10	5	20
					17		14		10		8				
	15	11	15	0,864		0,683		0,541		0,406			15	5	15
					23		18		15		11				
	20	11	10	0,841		0,665		0,526		0,395			20	5	10
					30		23		18		14				
	25	11	5	0,811		0,642		0,508		0,381			25	5	5
					36		29		23		17				
1	0	11	0	0,775		0,613		0,485		0,364		7	0	6	0
					42		33		26		20				
	5	10	25	0,733		0,580		0,459		0,344			5	4	25
					48		37		30		22				
	10	10	20	0,685		0,543		0,429		0,322			10	4	20
					53		42		33		25				
	15	10	15	0,632		0,501		0,396		0,297			15	4	15
					57		46		36		27				
	20	10	10	0,575		0,455		0,360		0,270			20	4	10
					62		49		39		29				
	25	10	5	0,513		0,406		0,321		0,241			25	4	5
					66		52		41		31				
2	0	10	0	0,447		0,354		0,280		0,210		8	0	4	0
					69		55		43		32				
	5	9	25	0,378		0,299		0,237		0,178			5	3	25
					72		57		45		34				
	10	9	20	0,306		0,242		0,192		0,144			10	3	20
					75		59		47		35				
	15	9	15	0,231		0,183		0,145		0,109			15	3	15
					76		60		48		36				
	20	9	10	0,155		0,123		0,097		0,073			20	3	10
					77		61		48		36				
	25	9	5	0,078		0,062		0,049		0,037			25	3	5
					78		62		49		37				
3	0	9	0	0,000		0,000		0,000		0,000		9	0	3	0

Wij zullen ten slotte, zie hierachter blz. 209 en 210, twee voorbeelden der berekening mededeelen; bij het ééne schijnen de wachters elkander te gemoet, bij het andere denzelden kant op te gaan.

1e Aanhangsel. *Welke is de langste duur der verschillende bedekkingen van den eenen wachter door den anderen?*

Wij hebben zoo even gezien dat het kleine verschil der elongaties van 0',11 (2''0) eerst in den tijd van $19^m,2$ tot nul herleid werd; dit kwam door de geringheid der relatieve uurbeweging der wachters. Maar als de uurbewegingen, die wij u en u' zullen noemen, der beide wachters *geheel* gelijk zijn, dan is in de breuk $\frac{x'-x}{u'-u}$ de noemer $=0$.

Het geval komt dan overeen met dat van den „Stilstand van Venus"; het is een overoud vraagstuk, de tijden daarvan te berekenen.

Stel van twee wachters de voerstralen $= r$ en r', de amplituden $= \theta$ en θ', dan is bij de bedekking

$$r \sin\theta = r' \sin\theta'.$$

De voorwaarde van gelijke schijnbare verandering der elongatie geeft nu

$$r \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = r' \cos\theta' \frac{d\theta'}{dt}.$$

Maar, als T en T' de siderische omloopstijden voorstellen, is

$$\frac{d\theta}{dt} : \frac{d\theta'}{dt} = \frac{1}{T} : \frac{1}{T'} = \frac{1}{r^{3/2}} : \frac{1}{r'^{3/2}},$$

derhalve:

$$r^{-1/2} \cos\theta = r'^{-1/2} \cos\theta',$$

dus:

$$\cos^2\theta = \frac{r}{r'} \cos^2\theta' = \frac{r}{r'} - \frac{r}{r'} \sin^2\theta'.$$

Hierbij geteld:

$$\sin^2\theta = \frac{r'^2}{r^2} \sin^2\theta'$$

verkrijgt men:

$$1 = \frac{r}{r'} + \left\{\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - \frac{r}{r'}\right\} \sin^2\theta',$$

derhalve, $\dfrac{r'}{r} = \mu$ stellende:

$$\sin^2\theta' = \frac{1 - \dfrac{1}{\mu}}{\mu^2 - \dfrac{1}{\mu}} = \frac{\mu - 1}{\mu^3 - 1} = \frac{1}{\mu^2 + \mu + 1}$$

en

$$\sin^2\theta = \frac{\mu^2}{\mu^2 + \mu + 1}.$$

De gelijkheid van de uurveranderingen der beide elongaties geldt natuurlijk slechts voor een oogenblik; spoedig komt er ongelijkheid en gaan de beide wachters toch uit elkander; het kan echter lang duren eer dit door een kijker merkbaar wordt, en het merkwaardige is daarbij, dat in dit geval de wachters niet elkaar voorbijgaan, maar dat zij na de conjunctie ten opzichte van elkander denzelfden stand aannemen als vóór de conjunctie.

Nemen wij als voorbeeld aan, eene conjunctie onder de bedoelde

omstandigheden, van I en II, terwijl de amplituden tusschen 0 en 3 teekens zijn, en de wachters zich, uit de aarde gezien, dus beide, (als men het hoofd naar de noordpool des hemels gekeerd heeft) links van de planeet bevinden, en zich ook beide van de planeet verwijderen. Vóór de conjunctie bevindt zich I rechts van II, de beweging van I is echter sneller dan die van II; bij eene amplitude van 44°39′, terwijl die van II 26°14′ bedraagt, bereikt I II, maar tevens zijn de schijnbare snelheden nu gelijk. De snelheid van I vermindert echter bij het naderen der grootste elongatie aanmerkelijk, meer dan die van II, die eene veel kleinere amplitude bezit; het gevolg is, dat na de conjunctie I achterblijft, d. i. wederom rechts van II staat, even als te voren.

Dit geval is een overgang tusschen twee andere gevallen. 1°. Als I onder dezelfde omstandigheden iets verder vooruit is, (grootere amplitude heeft) dan gaat hij II voorbij, maar wordt toch later door II ingehaald, die dan, uit de aarde gezien, achter hem om voorbijgaat. 2°. Is echter I iets minder vooruit, dan blijft hij voortdurend rechts van II, terwijl de afstand I—II wel een minimum bereikt maar niet = 0 wordt.

Om nu de vraag te beantwoorden, hoe lang de bedekking duren zal, nl. van de eerste buitenste aanraking, moet men bekend zijn met de schijnbare stralen der wachters zelven. Deze zijn bij nacht door de irradiatie grooter dan bij dag, [1]) zooals verscheidene waarnemers bevonden hebben; daar de waarnemingen op de wachters van Jupiter bijna uitsluitend bij nacht genomen worden, zullen wij de voor den nacht geldende schijnbare stralen aannemen, en wel het midden tusschen hetgeen, volgens SEE, andere waarnemers gemiddeld gevonden hebben en hetgeen hij zelf door talrijke metingen met den reuzenkijker te Washington gevonden heeft. Bij de herleiding tot de bij deze berekeningen gebruikte eenheid. nl. den straal van Jupiter's equator, is deze naar Damoiseau = 18″,37 aangenomen.

	Middellijn		Straal
I	1″,07 =	0^r,058	0^r,029
II	0 ,95	0 ,052	0 ,026
III	1 ,56	0 ,085	0 ,0425
IV	1 ,41	0 ,076	0 ,038

[1]) Zie o. a. T. J. J. SEE, Observations of the Diameters of the Satellites of Jupiter, and of Titan, the principal Satellite of Saturn, made with the 26 inch Refractor of the U. S. Naval Observatory, Washington; 19 Oct. 1901. *Astr. Nachrichten* N°. 3764, (21 Jan. 1902).

derhalve:

	Som der middellijnen	Som der stralen
I + II . .	0^r,110	0^r,055
I + III . .	0,143	0,0715
I + IV . .	0,134	0,067
II + III . .	0,137	0,0685
II + IV . .	0,128	0,064
III + IV . .	0,161	0,0805

Voor de middelbare voerstralen zullen wij in deze berekening twee decimalen meer nemen dan DAMOISEAU in zijne tafels heeft, wij zullen namelijk de waarden aannemen, die SOUILLART in DAMOISEAU's papieren gevonden heeft, (SOUILLART, 2e verhandeling, blz. 10). [1])

I	6,0491,
II	9,6245,
III	15,3524,
IV	27,0027.

Het resultaat van deze berekening is nu, dat er verloopt: tusschen de eerste aanraking en de centrale bedekking bij

I en II	I en III	I en IV	II en III	II en IV	III en IV
1^u,324,	1^u,245,	1^u,103,	2^u,263,	1^u,774,	3^u,725;

tusschen de centrale bedekking en de tweede aanraking:

1^u,204,	1^u,161,	1^u,059,	2^u,190,	1^u,767,	3^u,725,

dus te samen

2^u,528,	2^u,406,	2^u,162,	4^u,453,	3^u,541,	7^u,450,

d.i.:

2^u32^m [2])	2^u24^m,	2^u10^m,	4^u27^m,	3^u32^m,	7^u27^m.

Toch zijn dit nog niet de maxima van het tijdsverloop, dat de twee wachters zich als één hemellicht voordoen. Want het geval is denkbaar dat de kleinste afstand gelijk wordt aan $-(r+r')$,

---

[1]) Volgens SOUILLART heeft DAMOISEAU deze getallen aldus gevonden: Hij nam den middelbaren afstand van IV, naar de bepaling van POUND, aan $= 496''$,0, den straal van Jupiter $= 18''$,37; door deeling vond hij dus $r_{IV} = 27{,}00102834$; de middelbare afstanden der andere wachters vond hij door middel der siderale omloopstijden, onder toepassing der 3e wet van KEPPLER. Maar bij die middelbare afstanden telde hij de constante termen op, die de storende kracht bij de voerstralen voegt, (voor IV 0,00169832) en zoo kreeg hij 27,00272666.

Hiertoe veroorloof ik mij de opmerking, dat $496''0 : 18''{,}37$ niet is 27,00102834 maar 27,000544366. Gelukkig, dat die 4e, 5e, 6e, 7e en 8e decimaal op onze berekeningen, en vermoedelijk ook op die van SOUILLART, geen merkbaren invloed hebben; zie overigens over dergelijke getallen met vele decimalen het hieronder volgende, 2e aanhangsel.

[2]) Den 4en Juni 1908 moet, volgens de berekening, zie de tabel hierachter, eene dergelijke conjunctie van I en II plaats hebben.

d. i. dat er, tusschen twee centrale conjuncties in, eene aanraking aan de andere zijde plaats heeft. De duur wordt dan nog zeer nabij met $\sqrt{2}$ vermenigvuldigd, en wordt dus:

voor	I en II,	I en III,	I en IV,	II en III,	II en IV,	III en IV
	$3^u,574$,	$3^u,402$,	$3^u,057$,	$6^u,296$,	$5^u,006$,	$10^u,43$,
d. i.:						
	$3^u 34^m$,	$3^u 24^m$,	$3^u 3^m$,	$6^u 18^m$,	$5^u 0^m$,	$10^u 26^m$.

Deze cijfers gelden alleen voor die zeldzaam voorkomende gevallen, waarbij 1°. de bedekking centraal is, en 2°. de snelheid in de verandering der elongatie, voor beide wachters gelijk of nagenoeg gelijk is. Zoodra er eenig breedteverschil bestaat, zijn de tijdsverloopen, dat de beide wachters zich als één hemellicht vertoonen, natuurlijk geringer.

2de Aanhangsel. *Onderzoek naar de onzekerheid, die in de bepaling der synodische omloopstijden der wachters bestaat.*

Delambre zegt in de inleiding tot zijne in 1818 uitgegevene *Tables Ecliptiques*, blz. XIX: „Nous n'avons aucune observation d'éclipse antérieure à 1660". Aannemende nu, dat het tijdsverschil tusschen de eerste waargenomene eclips in 1660 en de laatste in 1816, twee jaar vóór de uitgaaf dier tafels, (de volgende in 1660, en de voorgaande in 1816 ook in rekening nemende) nog eene onzekerheid toelaat, voor de vier wachters, van 20, 30, 40 en 60 seconden, hetgeen eer te gunstig dan te ongunstig zal zijn, en dit deelende door het aantal synodische omloopen in 156 jaren, nl. 32193, 16032, 7951 en 3401, dan verkrijgt men voor de onzekerheid van een enkelen omloop

voor I	voor II	voor III	voor IV
$0^s,00062$,	$0^s,00188$,	$0^s,0050$,	$0^s,0176$.

Als Delambre die omloopstijden dus in 9 decimalen van sekunden geeft, dan moet men daaraan niet te veel waarde hechten.

Toen Damoiseau, 20 jaren na Delambre, nieuwe ecliptische tafels [1])

[1]) De tafels van Delambre en Damoiseau waren voornamelijk bestemd om te dienen bij het voorspellen, in de sterrekundige jaarboeken, van de eclipsen der wachters, namelijk door de schaduw van Jupiter. Daarom heeft hij, even als Delambre, al die termen der lengtestoringen vereenigd, die tijdens de opposities der wachters hetzelfde argument hebben, ook al verschillen die argumenten overal elders in de loopbaan. Om derhalve tafels te berekenen, waaruit de lengte en voerstralen der vier wachters op alle punten hunner loopbanen kunnen afgeleid worden, zooals Bessel ze in zijne *Astronomische Untersuchungen* en Marth ze in de *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. LI, (1891) gegeven heeft, was het noodzakelijk deze termen weer van elkander te scheiden.

voor de Jupiters-wachters uitgaf, nam hij den synodischen omloopstijd van I onveranderd aan, maar aan die der volgende bracht hij de volgende verbeteringen aan:

$$\begin{aligned} &\text{II} + 0^s{,}005\,127\,374, \\ &\text{III} + 0\,{,}029\,084\,25, \\ &\text{IV} - 0\,{,}092\,654\,834, \end{aligned}$$

die nog respectievelijk bijna 3, bijna 6 en ruim 5 maal meer bedragen dan de door ons berekende onzekerheden. Maar al vergroot men het aantal tusschenliggende jaren van 156 tot 176, dan worden de door ons geschatte onzekerheden slechts met ongeveer $\frac{1}{9}$ van haar bedrag verminderd, zoodat ons besluit is, dat van die omloopstijden slechts als zeker bepaald kunnen beschouwd worden,

die van I : 3 decimalen van sekunden,
„ „ II, III en IV 2 decimalen „ „

De Nautical Almanac, die bij het mededeelen der bovenste conjuncties der wachters ook de synodische omloopstijden opgeeft, bepaalt zich wijselijk slechts tot drie decimalen. Het aanzetten van 9 decimalen kan dus vooralsnog gerust astronomische humbug genoemd worden, waarvan nog wel enkele andere voorbeelden aangehaald kunnen worden, b.v. de uit een vroeger tijdvak welbekende 20″4451 voor de constante der aberratie en 8″57116 voor de parallaxis der zon!

3e Aanhangsel. *Beteekenis der vereffeningen (equaties), die in het 2de gedeelte van de tafels van* DAMOISEAU *zijn opnomen.*

Wij hebben boven, blz. 196, naar het 3e aanhangsel verwezen, om aan te geven, welke vereffeningen voor elken wachter in de tweede afdeeling der tafels van DAMOISEAU waren opgenomen. Wij zullen hieraan nu voldoen; daarbij beteekenen U, u_o, u_{I}, u_{II}, u_{III} en u_{IV} de middelbare lengten van de zon, van Jupiter en der vier wachters; π_o de periheliëlengte van Jupiter, π' van de Aarde, π_{III} en π_{IV} de perijovia van III en IV; Π de lengte van den klimmenden knoop van den equator van Jupiter op zijn baanvlak, eindelijk Λ_{II}, Λ_{III} en Λ_{IV} de lengten der klimmende knoopen van II, III en IV ieder op hun eigen vast vlak.

Om de volgende opgaven te kunnen verstrekken, hebben wij voor elke vereffening, de dagelijksche beweging van het argument ontleend

aan de tafels van de tweede afdeeling van Damoiseau, en het gevonden bedrag vermenigvuldigd met den synodischen omloopstijd, uitgedrukt in dagen, het daardoor verkregen product vergeleken met den factor waarmede in de eerste afdeeling, blz. (III), (V), (VII) en (VIII) de letter i (het aantal synodische omloopen) vermenigvuldigd is.

Die dagelijksche bewegingen zijn voor verscheidene vereffeningen van II, III en IV zoo na aan elkander gelijk, dat men, om ze te vinden, die, welke in een groot tijdvak, bijv. 10 jaar plaats hebben, uit de tafels moet ontleenen, (daarbij goed lettende op het aantal omwentelingen), en deze dan door het aantal dagen (10 jaren = 3652 of 3653 dagen) moet deelen. Men verkrijgt dan, na vermenigvuldiging van dit quotiënt met den synodischen omloopstijd in dagen, 360° + eene breuk; die 360° tellen niet meê; de breuk is de factor van i; en men herkent daardoor, met welke vereffening men te doen heeft. In de voorrede van de tweede afdeeling van Damoiseau zoekt men hieromtrent te vergeefs naar eenige inlichting.

I. Voor dezen wachter zijn vijf termen opgenomen. N°. 1, met eene amplitude van 1°,16, is de vereffening voor de snelheid van het licht, het argument hiervoor is $U—u_0$.

N°. 2, (amplitudo 0°,29), is de vereffening, veroorzaakt door de ellipticiteit van Jupiter's loopbaan; argument de middelbare anomalie van Jupiter $u_0 — \pi_0$.

N°. 3 is 180° + de middelbare anomalie der Aarde, $U — \pi'$; daarmede, in vereeniging met N°. 1, d.i. het verschil in lengte tusschen de zon en Jupiter, wordt in de tafel met dubbelen ingang IX één term van de geocentrische breedte van den wachter gevonden.

N°. 4, met eene amplitude = 0,°45, geeft de storing aan, die I van II ondervindt. Het argument is $u_{\mathrm{I}}—u_{\mathrm{II}}$.

N°. 5, (amplitude 3°,07), geeft de jovicentrische breedte van I, waarmede de 2e term van de geocentrische breedte gevonden wordt.

II. Zeven termen. N°. 1, 2 en 3 hebben dezelfde argumenten als bij I; van N°. 1 en 2 zijn de amplituden half zoo groot als bij I. De breedteterm, die door 1 en 3 in tafel IX gevonden wordt, is uit den aard der zaak voor alle wachters gelijk.

N°. 4, (amplitude 1°,06), geeft de storing aan, die II van III ondervindt. Het argument is $u_{\mathrm{II}}—u_{\mathrm{III}}$.

N°. 5, 6 en 7 dienen voor de breedte.

N°. 5, (amplitude 3°,05), heeft tot argument $u_{\mathrm{II}}—\pi_{\mathrm{IV}}$;
N°. 6, („ 0 ,47), „ „ „ $u_{\mathrm{II}}—\Lambda_{\mathrm{II}}$;
N°. 7. („ 0 ,03), „ „ „ $u_{\mathrm{II}}—\Lambda_{\mathrm{III}}$.

III, Negen termen. N°. 1, 2 en 3 zijn dezelfde als bij I en II; de amplituden van N°. 1 en N°. 2 zijn 0°,29 en 0°,07.

N°. 4, (amplitude 0°,07), heeft hetzelfde argument als N°. 4 bij II, maar geeft de storing aan, veroorzaakt door II.

N°. 5, (amplitude 0°,15), is de middelpuntsvereffening; argument $u_{III}—\pi_{III}$.

N°. 6, (amplitude 0°,04), heeft tot argument $u_{III}—\pi_{IV}$, en geeft dus eene storing aan van III, afhangende vau de perihelielengte van IV.

N°. 7, 8 en 9, met amplituden van 2°,98, 0°,18 en 0°,03, dienen voor de breedte. De argumenten zijn respectievelijk $u_{III}—\pi$, $u_{III}—\varDelta_{III}$ eu $v_{III}—\varDelta_{IV}$.

IV. Zeven termen.

N° 1, 2 en 3 even als bij de vorige wachters.

N° 4, (amplitude 0°,83), is de middelpuntsvereffening, argument $u_{IV} — \pi_{IV}$.

N° 5, 6 en 7 dienen voor de breedte. N° 5, (amplitude 2°,64) hangt van de middelbare anomalie van Jupiter af; het argument is dus $u_0 — \pi_0$.

N° 6, (amplitude 0°,24), van het argument van breedte van den wachter zelf; argument $u_{IV} — \varDelta_{IV}$.

N° 7, (amplitude 0°,04), is eene geringe storing, door III veroorzaakt, en heeft tot argument $u_{IV} — \varDelta_{III}$.

Wij zullen nu de tabel laten volgen der door ons berekende conjuncties.

De eerste kolom bevat het rangnummer.

De tweede kolom geeft het tijdstip der conjunctie aan, afgerond tot de naaste minuut, en uitgedrukt in burgerlijken tijd te Parijs. Deze tijd wordt van middernacht af geteld, en is door Damoiseau in zijne tafels gebruikt, zoodat de kolom het onmiddellijke resultaat der berekening aangeeft. In de gevallen, dat er juist eene halve minuut kwam, is deze ook aangezet. Door hiervan $12^u\ 9^m$, des noods $12^u\ 9^m,35$ af te trekken, werd de middelbare tijd te Greenwich gevonden, die in de tweede kolom is aangegeven.

De 4e en 5e kolom geven den bedekten en den bedekkenden wachter aan; uit de letters *v* en *n*, achteraan kan men zien of de wachter *veraf* of *nabij* is, (zie boven, blz. 179). De wachter is veraf, als de amplitude tusschen 9^t en 3^t is, nabij, als zij tusschen 3^t en 9^t is. Verder beteekent *o e* oostelijke elongatie, als de ampli-

tude zeer nabij 3 teekens is en *w e* westelijke elongatie, als de amplitude weinig van 9 verschilt.

Bij de conjunctie zijn de elongaties, geteld langs de loopbaan van Jupiter, voor beide wachters gelijk; men vindt ze in eene volgende kolom. Is de elongatie +, dan staat, voor een beschouwer in het noordelijke halfrond, de wachter in een rechtzienden kijker links, dus voor een omkeerenden kijker, zooals steeds voor de beschouwing der hemellichten gebruikt wordt, rechts van de planeet.

De drie volgende kolommen geven de ordinaten der beide wachters en hun verschil aan; noord is hier positief.

De 10e kolom bevat den duur, die de verduistering hebben zou, als de conjunctie centraal was. In enkele gevallen, (bij N°. 20, 23, 30, 48, 53 en 64), vonden wij $y' = y$, derhalve $y' - y = 0$, en als de tafels juist zijn, zijn dus deze conjuncties centraal. Maar bij de beproeving der door de heeren Fauth, Nijland en Stanley Williams waargenomene conjuncties kwam het verschil der y's niet volkomen zoo uit, als de waarnemers hadden aangegeven, en er behoeft slechts een klein verschil te zijn, om den duur der eventueele bedekking aanzienlijk te verminderen. Om dus niet eene kolom te geven, gevuld met cijfers, die kans hebben, door de waarneming gelogenstraft te worden, heb ik den wezenlijken duur, naar de berekening, weggelaten.

Boven, (blz. 183) is opgemerkt, dat zoo al, eene conjunctie voor eene bepaalde plaats, slechts voor eene korte tijdruimte, nl. tusschen den ondergang der zon, en dien van Jupiter, zal zichtbaar zijn. Hieruit volgt, dat, zal de lijst van eenig nut zijn, de sterrewachten, over den geheelen aardbodem verspreid, zullen dienen samen te werken. Om dit te bevorderen dient de laatste kolom, waarvan elke regel eene sterrewacht aangeeft, waar de op dien regel aangegevene conjunctie zichtbaar is. De sterrekundigen op andere sterrewachten, in de nabijheid, zullen dus ook wel doen, de mogelijkheid der zichtbaarheid te onderzoeken, en zich, bij gunstig resultaat van dit onderzoek, op de waarneming voor te bereiden.

RESULTATEN.

Geocentrische conjuncties der wachters onderling in Juni en Juli 1908.

No.	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Bedekte wachter	Bedekkende wachter	$x = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
1	1 Juni 5^u55^m	31 Mei 17^u46^m	I_n	II_n	$+2^r18$	-0^r16	-0^r12^5	$+0\ 03^5$	45^m	Mt. Hamilon
2	1 » 18 25	1 Juni 6 16	I_{we}	II_n	−6, 03	+0, 31	+0, 29	−0, 02	11	Kaap
3	2 » 1 55	1 » 13 46	I_v	IV_n	−3, 15	+0, 18	−0, 12	−0, 30	7	Washington
4	2 » 13 16	2 » 1 7	III_v	II_v	−8, 51	+0, 51	+0, 38	−0, 13	60	Madras, H. Kong
5	2 » 14 0	2 » 1 51	III_v	IV_n	−8, 16	+0, 51	+0, 13	−0, 38	11	Madras, H. Kong
6	2 » 14 4,5	2 » 1 55	II_v	IV_n	−8, 20	+0, 37	+0, 13	−0, 24	10	Madras, H. Kong
7	2 » 21 10	2 » 9 1	III_v	II_v	−4, 54	+0, 31	+0, 20	−0, 11	41	Utrecht
8	3 » 3 15	2 » 15 6	II_v	I_n	$-0,33^5$	0, 00	−0, 03	−0, 03	4	Tevens ☌ ♃
9	3 » 3 50	2 » 15 41	III_v	I_n	−0, 87	+0, 15	0, 00	−0, 15	6	» »»
10	4 » 14 46	4 » 2 37	I_n	II_n	$x = +5,01^5$ $x' = +5,07$	−0, 29	$-0,25^5$	$+0,03^5$		Twee aanrakingen aan denzelfden kant. II komt juist tot de centrale conjunctie, keert dan weer om. (Madras)
»	4 » 16 0	4 » 3 51	»	»	4, 34					
»	4 » 17 15	4 » 5 6	»	»	$x = +3,54$ $x' = +3,48^5$	−0, 23	$-0,19^5$	$+0,03^5$		
	De wachters zijn hier ongeveer 2½ uur met elkander verbonden.									
11	5 » 7 51	4 » 19 42	I_{we}	II_v	−6, 05	+0, 33	+0, 28	−0, 05	12	Sydney
12	6 » 16 24	6 » 4 15	II_v	I_n	−0, 48	0, 00	−0, 01	−0, 01	4	Tevens ☌ ♃
13	6 » 18 11,5	6 » 6 2	II_v	III_n	+0, 82	−0, 06	−0, 17	−0, 11	6	» »» en II geëcl.?
14	9 » 5 6	8 » 16 57	IV_v	II_v	−9, 19	+0, 59	+0, 43	−0, 16	13	Mt. Hamilton
15	10 » 4 26	9 » 16 17	IV_v	I_n	+0, 29	+0, 14	$-0,05^5$	$-0,19^5$	6	Tevens ☌ ♃
16	10 » 5 23	9 » 17 14	II_v	I_n	−0, 58	+0, 02	−0, 01	−0, 03	5	» »»
17	10 » 6 28	9 » 18 18,5	III_v	I_n	−1, 54	+0, 15	+0, 05	−0, 10	6	Mt. Hamilton
18	11 » 3 0	10 » 14 51	IV_v	III_v	+9, 01	−0, 32	−0, 52	−0, 20	183	Washington
19	12 » 10 34	11 » 22 25	I_{we}	II_n	−6, 03	+0, 32	+0, 28	−0, 04	11	Wellington
20	13 » 18 46,5	13 » 6 37	II_v	I_n	−0, 82	$+0,01^5$	$+0,01^5$	0, 00	4	☌ ♃
21	13 » 21 37	13 » 9 28	II_v	III_n	+1, 31	−0, 07	−0, 16	−0, 09	6, 5	II verduisterd (Utrecht)
22	15 » 23 55	15 » 11 46	I_{we}	II_n	−5, 99	+0, 32	+0, 29	−0, 03	10	(Atl. Oceaan)
23	17 » 7 53	16 » 19 44	II_v	I_n	−0, 92	+0, 02	+0, 02	0, 00	4	☌ ♃

No.	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij v = veraf: Bedekte wachter	Bedekkende wachter	$s = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
24	17 Juni 9^u39^m	16 Juni 21^u30^m	III_v	I_n	-2^r44	$+0^r18$	$+0^r10$	-0^r08	6^m	Wellington
25	17 » 20 47	17 » 8 38	II_v	IV_n	+7,33	−0,37	−0,52	−0,15	9	Utrecht
26	18 » 0 33	17 » 12 24	III_v	IV_n	+5,75	−0,28	−0,44	−0,16	10	(Atl. Oceaan)
27	18 » 7 30	17 » 19 21	I_v	IV_n	+2,86	−0,16	−0,30	−0,14	6,5	Sydney
28	18 » 8 28	17 » 20 18	III_v	II_{oe}	+9,52	−0,51	−0,45	+0,06	15	Sydney
29	19 » 13 13	19 » 1 4	I_{we}	II_n	−5,94	+0,32	+0,29	−0,03	9,5	Hong Kong
30	20 » 21 3	20 » 8 54	II_v	I_n	−1,07	+0,02	+0,04	+0,02	4	Utrecht
31	21 » 1 3	20 » 12 54	II_v	III_n	+1,79	−0,11	−0,15	−0,04	6,5	II verduisterd.
32	21 » 11 54	20 » 23 45	I_v	III_n	−4,21	+0,24	+0,18	−0,06	7	Hong Kong
33	23 » 2 32	22 » 14 23	I_{we}	II_n	−5,90	+0,32	+0,29	−0,03	9	Washington
34	24 » 10 13	23 » 22 4	II_v	I_n	$-1{,}22^5$	+0,03	+0,01	−0,02	4	Sydney
35	24 » 12 37	24 » 0 27	III_v	I_n	−3,21	+0,20	+0,16	−0,04	6,5	Hong Kong
36	26 » 11 17	25 » 23 8	IV_v	I_n	−5,60	+0,35	$+0{,}30^5$	$-0{,}04^5$	11	Hong Kong
37	26 » 13 43.5	26 » 1 34	IV_v	II_n	−4,61	+0,31	+0,25	−0,06	7	Madras, H. Kong
38	26 » 15 49	26 » 3 40	I_{we}	II_n	−5,84	+0,32	+0,30	−0,02	9	Madras
39	27 » 0 27	26 » 12 18	IV_v	I_v	−0,18	−0,01	+0,03	+0,04	20	♂♃
40	27 » 13 44	27 » 1 35	IV_v	I_n	+5,66	−0,17	−0,31	−0,14	11	Madras, H. Kong
41	27 » 18 56	27 » 6 47	IV_v	III_n	+7,38	−0,20	−0,45	−0,25	10	Kaap
42	27 » 23 24	27 » 11 14	II_v	I_n	−1,38	+0,03	+0,07	+0,04	4	(Atl. Oceaan)
43	28 » 14 57	28 » 2 48	I_v	III_n	−3,49	+0,20	+0,17	−0,03	7	Madras
44	30 » 5 5.5	29 » 16 56	I_{we}	II_n	−5,75	+0,31	+0,31	0,00	4	Mt. Hamilton
45	1 Juli 12 34	1 Juli 0 25	II_v	I_n	−1,53	+0,09	+0,04	−0,05	4	Hong Kong
46	1 » 15 40	1 » 3 31	III_v	I_n	−3,93	+0,23	+0,21	−0,02	5	Midden Azië
47	2 » 16 21.5	2 » 4 12	III_v	II_n	+9,14	−0,48	−0,42	+0,06	12	» »
48	3 » 18 21	3 » 6 12	I_v	II_n	−5,68	+0,31	+0,31	0,00	7	Kaap
49	3 » 20 8	3 » 7 58.5	III_{oe}	IV_n	+15,30	−0,85	−0,79	+0,06	32	Berlijn enz.
50	5 » 1 44	4 » 13 35.0	II_v	I_n	−1,67	+0,03	+0,10	+0,07	4	Washington
51	5 » 6 25	4 » 18 16	II_v	IV_n	+1,66	−0,12	−0,15	−0,03	7	II verduisterd

No.	Burgerlijke tijd te Parijs	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij v = veraf		$x = x'$	Bedekte wachter y	Bedekkende wachter y'	$y' - y$	Duur bij centrale bedekking	Waar zichtbaar
			Bedekte wachter	Bedekkende wachter						
52	5 Juli 8 2.5	4 Juli 19 53.2	II$_v$	III$_n$	+2 80	—0^{r}17	—0^{r}29	—0^{r}12	7^m	Sydney
53	5 » 17 58	5 » 5 49	I$_n$	III$_n$	—2, 75	+0, 15	+0, 15	0, 00	6	Kaap
54	5 » 17 34	5 » 5 25	I$_v$	IV$_n$	—3, 04	+0, 14	+0, 09	—0, 05	7	Kaap, Moskou
55	5 » 21 54	5 » 9 45	III$_n$	IV$_n$	—4, 85	+0, 28	+0, 16^5	—0, 11^5	79	Washington
56	7 » 7 37	6 » 19 28	I$_v$	II$_n$	—5, 60	+0, 30	+0, 31	+0, 01	8	Sydney
57	8 » 14 55	8 » 2 46	II$_v$	I$_n$	—1, 82	+0, 04	+0, 11	+0, 07	4	Madras
58	8 » 18 44.8	8 » 6 35.5	III$_v$	I$_n$	— 4, 64	+0, 26^5	+0, 25	—0, 01^5	8	Moskou
59	9 » 20 13	9 » 8 4	III$_v$	II$_n$	+8, 89	—0, 50	—0, 40	+0, 10	11, 5	Berlijn, enz.
60	10 » 20 52	10 » 8 47	I$_v$	II$_n$	—5, 53	+0, 31	+0, 30	—0, 01	7	Utrecht
61	12 » 4 6.5	11 » 15 57	II$_v$	I$_n$	—1, 97^5	+0, 04	+0, 13	+0, 09	4	Mt Hamilton
62	12 » 20 57	12 » 8 47	I$_v$	III$_n$	—1, 95	+0, 11	+0, 13^5	+0, 02^5	6	Utrecht
63	13 » 5 25	12 » 17 15	IV$_v$	III$_n$	—6, 50	+0, 35	+0, 40	+0, 05	10, 5	Pacifiek
64	13 » 20 39	13 » 8 30	IV$_v$	I$_n$	—0, 27	+0, 05	+0, 05	0, 00	6	♂ ♃
65	14 » 0 12.5	13 » 12 3	IV$_v$	II$_n$	+1, 20^5	—0, 01^5	+0, 01^5	+0, 03	4	IV verduisterd.
66	14 » 10 8.5	13 » 21 59	I$_v$	II$_n$	—5, 42	+0, 29	+0, 32	+0, 03	7	Perth
67	15 » 17 17	15 » 5 7	II$_v$	I$_n$	—2, 12	+0, 04	+0, 14	+0, 10	4	Kaap
68	15 » 22 1	15 » 9 51	III$_v$	I$_n$	—5, 27	+0, 28	+0, 30	+0, 02	9	Berlijn, enz.
69	17 » 23 11	17 » 11 2	I$_v$	II$_n$	— 5, 34	+0, 29	+0, 31^5	+0, 02^5	6, 5	Charkow
70	19 » 6 30	18 » 18 21	II$_v$	I$_n$	—2, 22	+0, 06	+0, 14	+0, 08	4	Pacifiek
71	19 » 15 5	19 » 2 56	II$_v$	III$_n$	+3, 77	—0, 22	—0, 15	+0, 07	7	Midden-Aziё
72	19 » 23 56	19 » 11 47	I$_v$	III$_n$	—1, 13^5	+0, 05	+0, 12	+0, 07	6	Astrakan

No.
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72

1908 Juni
2d
12u
9m,3

1
2
4

S—G

Amplitude

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over: *„Het voortbrengen van iedere gewenschte lichtverdeeling in de omgeving van absorptielijnen".*

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

Natuurkunde. — Mededeeling over het Congrès international pour l'étude des régions polaires, gehouden te Brussel van 7—12 September l.l.

De Heer VAN DER STOK brengt verslag uit omtrent de uitkomsten van het „Internationaal Congres voor de studie der Poolstreken" waarop hij de Akademie heeft vertegenwoordigd. Eene formeele Associatie van Staten is niet tot stand gekomen; er heeft zich echter eene „Internationale Poolcommissie" geconstitueerd, waarvan de Statuten aan de verschillende Regeeringen en aan de Internationale Associatie der Akademies zullen worden aangeboden.

Deze Statuten geven ruimschoots gelegenheid tot verdere ontwikkeling in verschillende richting.

Wiskunde. — De Heer JAN DE VRIES biedt een mededeeling aan, getiteld: *„Quadratische omwentelingscomplexen."*

§ 1. Wanneer de stralen van een complex gerangschikt kunnen worden in regelscharen van omwentelingshyperboloïden met dezelfde as, dan is de complex bestand tegen wenteling om die as. Bevat zulk een *omwentelingscomplex* Ω ook de tweede regelschaar van elk der bedoelde hyperboloïden, dan is hij symmetrisch ten opzichte van elk vlak door zijn as, en kan als *symmetrische omwentelingscomplex* onderscheiden worden. In dit geval verkeeren de raaklijnencomplexen van omwentelingsoppervlakken.

Wij bepalen de algemeene vergelijking der quadratische omwentelingscomplexen met as OZ in de stralencoördinaten

$$p_1 = x - x' \quad , \quad p_2 = y - y' \quad , \quad p_3 = z - z',$$
$$p_4 = yz' - zy' \quad , \quad p_5 = zx' - xz' \quad , \quad p_6 = xy' - yx'.$$

Door substitutie van

$$p_1 = \alpha\bar{p}_1 - \beta\bar{p}_2 \quad , \quad p_2 = \beta\bar{p}_1 + \alpha\bar{p}_2 \quad , \quad p_3 = \bar{p}_3,$$
$$p_4 = \alpha\bar{p}_4 - \beta\bar{p}_5 \quad , \quad p_5 = \beta\bar{p}_4 + \alpha\bar{p}_5 \quad , \quad p_6 = \bar{p}_6,$$

(waar $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ is) in de algemeene quadratische vergelijking vindt men gemakkelijk, dat de vergelijking van een Ω slechts termen met

$$(p_1^2 + p_2^2),\ (p_4^2 + p_5^2),\ p_3,\ p_6,\ (p_1 p_5 - p_2 p_4) \text{ en } (p_1 p_4 + p_2 p_5)$$

kan bevatten. Daar de laatste combinatie, ten gevolge van een bekende identiteit, door $-p_3 p_6$ kan vervangen worden, heeft men

voor Ω de vergelijking

$$A(p_1^2+p_2^2)+Bp_3^2+2Cp_3p_6+Dp_6^2+E(p_4^2+p_5^2)+2F(p_1p_5-p_2p_4)=0. \quad (1)$$

Is $C=0$, dan verandert (1) niet, als men x door $-x$ vervangt; men heeft dan een *symmetrischen* complex.

De stralencoördinaten

$$q_1=u-u' \quad , \quad q_2=v-v' \quad , \quad q_3=w-w' \quad ,$$
$$q_4=vw'-wv' \quad , \quad q_5=wu'-uw' \quad , \quad q_6=uv'-vu' \, ,$$

waar u, v en w de coördinaten van een vlak voorstellen, zijn met de coördinaten p verbonden door de bekende betrekkingen

$$p_1:q_4=p_2:q_5=p_3:q_6=p_4:q_1=p_5:q_2=p_6:q_3.$$

Dus kan Ω ook voorgesteld worden door

$$E(q_1^2+q_2^2)+Dq_3^2+2Cq_3q_6+Bq_6^2+A(q_4^2+q_5^2)+2F(q_2q_4-q_1q_5)=0 \, . \, . \quad (2)$$

Deze vergelijking ontstaat uit (1) door verwisseling van p_k met q_k, en van A, B, C, D, E, F met $E, D, C, B, A, -F$.

§ 2. De complexkegel van het punt (x', y', z') heeft tot vergelijking

$$A(x-x')^2+A(y-y')^2+B(z-z')^2+2C(y'x-x'y)(z-z')+D(y'x-x'y)^2+$$
$$+E(z'y-y'z)^2+E(z'x-x'z)^2+2F(x-x')(x'z-z'x)+2F(y-y')(y'z-z'y)=0. \quad (3)$$

Om de vegelijking van het singuliere oppervlak te vinden, beschouwen we de complexkegels, waarvan de toppen in XOZ liggen, en schrijven de voorwaarde neer welke uitdrukt dat de doorsnede van zulk een kegel met XOY in twee rechten ontaardt. Na afzondering van den te verwerpen factor z^2, en vervanging van x^2 door $x^2+y^2=r^2$, verkrijgt men de vergelijking

$$D(AE-F^2)r^4+(AE+BD-C^2-F^2)r^2(Ez^2-2Fz+A)+$$
$$+B(Ez^2-2Fz+A)^2=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Daar deze ontbonden kan worden in twee factoren van den vorm $Lr^2+M(Ez^2-2Fz+A)$, bestaat het *singuliere oppervlak* Σ *uit twee quadratische omwentelingsoppervlakken.*

Deze raken elkaar in de cyclische punten I_1 en I_2 van het vlak XOY en in de punten B_1 en B_2 op OZ, die bepaald worden door

$$Ez^2-2Fz+A=0.$$

De beide oppervlakken snijden elkaar volgens de vier isotrope rechten, welke door de vergelijkingen

$$x^2+y^2=0 \text{ en } Ez^2-2Fz+A=0 \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$

worden aangewezen.

Is Ω symmetrisch ($C=0$), dan hebben de beide deelen van het singuliere oppervlak tot vergelijkingen

$$(AE-F^2)(x^2+y^2)+B(Ez^2-2Fz+A)=0, \quad . \; . \quad (6)$$
$$D(x^2+y^2)+Ez^2-2Fz+A=0 \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Heeft men $B=0$ en $D=0$, dan ontaardt Σ in de vier vlakken (5), en is Ω een bijzondere *tetraedrale complex.*

Uit (3) wordt gemakkelijk gevonden dat de complexkegels der punten B_1, B_2, I_1 en I_2 in dubbel te tellen stralenbundels ontaarden. Deze punten zullen *bisingulier* genoemd worden.

§ 3. De complexstralen, die op een rechte l rusten, raken aan een oppervlak, dat de meetkundige plaats is van de toppen der complexkegels welke door l worden aangeraakt. Dit *axiale oppervlak* is in het algemeen van den vierden graad en de vierde klasse, en bezit acht dubbelpunten [1]).

Wij zullen het axiale oppervlak van OZ bepalen. De snijpunten $(0, 0, z')$ van een willekeurigen complexkegel met OZ worden aangewezen door de vergelijking

$$[E(x^2+y^2)+B]z'^2-2[F(x^2+y^2)+Bz]z'+[A(x^2+y^2)+Bz^2]=0.$$

Deze heeft twee gelijke wortels, als voldaan is aan

$$\{(AE-F^2)(x^2+y^2)+B(Ez^2-2Fz+A)\}(x^2+y^2)=0 \quad . \quad (8)$$

Het axiale oppervlak van OZ bestaat dus uit de twee isotrope vlakken door de as en een quadratisch omwentelingsoppervlak, dat men het *meridiaanoppervlak* zou kunnen noemen. Is Ω symmetrisch, dan maakt het, zooals uit (6) blijkt, deel uit van het singuliere oppervlak.

Ook het axiale oppervlak der oneindig ver in XOY gelegen rechte l_∞ ontaardt in twee vlakken en een quadratisch oppervlak. Men vindt zijn vergelijking het gemakkelijkst door de beschouwing van de complexstralen loodrecht op XOZ. Uit $x=x'$, $z=z'$ volgt $p_1=0$, $p_3=0$, $p_4=zp_2$, $p_5=0$, $p_6=-xp_2$. Door substitutie in (1) vindt men

$$(A+Dx^2+Ez^2-2Fz)p_2^2=0,$$

en hieruit voor het bedoelde oppervlak

$$D(x^2+y^2)+Ez^2-2Fz+A=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Voor den symmetrischen complex is dit *parallelopppervlak*, blijkens (7), het tweede blad van het singuliere oppervlak.

De vlakken der stralenbundels van de bisinguliere punten B_1, B_2 vormen het ontbrekende bestanddeel van het axiale oppervlak van l_∞. Men kan dit aantoonen door de vergelijking te bepalen van het axiale oppervlak der rechte $z'=0$, $y'=b$, en daarin $b=\infty$ te stellen. Men vindt dan

$$(Ez^2-2Fz+A)\{D(x^2+y^2)+Ez^2-2Fz+A\}=0 \quad . \quad (10)$$

Het *meridiaanoppervlak*, het *parallelopppervlak* en de beide deelen

1) STURM, *Liniengeometrie* III, p. 3 en 6.

van het *singuliere oppervlak* behooren tot een zelfden bundel, die den scheeven vierhoek $B_1I_1B_2I_2$ tot basis heeft.

Als in de vergelijking van den complexkegel de som der coëfficienten van x^2, y^2 en z^2 gelijk is aan nul, dan vormen de ribben ∞^1 drietallen van onderling loodrechte stralen. De toppen der tot Ω behoorende *triorthogonale* (gelijkzijdige) *complexkegels* vormen het omwentelingsoppervlak

$$(D + E)(x^2 + y^2) + 2Ez^2 - 4Fz + (2A + B) = 0 \quad . \quad . \quad (11)$$

Het heeft met elk der deelen van Σ twee cirkels gemeen. Deze bevatten de toppen der complexkegels welke in *twee loodrechte vlakken* ontaarden.

§ 4. De afstand l_0 van een rechte tot OZ wordt bepaald door

$$l_0^2 = \frac{p_6^2}{p_1^2 + p_2^2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

de hoek λ tusschen straal en XOY door

$$tg^2\lambda = \frac{p_3^2}{p_1^2 + p_2^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

Derhalve levert de voorwaarde $l_0 tg\lambda = a$ den complex

$$p_3 p_6 = a(p_1^2 + p_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Hier hebben wij een eenvoudig voorbeeld van een *symmetrischen omwentelingscomplex*.

De vergelijking

$$p_3^2 = a(p_1^2 + p_2^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

bepaalt een complex Ω, waarvan de stralen een constanten hoek met de as vormen, dus een oneindig ver gelegen cirkel snijden.

De vergelijking

$$a^2 p_3^2 = p_4^2 + p_5^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

levert een complex Ω, waarvan de stralen den cirkel $x^2 + y^2 = a^2$ snijden. Immers XOY snijdt elken complexkegel in dezen cirkel.

Stelt l den afstand van een straal tot O voor, dan is

$$l^2 = \frac{p_4^2 + p_5^2 + p_6^2}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Wordt XOY over een afstand c in zijn normaalrichting verschoven, dan gaan p_4 en p_5 over in $(p_4 - cp_2)$ en $(p_5 + cp_1)$. Voor den afstand l_1 van een straal tot het punt $(0, 0, c)$ heeft men dus

$$l_1^2 = \frac{(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) + 2c(p_1p_5 - p_2p_4) + c^2(p_1^2 + p_2^2)}{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}. \quad (18)$$

Wordt hierin c vervangen door $-c$, dan vindt men een betrekking voor den afstand l_2 van den straal tot het punt $(0, 0, -c)$.

De vergelijking

$$\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 = \beta$$

levert een complex Ω met de vergelijking

$$\{(\alpha_1 + \alpha_2) c^2 - \beta\} (p_1^2 + p_2^2) - \beta p_3^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)(p_4^2 + p_5^2 + p_6^2) +$$
$$+ 2 (\alpha_1 - \alpha_2) c (p_1 p_5 - p_2 p_4) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Deze symmetrische complex is zeer uitvoerig, en op elementaire wijze, behandeld door J. NEUBERG (*Wiskundige Opgaven*, IX, p. 334—341, en *Annaes da Academia Polytechnica do Porto*, I, p. 137—150). Het bijzondere geval $\alpha_1 l_1 + \alpha_2 l_2 = 0$ beschouwde F. CORIN (*Mathesis*, IV, pp. 177—179, 241—243).

Voor $l_1 = l_2$ vindt men eenvoudig

$$p_1 p_5 - p_2 p_4 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

Deze complex bevat de stralen, die evenver van twee vaste punten verwijderd zijn. Daar c niet in de vergelijking voorkomt, kunnen de vaste punten vervangen worden door elk tweetal punten op de as, die O tot midden hebben. [1])

§ 5. Bij een verplaatsing in de richting van OZ veranderen de stralencoördinaten p_1, p_2, p_3 en p_6 niet, terwijl men heeft

$$p_4 = \bar{p}_4 + h\bar{p}_2 \quad \text{en} \quad p_5 = \bar{p}_5 - h\bar{p}_1,$$

dus

$$p_1 p_4 + p_2 p_5 = \bar{p}_1 \bar{p}_4 + \bar{p}_2 \bar{p}_5.$$

De vormen $(p_4^2 + p_5^2)$ en $(p_1 p_5 - p_2 p_4)$ zijn nu *niet* invariant.

Wanneer, in de vergelijking (1) van den complex Ω, de coëfficienten E en F nul zijn, dan wordt Ω dus in zich zelf verplaatst door elke schroefbeweging met as OZ. De complex kan dan *helicoïdaal* genoemd worden.

Het singuliere oppervlak heeft nu tot vergelijking

$$(BD - C^2)(x^2 + y^2) + AB = 0; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

het bestaat derhalve uit een omwentelingscylinder en het dubbel gelegde vlak in het oneindige.

§ 6. Door homographische vervorming kan de complex Ω omgezet worden in een quadratischen complex met *vier bestaanbare bisinguliere punten.*

Neemt men deze tot hoekpunten van een coördinatenviervlak $O_1 O_2 O_3 O_4$, dan is het niet moeielijk aan te toonen dat de vergelijking van zulk een complex dezen vorm heeft:

$$A p_{12}^2 + B p_{34}^2 + 2 C p_{12} p_{34} + 2 D p_{13} p_{42} + 2 E p_{14} p_{23} = 0. \quad (22)$$

---

[1]) Deze complex is tetraedraal. Zie STURM, *Liniengeometrie*, I, p. 364.

Voert men weer de voorwaarde in dat de doorsnede van den complexkegel met een der coördinaatvlakken uit twee rechten bestaat, dan vindt men, na eenige herleiding, voor het *singuliere oppervlak*

$$A(D-E)y_1^2y_2^2+2\{AB-(C-D)(C-E)\}y_1y_2y_3y_4+B(D-E)y_3^2y_4^2=0 \quad . \quad (23)$$

Dit bestaat dus uit twee quadratische oppervlakken die de vier rechten O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3 en O_2O_4 gemeen hebben.

Voor $A=0$, $B=0$ is de complex blijkbaar tetraedraal.

Voor $D=E$ is de vergelijking herleidbaar tot

$$A p^2_{12} + B p^2_{34} + 2(C-D) p_{12} p_{34} = 0,$$

en wijst dan twee lineaire complexen aan.

Voor de axiale oppervlakken der ribben O_1O_2 en O_3O_4 vindt men

$$x_3 x_4 \{ 2A x_1 x_2 + (D-E) x_3 x_4 \} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

en

$$x_1 x_2 \{ 2B x_3 x_4 + (D-E) x_1 x_2 \} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Voor een punt $(0, y_2, 0, y_4)$ der ribbe O_2O_4 wordt de complexkegel voorgesteld door

$$A y_2^2 x_1^2 + 2(C-E) y_2 y_4 x_1 x_3 + B y_4^2 x_3^2 = 0 \,; \quad . \quad . \quad (26)$$

hij bestaat dus uit twee vlakken door O_2O_4.

Hieruit blijkt dat de ribben O_1O_3, O_1O_4, O_2O_3, O_2O_4 *dubbelstralen* van den complex zijn. [1])

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUIZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer A. PANNEKOEK. „*De samenhang van spectrum en kleur der sterren*".

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN).

Een nauwe samenhang tusschen de kleur en het spectrum der sterren is reeds lang bekend. De sterren van het 1ste 2de en 3de spectraaltype worden doorgaans de witte, de gele, en de roode sterren genoemd, al is dan ook, nauwkeurig gesproken, de kleur der z. g. gele sterren een zeer witachtig, onverzadigd geel, en die van de z.g. roode sterren helder geel, met zeer weinig rood gemengd. In een te Dusseldorf in 1900 gehouden voordracht [2]) hebben wij aangewezen, dat bij verschillende gloeiingstoestanden juist deze kleuropeenvolging ontstaan moet. Neemt men de kleur voor een zekere hooge temperatuur als wit aan, dan vormen de kleuren bij dalende temperatuur in het driehoekig kleurendiagram een lijn, die van wit eerst recht

[1]) Zie STURM, *Liniengeometrie* III, pp. 416 en 417.

[2]) Die Farben der Gestirne. Mittheilungen der V. A. P. Jahrg. 10. S. 117.

op geel van λ 587 aanloopt, maar gaandeweg, naarmate de kleur verzadigder wordt, naar het rood ombuigt, en met licht van grooter golflengte in steeds stijgende verzadiging overeenkomt. Bij stijgende temperatuur daarentegen loopt de kleurlijn van wit naar de tegenoverliggende zijde, naar blauw van λ 466.

Aangezien de kleuren, die uit wit licht door verschillende graden van atmospherische absorbtie ontstaan, ook nagenoeg deze zelfde lijn volgen, mag men verwachten, dat de kleuren der zelflichtende hemellichamen in het algemeen op deze gloeiingslijn of er dichtbij liggen; op deze lijn worden zij dan door één coordinate, één getal, bepaald. Dit maakt begrijpelijk, eenerzijds waarom de aanduiding door letters en woorden, of de meting met ZÖLLNER's colorimeter, die geheel andere kleuren voortbrengt, zoo weinig resultaat heeft opgeleverd, anderzijds, waarom de schaal van SCHMIDT, die de kleuren door één serie van cijfers aanduidt, waarbij 0 wit, 4 geel, 10 rood heet, in de praktijk de meeste goede uitkomsten heeft opgeleverd. Naar deze methode is ook de beste en volledigste lijst van sterkleuren vervaardigd, die H. OSTHOFF te Keulen in de A. N. Bd. 153 (Nr. 3657—58) in 1900 publiceerde. Deze lijst, waarin de kleuren van alle sterren tot de 5de grootte tot op een tiende kleurklasse is aangegeven, als vrucht van systematische schattingen gedurende 14 jaren, stelt ons in staat, de betrekking tusschen spectrum en kleur nauwkeurig vast te stellen.

In een vorige mededeeling [1]) is er op gewezen, dat wij niet weten, waar ergens in de opeenvolgende reeks van spectra van het Oriontype en het eerste type de hoogste temperatuur, of in elk geval het grootste lichtuitstralend vermogen te vinden is. Men mag aannemen, dat het daar is, waar de kleur het witst is; spectraalphotometrische metingen, waarnaar in die mededeeling verwezen werd, ontbreken tot nog toe, maar voor dit doel kunnen zij zeer goed door kleurschattingen vervangen worden; dit is de reden voor het onderzoek, waarvan de resultaten hier volgen.

Het spreekt vanzelf, dat, waar een zoo ver mogelijk in onderdeelen gaande specificatie der spectra noodig was, om als argument voor de kleur te dienen, de klassen van MAURY ook hier gebruikt werden. Om voor elke klasse een gemiddelde kleur op te kunnen maken, moeten echter de waargenomen kleuren voor twee invloeden gecorrigeerd worden, die ze wijzigen, nl. den invloed van de helderheid, en dien van de hoogte boven den horizon. Quantitatief is over het bedrag dezer invloeden niets bekend; proefnemingen van OSTHOFF

[1]) De lichtkracht van sterren van verschillend spectraaltype. Zittingsversl. Dl. XV blz. 94.

zelf, om den invloed der helderheid te bepalen, leverden tot nog toe niet veel resultaten. Zij moeten hier dus uit het voor ons onderzoek dienende materiaal van sterkleuren zelf afgeleid worden; dit kan geschieden in de zeer aannemelijke onderstelling, dat de werkelijke kleur binnen elke spectraalklasse nagenoeg een konstante en onafhankelijk van de helderheid is.

§ 2. De sterren, uit de lijst van Osthoff, die in den spectraalcatalogus van Maury voorkomen, werden naar de klasse gerangschikt en daarna (met uitsluiting, zooals steeds bij dit onderzoek, van die, welke *c*, *ac*, *C*, *P* of *L* gemerkt zijn) telkens voor een paar klassen tegelijk naar de helderheid gerangschikt en tot middelwaarden vereenigd. Deze middelwaarden moeten dan den invloed van de helderheid op de kleur toonen; zij zijn in de volgende tabellen samengesteld:

Klasse III—VI		Klasse VII—VIII		Klasse IX—XII	
Gr.	Kl.	Gr.	Kl.	Gr.	Kl.
1.78	1.46 (5)	0.1	1.2 (3)	1.0	2.7 (2)
2.80	2.27 (6)	2.4	1.83 (6)	2.69	2.97 (9)
3 35	1.96 (5)	3.17	2.59 (7)	3 18	3.06 (8)
3.70	2.86 (7)	3.55	2.57 (6)	3.65	3.73 (10)
4.00	2.47 (8)	3.82	2.95 (6)	3.85	3.40 (8)
4.15	2.91 (7)	4.00	2.86 (5)	4.10	3.69 (9)
4.50	2.60 (9)	4 10	2.60 (7)	4 29	4 17 (7)
4.95	2.42 (11)	4 20	2 50 (5)	4.65	3 79 (8)
		4.36	2.96 (5)	5.10	3.34 (9)
		4.62	2 72 (4)		
		4.96	2.66 (5)		

Klasse XIII—XIV		Klasse XV		Klasse XVI—XVIII	
Gr.	Kl.	Gr.	Kl.	Gr.	Kl.
0.2	3.4 (1)	0.7	4.5 (2)	0.95	6.45 (2)
3.07	4 71 (7)	2 12	5.50 (6)	2.50	6.40 (6)
3.54	4.61 (7)	2.92	5.66 (9)	3.22	6.65 (6)
3.98	4.72 (9)	3.37	5.74 (9)	3.72	6.65 (4)
4 24	4.88 (8)	3.55	5.46 (9)	4.15	6.75 (6)
4.84	4.88 (8)	3.75	5.71 (8)	4.63	7.07 (7)
		3.90	5.55 (10)	4.88	7.22 (9)
		4.00	5 70 (7)	5.28	7.22 (8)
		4.14	5.85 (11)		
		4.45	6.08 (6)		
		4.87	6.43 (7)		

In al deze reeksen is een toenemende verdieping van de tint bij afnemende helderheid duidelijk te zien. Men kan trachten, de kleur als lineaire functie van de helderheid voor te stellen; langs graphischen weg werd gevonden

Kl.	III—VI	$c = 2.15 + 0.35$	$(m - 3)$
„	VII—VIII	$2.27 + 0.36$	„
„	IX—XII	$3.17 + 0.39$	„
„	XIII—XIV	$4.45 + 0.42$	„
„	XV	$5.47 + 0.39$	„
„	XVI—XVIII	$6.60 + 0.20$	„

Bij alle groepen, behalve de laatste, wordt dus vrijwel dezelfde coëfficent gevonden. De waarde der coëfficienten wordt hoofdzakelijk bepaald door het verschil in waargenomen kleur tusschen de zeer heldere sterren van de 1ste grootte, en de groote massa van de 3de en 4de grootte. Om nu de coëfficient der laatste groep met de andere in overeenstemming te brengen, is het noodig, de schijnbare kleur van α Tauri en α Orionis 5,6 aan te nemen in plaats van 6,4 en 6,5, de werkelijke schattingen. Een zoo groote fout is voor deze heldere, dikwijls geschatte sterren niet wel aan te nemen; de afwijkende coëfficient bij de roode sterren moet dus vooreerst als reeël aangenomen worden, al is een verklarig daarvoor op het oogenblik moeilijk te geven.

Vereenigt men nu de uitkomsten van de vijf eerste groepen, door de afwijkingen van de voor $m = 3$ geldende constanten der formules naar de helderheid te rangschikken en daarvan weer middelwaarden te nemen, dan vindt men:

m	$c - c_3$	B_1	B_2	$W - B_1$	$W - B_2$
0.3	—1.03	—1.10	—0.91	+.07	—.12
1.6	—0.63	—0.54	—0.47	— 09	— 16
2.91	+0.02	+0.04	—0.02	— 02	+ 04
3.73	+0.32	+0.31	+0.27	+ 01	+ 05
4.12	+0.48	+0.40	+0.39	+ 08	+ 09
4.73	+0.50	+0.52	+0.60	— 02	— 10

Een lineaire betrekking $c = c_3 + 0{,}34\,(m - 3)$ geeft de berekende waarden onder B_2 en de afwijkingen $W - B_2$. Deze zijn systematisch verdeeld en duiden een niet-lineaire betrekking aan. Een kromme lijn, die zoo goed mogelijk aan de middelwaarden aansluit, geeft de berekende waarden B_1 en de afwijkingen $W - B_1$. Zij geeft voor grooter helderheid een sterker, voor zwakker helderheid een zwakker

verloop met de helderheid. In alle zes groepen, behalve de vijfde en zesde vertoont zich het verschijnsel, dat de laatste, voor de zwakste helderheid geldende getallen een daling van het kleurcijfer vertoonen, t. o. v. de vorige getallen.

Een verklaring voor dit verschijnsel kan gevonden worden in de medewerking van de kleurlooze schemeringsperceptie bij zwakke lichtbronnen. Bij zwakke sterren is in het geheel geen kleur meer te zien; hier wordt de kleurperceptie bijna geheel vervangen door een kleurloozen (d.i. witachtigen) lichtindruk. Bij sterren, die tot deze grens naderen, zal de kleurindruk sterk gemengd zijn met de kleurloozen, daardoor bleeker schijnen en door een lager cijfer aangeduid worden. Daar bij meer rood gekleurde sterren deze kleurlooze indruk relatief veel zwakker is, zal bij zulke sterren de verbleeking van de kleur eerst bij aanmerkelijk geringer helderheid optreden; op die wijze wordt verklaard, waarom de 5de en 6de groep deze daling niet vertoonen. Of hier voor zwakker sterren het verschijnsel optreedt, is niet uit te maken, daar de spectraal-catalogus van MAURY geen zwakker sterren omvat.

Voor het praktisch gebruik, het reduceeren van de waargenomen kleuren op een zelfde helderheid, is het vrijwel onverschillig, welke van de beide betrekkingen aangenomen wordt, zoolang men binnen bepaalde grenzen van helderheid, bv. tusschen de grootten 1 en 5, blijft. Voor de gemakkelijker reductie is de bovenstaande lineaire formule voor de 5 eerste groepen (tot en met klasse XV) gebruikt, terwijl voor de roodere klassen 0,20 als hèlderheidscoëfficient aangenomen werd.

Ter verklaring van dit reeds lang bekende verschijnsel, dat bij afnemende helderheid de kleur dieper wordt, heeft HELMHOLTZ in zijn *Physiologische Optik* een theorie gegeven, de „Theorie der kürzesten Linien im Farbensystem". In het kleurendiagram in de ruimte, waar elke lichtindruk voorgesteld wordt door een punt, waarvan de 3 coördinaten de hoeveelheden der elementairkleuren rood, groen, blauw voorstellen, zijn de lijnen van gelijke kleur geen rechte stralen door den oorsprong, maar gebogen lijnen, die op grooter afstand van den oorsprong steeds meer naar de coordinaatassen toebuigen en zich daardoor in sterker mate verwijderen van één straal, die recht is, en de „Principalfarbe" voorstelt. In den kleurendriehoek verwijderen dus de punten van gelijke kleur zich des te verder van de principaalkleur — waarbij zij in gekromde banen op den omtrek en de hoekpunten aanloopen — naarmate de kleurendriehoek verder van den oorsprong wordt gelegd en dus grooter helderheid voorstelt. Als principaalkleur geeft HELMHOLTZ daar een

zeker „geelwit" op, waarnaar alle kleuren bij uiterst groote intensiteit in uiterlijk naderen. Kleuren, die aan de blauwe zijde van deze principaalkleur liggen, moeten dus bij verzwakking blauwer worden.

Dit is niet in overeenstemming met hetgeen hier gevonden is, t. m. als het „geelwit" van HELMHOLTZ ook in onze schaal geelwit is, d. i. in de schaal van SCHMIDT door een positief getal voorgesteld wordt. Wij vinden hier ook bij de witste sterren bij verzwakking een evengroote vergeling van de kleur als bij de gelere. Nu is de uitdrukking „geelwit" wel onbepaald, maar als men bedenkt, dat wat in de schaal van SCHMIDT wit heet, witter d. w. z. blauwer is dan het licht van Sirius, en dat zonlicht, bij gewone optische beschouwingen de maatstaf voor wit, tot sterhelderheid verzwakt in de schaal van SCHMIDT 3 à 4 zou heeten (Capella 3, 4) dan moet, ingeval de theorie van HELMHOLTZ juist is, de principaalkleur, in plaats van geelwit te zijn, nog aan de blauwe kant van het Siriuslicht liggen.

§ 3. Nadat de kleuren op die wijze op de helderheid 3.0 gereduceerd waren, moesten zij nog van den invloed der atmospherische roodkleuring bevrijd worden. Met eenige nauwkeurigheid is dit niet te doen, omdat bij de waarnemingen geen tijd en geen hoogte aangegeven zijn. Nu zal de invloed bij groote en gemiddelde hoogte wel zeer gering zijn, en de waarnemer zal er wel voor gezorgd hebben, dat de meeste sterren op voldoende hoogte (bv. tusschen 30° en 60° hoogte) waargenomen werden. Practisch is deze correctie dus alleen van belang bij de weinige zuidelijke sterren, die steeds laag blijven; hier zal men de kleurwijziging door een van de declinatie afhankelijke correctie benaderd kunnen voorstellen. In plaats van de declinatie werd als argument de B. D.-zone genomen, die OSTHOFF in zijn catalogus mee opgeeft.

Voor elke spectraalklasse werden nu voor alle sterren ten N. van den aequator gemiddelde kleurgetallen opgemaakt, en voor alle sterren ten Z. van den aequator de afwijkingen van deze klassegemiddelden gevormd, die ten slotte naar declinatie gerangschikt en samengetrokken werden. Uitgesloten werden hierbij de klassen, waarin te weinig noordelijke sterren voorkwamen t. w. I, II en III.

De gevonden middelwaarden zijn:

Zone	Afwijking	n.	Kromme	Zone	Afwijking	n.	Kromme
—0.°0	+0.56	5	+0.05	—9.°0	+0.14	5	+0.26
—1 7	+0.35	4	+ 06	—10.2	+0.35	4	+ 32
—3.3	—0.17	6	+ 09	—13.2	+0.33	6	+ 57
—5.0	+0.50	5	+ 12	—15.0	+1.17	6	+ 79
—6.6	+0.22	4	+ 17	—18.2	+0.93	6	+1.32
—8.0	—0.05	5	+ 22				

Een kromme lijn werd door deze waarden doorgelegd, die van den aequator naar zuidelijke declinaties in steeds sterker mate stijgt, en die de waarden der laatste kolom geeft. Volgens deze kromme lijn werden de correcties aangebracht, bij

zone	1°	2°–5°	6°–8°	9°–10°	11°	12°	13°	14°	15°	16°	17°	18° Zuid
neg. corr.	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3

Door deze correcties mag men aannemen, dat tenminste voor een groot deel de kleurverandering door de atmosferische absorptie onschadelijk gemaakt is.

§ 4. Na aanbrenging van deze correcties konden voor alle spectraalklassen middelwaarden van de kleur opgemaakt worden, die in de volgende tabel staan. Hierbij werd klasse XV weer in drieën gesplitst, alnaar het spectrum met α Bootis (A) of met α Cassiopeiae (C) overeenstemde, of niet van een dergelijke opmerking voorzien was (B); de uitkomst toont inderdaad, dat hier de C klasse aanmerkelijk rooder is, dan de klasse A, terwijl de B's tusschen beiden inliggen.

Klasse	Kleur	Aantal	Klasse	Kleur	Aanta
I	2.47	6	XII	3.68	17
II	2.36	10	XIII	4.12	13
III	2.30	9	XIV	4.45	12
IV	1.94	14	*XIV*	5.09	9
IV	1.62	10	XVA	5.18	18
V	2.11	9	XVB	5.35	26
VI	2.16	10	XVC	5.55	31
VII	2.27	23	*XV*	6.34	5
VIII	2.37	34	XVI	6.47	17
IX	2.64	20	XVII	6.80	15
X	3.11	14	XVIII	6.74	15
XI	3.40	9	XIX	6.67	6
XI	3.41	4			

De afwijkingen der afzonderlijke waarden van deze gemiddelden geven, als maat voor de nauwkeurigheid der uitkomsten, voor de m. ft. van een kleurgetal $\sqrt{0,20} = 0,45$; de werkelijke nauwkeurigheid zal wat grooter en de werkelijke m. ft. kleiner zijn, omdat in dit getal ook ingesloten zijn de fouten van de aangenomen correcties voor helderheid en declinatie, de fouten die mogelijk Maury bij het toewijzen van elke ster naar een bepaalde klasse begaan heeft, en de werkelijke afwijkingen van de enkele sterren van hun klassegemiddelde.

Bij 9 sterren (op de 355) overtreft de afwijking een kleureenheid; de gereduceerde kleuren zijn hier:

β Can. maj.	III	1,2	ε Hydrae	XIII	5,2	η Persei	XV*B*	6,8
o_1 Cygni	IX	1,4	μ Persei	XIV	5,5	11 Urs. min.	XV*B*	6,6
δ Delphini	IX	3,8	o_2 Cygni	*XIV*	6,5	5 Orionis	XVII	7,9

Bij dit onderzoek zijn, zooals reeds gezegd is, de *c*- en *ac*-sterren, de *L* (lichtende lijnen), de *P* (peculiar spectra) en *C* (samengestelde spectra) uitgesloten. Van belang is het, onder deze de *c* en de *ac*-sterren nader te beschouwen, om te zien of zij een duidelijk verschil in kleur met de *a*-sterren van hetzelfde klassenummer vertoonen. Gemiddeld geven 11 *ac*-sterren als afwijking + 0,1 (van + 0,5 tot — 0,3), en 12 *c*-sterren + 0,7, zij zijn dus een weinig rooder dan de *a*-sterren. Opvallend zijn hierbij echter de groote individueele afwijkingen; de uiterste waarden zijn:

ρ Cassiop XIII + 2,5; χ_2 Orionis III + 1,8; 4*H* Camelop *VI* + 2,0; 3*H* Camelop *VI* + 1,5; η Leonis VII — 0,3; β Orionis VI — 1,2.

Deze loopen dus zeer sterk uiteen, zonder dat er een regelmaat in te ontdekken is.

§ 5. De gevonden uitkomsten lossen een vraag op, die in mijn vorige mededeeling onbeantwoord moest blijven, de vraag nl. waar in de aaneensluitende reeks van spectraalklassen het maximum van lichtuitstralend vermogen ligt. De kleurgetallen vertoonen zeer duidelijk een daling in de eerste klassen, een *minimum* tusschen de 4[de] en 5[de] klasse, en daarna een voortdurende stijging. De sterren, die in ontwikkeling onmiddellijk op γ Orionis volgen (μ Aurigae, μ Hydrae, *u* Herculis) hebben de witste kleur; zoowel de vroegere als de latere ontwikkelingsstadia zijn geler; klasse I en II komen in kleur het naast met klasse VIII overeen. Tusschen de 4[de] en 5[de] klasse ligt dus, zoover wij uit de kleur tot de geheele lichtuitstraling mogen besluiten, ook het maximum van lichtuitstralend vermogen.

Het gemiddeld kleurgetal voor elk van de vroeger gevormde groepen is nu

Kl. I—III	2.35
IV—V	1.87
VI—VIII	2.30
IX—XII	3.20
XIII—XIV	4.58
XV	5.43
XVI—XIX	6.66

Is het nu mogelijk, uit deze getallen, zij het ook slechts benaderd, waarden voor het lichtuitstralend vermogen per eenheid van oppervlak af te leiden? Men kan de beide reeds vermelde invloeden, die de kleur der zelflichtende hemellichamen bepalen, aan berekening onderwerpen, wanneer men van de specifieke eigenschappen der samenstellende stoffen afziet en ze als abstract-theoretische gevallen behandelt. Dit komt daarop neer, dat de straling van een volkomen zwart lichaam beschouwd wordt en dat bij de absorptie van de selectieve absorptie in lijnen en banden afgezien wordt, om alleen de algemeene in het oog te vatten. Als eerste benadering kan dit ook voldoende geacht worden.

Bij deze berekening is gebruik gemaakt van de metingen van A. König over de relatieve hoeveelheid der elementairkleuren rood, groen, blauw, als functie van de golflengte in wit zonlicht. Kent men voor een andere lichtbron de helderheidsverhouding t. o. v. eerstgenoemde als functie van de golflengte, dan kan men berekenen, wat de hoeveelheden rood, groen, blauw in deze andere lichtbron zijn. Noemt men de getallen van König $R(\lambda)$, $G(\lambda)$, $B(\lambda)$ die zoo gekozen zijn, dat

$$\int R(\lambda)\,d\lambda = 1000 \qquad \int G(\lambda)\,d\lambda = 1000 \qquad \int B(\lambda)\,d\lambda = 1000$$

en is $f(\lambda)$ de helderheid van een tweede lichtbron, dan geeft

$$\int f(\lambda)\,R\,d\lambda \qquad \int f(\lambda)\,G\,d\lambda \qquad \text{en} \qquad \int f(\lambda)\,B\,d\lambda$$

de hoeveelheid R, G, en B in dit licht aanwezig. Daar de helderheidsindruk van een lichtbron nagenoeg met de hoeveelheid R evenredig is, geeft deze berekening tegelijk een maat voor de optische helderheid.

De straling van een zwart lichaam is voor te stellen door

$$\lambda^{-\alpha}\, e^{-\frac{c}{T\lambda}}\, d\lambda$$

waar T de absolute temperatuur en α en c constanten zijn. Voor twee lichtbronnen van verschillende temperatuur is de verhouding der intensiteiten:

$$f(\lambda) = e^{-\frac{c}{\lambda}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)} = e^{\frac{b}{\lambda}} = 10^{\frac{b'}{\lambda}}$$

als $b = c\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)$ wordt gesteld en $b' = 0.43\, b$. Als eenheid voor λ nemen wij 0,001 mm; neemt men nu voor b' verschillende waarden aan, die den gloeiingsgraad uitdrukken t. o. v. die bij een

temperatuur T_0, dan kan men daarvoor zoowel helderheid en kleur, als ook de temperatuur (T_0 gegeven ondersteld, terwijl $c = 15000$ ongeveer) berekenen. [1]) Men vindt dan voor de gloeiingsgraden + 1,0 en — 1

$b' = +1$ 69200 R + 68100 G + 175800 B
0 1000 R + 1000 G + 1000 B
— 1 17,7 R + 15,7 G + 6,3 B

Drukt men de kleur uit door de relatieve hoeveelheden $R\,G\,B$ bij een totaalbedrag 1000, en de helderheid in grootteklassen, dan vindt men voor

$b' = +1$ $Kl. = 221\,R + 218\,G + 562\,B$ $H = +4{,}6$ *Gr. kl.*
$b' = -1$ $Kl. = 445\,R + 396\,G + 160\,B$ $H = -4{,}4$ *Gr. kl.*

De eerste kleur is dus te beschrijven als een mengsel van 654 wit en 347 van een blauw, dat uit 3 R en 344 B bestaat, dus in tint met λ 466 overeenkomt; de tweede kleur is een mengsel van 480 wit en 521 van een geel, dat uit 285 R en 236 G bestaat, dus met de golflengte λ 587 overeenstemt. Een gloeiingsgraad $b' = -2$, die in kleur nagenoeg met petroleumlicht overeenkomt, gaat gepaard met een vermindering in helderheid van 8,6 grootteklassen.

Voor de berekening van de atmospherische absorptie werd aangenomen, dat de algemeene absorptie in een gas omgekeerd evenredig is met de vierde macht van de golflengte. Voor een willekeurig aangenomen gasdikte, die door vergelijking met MÜLLER's spectraalphotometrische metingen met 1,05 atmosfeer bleek overeen te stemmen, werd $f(\lambda)$ berekend en daaruit als van een lichthoeveelheid $1000\,R + 1000\,G + 1000\,B$ overschietend gedeelte gevonden:

$$783\,R + 771\,G + 571\,B$$

dus op 1000 als som gereduceerd

$$368\,R + 363\,G + 269\,B$$

terwijl de helderheid 0,783 van de oorspronkelijke is, d. w. z. 0,27 Gr. kl. verzwakt.

De kleuring, die deze 1.05 atmosfeer teweeg brengt, komt nagenoeg overeen met die, welke een vermindering in gloeiingsgraad van $^1/_8$ bewerkt. Deze laatste levert namelijk

$$257\,R + 248\,G + 184\,B$$

dus op 1000 gereduceerd

$$372\,R + 361\,G + 267\,B$$

---

[1]) In de reeds geciteerde voordracht zijn, door de onderscheiding van b en b' over het hoofd te zien, verkeerde temperaturen opgegeven. De temperaturen 16000°, 7500°, 5000°, 3750°, 3000° C verschillen niet telkens 1, maar slechts 0.43 in gloeiingsgraad.

wat nagenoeg identiek is met het bovenstaande. De helderheid is hierbij echter tot 0.257 van de oorspronkelijke, dus 1.48 Gr. kl. verzwakt.

Hier blijkt dus, dat deze beide verschillende oorzaken wel gelijksoortige kleuren geven, maar dat deze gepaard gaan met geheel verschillende verzwakkingen van de helderheid. Relatief beschouwd kan men zeggen, dat atmosferische absorptie sterker roodkleurend, temperatuurverlaging sterker lichtverminderend werkt. Het is daarom niet mogelijk uit de kleur alleen tot het lichtuitstralend vermogen te besluiten, daar men niet weet, in welke mate elk der beide invloeden, temperatuur en absorptie, bij de verschillende spectraalklassen werkt. Nauwkeurige spectraalphotometrische metingen zullen misschien eenmaal veroorlooven beide invloeden te scheiden, want zij geven een verschillende verdeeling van de intensiteit over het spectrum. Voor de log. van de helderheid van verschillende λ t. o. v. λ 500 vindt men

	$\lambda = 650$	600	550	500	450	400
bij abs. 1.05 atm.	+ 0.114	+ 0.083	+ 0.051	0.000	−0.084	−0.231
bij gloeiing — $^1/_2$	+ 0.154	+ 0.111	+ 0.061	0.000	−0.074	−.0166

Bij de laatste is de afname in intensiteit van rood naar violet gelijkmatiger, bij de eerste scherper toenemend.

Deze berekeningen toonen, dat het niet streng juist is, wat in de vorige mededeeling gezegd werd, als zou een roodere kleur noodzakelijk een zwakker lichtuitstralend vermogen meebrengen. Waar er twee invloeden zijn, die op verschillende wijze op kleur en helderheid inwerken, bestaat de mogelijkheid, dat een roodere kleur met sterker lichtuitstraling gepaard gaat, wanneer nl. de eene lichtbron een veel hooger temperatuur en tegelijk een sterker atmosferische absorptie heeft, dan de andere. Een $^1/_2$ eenheid hoogere gloeiingsgraad, gecombineerd met een absorptie van 2 atmosferen geeft naar bovenstaande cijfers zulk een geval.

Dit biedt dus een nieuwe mogelijkheid, de gevonden eigenaardigheid der *K* sterren te verklaren, door nl. aan te nemen, dat zij, vergeleken met de *G* sterren een veel hooger temperatuur hebben, die een sterker lichtuitstraling bewerkt, welke dan door een zeer sterke atmosferische absorptie weinig verzwakt, maar sterk roodgekleurd wordt. Wij moeten er echter bijvoegen, dat wij deze verklaring voor weinig waarschijnlijk houden, daar de banden-absorptie, die bij de *K* sterren begint en voor de *M* sterren (het 3[de] type) karakteristiek is, op een lager temperatuur wijst.

Scheikunde. — De Heer LORENTZ biedt eene mededeeling aan van den heer J. J. VAN LAAR: *„Over het verloop der spinodale en plooipuntslijnen bij binaire mengsels van normale stoffen"*. (Vierde mededeeling: *De lengteplooi*).

(Mede aangeboden door den Heer H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM).

1. Ten einde het overzicht van het tot dusver door mij behandelde te vergemakkelijken, wil ik nog even kortelijk recapituleeren wat aangaande het genoemde onderwerp in vier Verhandelingen in Deze Verslagen en in twee Verhandelingen in de Arch. Teyler reeds is medegedeeld.

a. In de *eerste* Verhandeling in Deze Verslagen (5 April 1905) werd voor mengsels van *normale* stoffen, in de onderstelling dat a en b onafhankelijk zijn van v en T, en dat $a_{12}=\sqrt{a_1 a_2}$ is, voor de *spinodale* lijnen afgeleid de vergelijking

$$RT=\frac{2}{v^3}\left[x(1-x)(av-\beta\sqrt{a})^2+a(v-b)^2\right], \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

terwijl voor de v,x-projectie der *plooipuntslijn* werd gevonden:

$$(av-\beta\sqrt{a})^2\left[(1-2x)v-3x(1-x)\beta\right]+$$
$$+\sqrt{a}(v-b)^2\left[3(av-\beta\sqrt{a})(av-2\beta\sqrt{a})+\frac{a(v-b)(v-3b)}{x(1-x)}\right]=0, \quad (2)$$

wanneer $\alpha=\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}$ en $\beta=b_2-b_1$ is.

b. In de *tweede* Verhandeling in Deze Verslagen (7 Juni 1905) werd de gedaante dezer lijnen voor verschillende gevallen nader onderzocht. Ter vereenvoudiging der berekeningen werd $\beta=0$, d. w. z. $b_1=b_2$ aangenomen, zoodat dan de verhouding θ der kritische temperaturen der beide componenten gelijk is aan de verhouding π der beide kritische drukken. Stellende alsdan $\frac{\sqrt{a_1}}{\alpha}=\varphi$, $\frac{b}{v}=\omega$, $\frac{T}{T_0}=\tau$ (waar T_0 de „derde" kritische temperatuur is, d.w.z. de plooipuntstemperatuur bij $v=b$), zoo gaan de beide voorgaande vergelijkingen over in

$$\tau=4\omega\left[x(1-x)+(\varphi+x)^2(1-\omega)^2\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1a)$$

$$(1-2x)+3(\varphi+x)(1-\omega)^2+\frac{(\varphi+x)^2(1-\omega)^2(1-3\omega)}{x(1-x)}=0. \quad (2a)$$

Het bleek nu, dat de plooipuntslijn een *dubbelpunt* bezit, wanneer $\varphi=1{,}43$ is, d. w. z. $\theta=\pi=2{,}89$. Is $\theta>2{,}89$, dan vertoont zich het (abnormale) geval van fig. 1 (l. c.) (geconstrueerd voor $\varphi=1$, $\theta=(1+{}^1/_\varphi)^2=4$); is daarentegen $\theta<2{,}89$, dan het (normale) geval van fig. 2 (l. c.) (geconstrueerd voor $\varphi=2$, $\theta=2{}^1/_4$).

Tevens werd gewezen op de mogelijkheid van het optreden van een derde geval (fig. 3 l. c.), waarbij de van C_1 naar C_2 loopende tak van de plooipuntslijn *tweemaal* door een spinodale lijn wordt geraakt. Hierbij wordt dan ook nog de tak C_0A door een spinodale lijn geraakt. [in de beide eerste gevallen had dit telkens slechts één keer plaats, òf (in fig. 1 l. c.) op den tak C_1A (A is het punt $x=0$, $v=b$), òf (in fig. 2 l. c.) op den tak C_0A (C_0 is het reeds genoemde derde kritische punt)].

Het bleek alzoo, dat *al* de door KUENEN gevonden abnormale gevallen reeds bij mengsels van *volkomen normale* stoffen kunnen optreden.

Het constateeren van het aanwezig zijn van *twee verschillende takken* der plooipuntslijn is voor de theorie der kritische verschijnselen voorzeker van belang, daar tal van verschijnselen, ook in verband met verschillende „kritische mengpunten", nu op ongedwongen wijze kunnen worden verklaard.

c. In de *derde* Verhandeling in deze Verslagen (14 Juli 1905)[1] werd alsnu voor de *moleculaire verhooging* der laagste kritische temperatuur voor het *geheel algemeene* geval $a_2 \lessgtr a_1$, $b_2 \lessgtr b_1$ afgeleid de betrekking:

$$\Delta = \frac{1}{T_1}\left(\frac{dT}{dx}\right)_0 = \theta \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left[\theta \sqrt{\frac{1}{\pi}}\left({}^3/_2 - {}^1/_2 \sqrt{\frac{1}{\pi}}\right)^2 - 1\right], \quad . \; . \quad (3)$$

hetgeen voor het geval $\pi = 1$ ($p_2 = p_1$) overgaat in de zeer eenvoudige uitdrukking

$$\Delta = \theta\,(\theta - 1). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3^a)$$

Deze formule werd met goed gevolg aan eenige waarnemingen van CENTNERSZWER en BÜCHNER getoetst.

d. De *vierde* Verhandeling verscheen in de Archives Teyler van Nov. 1905. Thans werd voor de bepaling van het *dubbelpunt* der plooipuntslijn de beperkende onderstelling $\beta = 0$ (zie *b.*) opgeheven, en het geheel algemeene geval $a_2 \lessgtr a_1$, $b_2 \lessgtr b_1$ beschouwd. Dit gaf tot zeer ingewikkelde berekeningen aanleiding, maar ten slotte werden uitdrukkingen afgeleid, waaruit voor elke waarde van $\theta = \frac{T_2}{T_1}$ de bijbehoorende waarde van $\pi = \frac{p_2}{p_1}$, alsmede de waarden van x en v in het dubbelpunt kunnen worden berekend.

[1]) De drie genoemde stukken zijn vereenigd verschenen in de Arch. Néerl. van Nov. 1905.

Behalve het speciale geval $\theta = \pi$ (zie *b.*) werd nog het geval $\pi = 1$ nagegaan, en gevonden dat alsdan het dubbelpunt aanwezig is bij $\theta = 9{,}90$. Dit punt ligt dan op de lijn $v = b$.

e. De *vijfde* Verhandeling (Deze Verslagen van 10 Jan. 1906) [1]) bevatte de voorwaarde voor een *minimale kritische* (*plooipunts*) *temperatuur*, en die voor een *maximalen dampdruk* bij hoogere temperaturen. (d. w. z. wanneer bij lagere temperaturen de driephasendruk grooter is dan de dampdrukken der componenten). Voor de eerste voorwaarde werd gevonden:

$$\theta < \frac{4\pi\sqrt{\pi}}{(3\sqrt{\pi} - 1)^2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

voor de tweede:

$$\theta < \frac{\pi}{2\sqrt{\pi} - 1}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

welke voorwaarden elkaar dus niet altijd insluiten. [2])

Daarna werden de connodale verhoudingen bij de drie hoofdtypen besproken, in aansluiting met hetgeen reeds vroeger door KORTEWEG (Arch. Néerl. 1891) en later door VAN DER WAALS (Deze Verslagen van 5 April 1905) was geschreven. De achtereenvolgende transformaties van hoofd- en zijplooi kwamen thans *in verband met den door mij bestudeerden loop der plooipuntslijn, en van hare splitsing in twee takken*, in een helder licht.

f. In de *zesde* Verhandeling (Arch. Teyler van Mei 1906) werden eerst de genoemde connodale verhoudingen nog iets uitvoeriger behandeld, waarbij ook de p, x-voorstellingen werden gegeven. Daarna werd bewezen, dat de punten R_1, R_2 en R'_2, waar de spinodale lijnen de plooipuntslijn raken, *keerpunten* in de p, T-voorstelling zijn.

Alsdan werd een grafische voorstelling ontworpen van de correspondeerende waarden van θ en π voor het dubbelpunt in de plooipuntslijn, in verband met de onder *d.* genoemde berekeningen.

Zoowel de grafische voorstelling als de daarbij behoorende tabel zijn hier gereproduceerd. De uitkomsten zijn van genoegzaam belang om er hier nog even in het kort op terug te komen.

Men kan nl. alle mogelijke paren van stoffen karakterizeeren door de waarden van θ en π, en het zal ten slotte alleen van deze waarden afhangen, welk der drie hoofdtypen zal optreden. Om hiervan een overzicht te verkrijgen, is het van belang na te gaan voor welke combinatie (θ, π) het eene type in het andere overgaat. Wat den

[1]) Opgenomen in de Arch. Néerl. van Mei 1906.

[2]) Deze uitkomsten werden later (Deze Verslagen van 7 Febr. 1906; zie ook in de Engelsche vertaling de Noot op blz. 749) door VERSCHAFFELT bevestigd.

overgang van type I tot II (III) betreft, zijn het juist die combinaties voor welke de plooipuntslijn een dubbelpunt heeft. In fig. 1 (zie de plaat hierachter) stelt nu elk punt van het vlak een combinatie (θ, π) voor, waaraan telkens een bepaald stoffenpaar zal beantwoorden.

$\theta = \frac{T_2}{T_1}$	$\pi = \frac{p_2}{p_1}$	x	v/b
1,00	7,50 en 0,13	0,96 en 0,040	2,57 en 2,57
1,19	7,21 » 0,13	0,94 » 0,036	2,49 » 2,60
1,71	6,26 » 0,13	0,84 » 0,025	2,26 » 2,68
1,88	5,76 » 0,13	0,78 » 0,021	2,18 » 2,71
2,04	5,42 » 0,12	0,72 » 0,018	2,11 » 2,74
2,22	4,94 » 0,12	0,63 » 0,014	2,02 » 2,79
2,89	2,89 » 0,12	0,24 » 0,003	1,73 » 2,87
9,90	1,00 » 0,11	0,01 » 0,001	1,00 » 2,95
∞	— » 0,11	— » 0,000	— » 3,00

In genoemde fig. dan geeft de lijn $C'APB$ de correspondeerende waarden van θ en π aan van $\theta = 0$ tot $\theta = 9{,}9$. Bij C' is $\theta = 0$. $\pi = 9$, bij A is $\theta = 1$, $\pi = 7{,}5$; met $\theta = 2{,}22$ correspondeert $\pi = 4{,}94$ (Geval $\pi = \theta^2$ of $a_2 = a_1$); bij P is $\pi = \theta = 2{,}89$ (Geval $\pi = \theta$ of $b_2 = b_1$); bij B is $\theta = 9{,}9$, $\pi = 1$. Bij waarden van $\theta > 9{,}9$ zou het dubbelpunt aan de zijde der lijn $v = b$ komen te liggen, waar $v < b$ is. Uit de figg. 23, 24 en 25 van de genoemde Verhandeling blijkt, dat alsdan de lijn BD $(\pi = 1)$ de afscheiding vormt tusschen type I en II (III). Immers, uitgaande van een punt waar $\pi < 1$ (hoe weinig ook) en θ betrekkelijk laag, waar men zich dus zeker in het gebied II (III) bevindt, zoo is het duidelijk dat men dit gebied niet kan verlaten, wanneer men bij die waarde van π de waarde van θ laat toenemen. Want men kan nooit tot type I overgaan, wanneer niet voor *realizeerbare* waarden van v (dus $< b$) een dubbelpunt bereikt wordt, en nu leert een eenvoudige beschouwing (zie de geciteerde Verhandeling), dat voor $\pi < 1$ een dubbelpunt altijd zou beantwoorden aan een waarde van $v < b$.

Nu is het duidelijk, dat $\theta = 0$, $\pi = 9$ hetzelfde is als $\theta = \infty$, $\pi = 1/_9$; dat $\theta = \pi = 2{,}89$ identiek is met $\theta = \pi = 1/_{2,89} = 0{,}35$; enz. enz. (de beide componenten zijn dan eenvoudig verwisseld), zoodat met de lijn $C'A$ zal correspondeeren de lijn CA', terwijl met AB correspon-

deert $A'B'$. Beschouwt men nu alleen waarden van θ, welke > 1 zijn, neemt men m. a. w. altijd $T_2 > T_1$ aan, dan kan men zeggen dat het gebied van het normale type II (III) praktisch begrensd is door de lijnen ABD, AA' en $A'C$. Rechts van ABD heeft men het abnormale type I ($C_2H_6 + CH_3OH$, aether $+ H_2O$); links van $A'C$ eveneens type I. Maar terwijl in het eerste gebied van I de takken der plooipuntslijn C_2C_0 en C_1A zijn, zijn deze in het tweede gebied van I C_1C_0 en C_2B (zie figg. 23—25 l. c.). Men kan nl. gemakkelijk aantoonen (l. c.), dat bij $\pi > 1$ de takken der plooipuntslijn òf C_1C_2 en C_0A (type II en III), òf C_1A en C_0C_2 (type I) zijn, terwijl bij $\pi < 1$ deze takken zijn C_1C_2 en C_0B (type II en III) of C_2B en C_0C_1 (type I). De lijn $\pi = 1$ verdeelt dus het gebied van type II (III) in twee stukken, waar men resp. het aangeduide verloop der plooipuntslijn-takken zal hebben (n.l. bij $\theta > 1$). Maar in de praktijk zal het wel nimmer voorkomen, dat bij $\theta > 1$ een waarde van π correspondeert, welke veel kleiner dan 1 is, want met een hoogere kritische temperatuur stemt meestal ook een hoogere kritische druk overeen. Men kan dus zeggen, dat bij een gegeven waarde van π het abnormale type I intreedt, wanneer θ *betrekkelijk groot* is [grooter dan de met die waarde van π correspondeerende dubbelpunts (van de plooipuntslijn) waarde van θ], terwijl het normale type II (of III) intreedt, wanneer θ *betrekkelijk gering* is. (kleiner dan de genoemde dubbelpuntswaarde).

Het is alsnu van het grootste belang na te gaan, wanneer het type II overgaat in III, waar de plooipuntslijn C_1C_2 tweemaal door een spinodale lijn (in R_1 en R_2') wordt geraakt. Dit onderzoek vormt het slot van de laatste Verhandeling in de Arch. Teyler.

De berekeningen worden echter zoo uiterst ingewikkeld, dat deze voor het geheel algemeene geval $a_2 \gtrless a_1$, $b_2 \gtrless b_1$ praktisch onuitvoerbaar bleken. Alleen de bijzondere gevallen $\beta = 0$ ($b_2 = b_1$ of $\pi = \theta$) en $\pi = 1$ waren voor berekening vatbaar, hoewel deze dan nòg vrij gecompliceerd was.

Het bleek dan, dat bij $\beta = 0$ het gebied van het type III juist $= 0$ is, dat het gelijktijdig verschijnt en verdwijnt in het dubbelpunt P, waar $\pi = \theta = 2{,}89$ is. Maar in het geval $\pi = 1$ is het gebied gelegen tusschen $\theta = 4{,}44$ en $\theta = 9{,}9$ (het dubbelpunt). Dit is dus QB in fig. 1. D. w. z. bij waarden van $\theta > 1$ en $< 4{,}44$ heeft men type II (zie fig. 2[a]); bij $\theta = 4{,}44$ (in Q) verschijnt een buigpunt in de plooipuntslijn (zie fig. 2[b]), terwijl van $\theta = 4{,}44$ tot $\theta = 9{,}9$ het type III optreedt (fig. 2[c]) met twee raakpunten R_1 en R_2' der spinodale lijnen aan de plooipuntslijn. Dit type verdwijnt in het dubbelpunt P, waar $\theta = 9{,}9$, en R_2 en R_2' samenvallen in P (fig. 2[d]),

en gaat voor waarden van $\theta > 9{,}9$ over in het type I (fig. 2[e]). Wij merken op, dat de figg. 2[a]—2[e] geteekend zijn voor een tusschengelegen geval (d. w. z. tusschen $\pi = \theta$ en $\pi = 1$, zie fig. 1), want bij $\pi = 1$ zou de tak AR_2C_0 met AB ($v = b$) samenvallen. Daarom is de speciale waarde 4,44 vervangen door θ_q (de waarde van θ bij Q) en de waarde 9,9 door θ_p (de waarde van θ bij P).

Van de kromme, die het type II van het type III afscheidt, kennen wij dus tot dusver slechts de punten P en Q (zie fig. 1) en is het verdere verloop dezer lijn nog geheel onbekend, waarom wij die voorloopig door een stippellijn hebben aangeduid.

In elk geval is door de onderzoekingen, in het stuk in de Arch. Teyler neergelegd, *bewezen*, dat dit zeer abnormale type III *bij mengsels van normale stoffen mogelijk is.* Zijn de kritische drukken der beide komponenten gelijk ($\pi = 1$), dan komt het type voor zoodra θ inligt tusschen 4,4 en 9,9. De kritische temperaturen moeten dus ver uiteen liggen, maar niet (zie fig. 1) zoover als noodig zou zijn voor het optreden van type I.

Wij willen er nogmaals met nadruk op wijzen, dat de *numerieke* uitkomsten van ons onderzoek natuurlijk zullen gewijzigd worden, wanneer b niet onafhankelijk van v en T wordt aangenomen, of wanneer een of beide componenten associeerende stoffen mochten zijn. Daardoor zullen de typen III en I *eerder* optreden, dan boven is afgeleid (d. w. z. bij geringere waarden van θ bij overigens gelijke waarden van π), maar dat *kwalitatief* alles hetzelfde zal blijven. Dit blijkt reeds hieruit, dat het vervangen van de vereenvoudigende onderstelling $b_1 = b_2$ door de geheel algemeene aanname $b_1 \lessgtr b_2$ (in het eerste stuk in de Arch. Teyler) niets aan het bestaan van een dubbelpunt in de plooipuntslijn bij bepaalde correspondeerende waarden van θ en π heeft veranderd, en dat ook de berekeningen voor de begrenzing van het type III (in het tweede stuk in de Arch. Teyler) kunnen geschieden voor het geheel algemeene geval $b_1 \lessgtr b_2$. De verschijnselen blijven dus kwalitatief geheel dezelfde bij zeer verschillende waardeparen van b_1 en b_2, en zullen dus ook niet *in wezen* veranderen, wanneer één bepaald waardepaar, geldende bv. bij de kritische omstandigheden van een der componenten, veranderingen ondergaat, hetzij door associatie, hetzij door andere oorzaken, wanneer v of T veranderen — evenmin als bv. de kritische verschijnselen bij een enkelvoudige stof *in wezen* zullen veranderen, wanneer b niet meer konstant is, maar van v en T afhankelijk wordt ondersteld, of wanneer die stof complexe moleculen vormt.

De Lengteplooi.

2. In vroegere Verhandelingen is aangetoond, dat zoowel bij type I in de lijn $C_0 C_2$, als bij type II in de lijn $C_0 A$ in de nabijheid van C_0 een minimum-plooipuntstemperatuur optreedt, en dat er dus *van uit* C_0 bij een bepaalde temperatuur T_0 (de plooipuntstemperatuur in C_0) bij temperatuursverlaging een *afzonderlijke plooi* begint uit te gaan, welke zich later (bij de minimale plooipuntstemperatuur) in een homogeen dubbelpunt met de hoofdplooi (of de nevenplooi daarvan) zal vereenigen. Gevolg hiervan is, dat bij type I bv. bij lagere temperaturen de hoofdplooi altijd naar de zijde der kleine volumina zal *geopend* zijn, zoodat drukverhooging de beide gesplitste phasen nooit kan doen samenvallen.

Beschouwen wij echter speciaal het geval van type II. Hier is de gewone gang van zaken, o.a. geteekend in de laatst geciteerde Akademieverhandeling van 10 Jan. 1906, deze. Bij een bepaalde temperatuur, gaande van hoogere naar lagere temperaturen, raakt een spinodale lijn in R_2 aan den tak der plooipuntslijn AC_0. Er begint zich op de bekende wijze binnen de eigenlijke connodale lijn een gesloten connodale lijn te vormen, die bij lagere temperatuur buiten de oorspronkelijke connodale treedt, en het aanzijn geeft aan een nieuwe (neven)-plooi, en tegelijk aan een driephasenevenwicht (fig. 3^a en 3^b). Deze nevenplooi is in vele gevallen reeds opgetreden vóor bij iets lagere temperatuur de plooi van uit C_0 zich begint te ontwikkelen. Beide plooien vallen later samen (bij de minimum-temperatuur in D), en vormen daarna weer een doorloopende nevenplooi (fig. 3^c). [1])

Nu ligt het punt D voor het bijzondere geval $b_2 = b_1$ altijd zeer dicht bij C_0 (zie het onder *b*. in § 1 geciteerde Akademiestuk). Is alsdan bv. $T_2/T_1 = 2^1/_4$, dan is $T_m/T_0 = 0{,}96$, wanneer T_m de temperatuur in het minimum bij D voorstelt. De eigenlijke lengteplooi rondom C_0 bestaat dan slechts bij zeer hooge drukken (fig. 3^b), terwijl de geopende plooi van fig. 3^c moeilijk een lengteplooi kan genoemd worden, maar veeleer de met de oorspronkelijke lengteplooi samengegroeide nevenplooi der dwarsplooi is. Drukverhooging heeft hier altijd een toenadering der beide coëxisteerende vloeistofphasen tengevolge, tenzij bij zeer hooge drukken, waar die phasen weer uiteenwijken.

Berekening leert nu, dat in het geheel algemeene geval $b_1 \lessgtr b_2$

1) In deze en eenige volgende figuren schijnen de spinodale lijnen in het homogene dubbelpunt D elkaar te raken in plaats van te *snijden*, zoals het behoort.

het punt D veel dichter in de nabijheid van R_2 kan komen, en ook dat de temperatuur in het plooipunt C_0 betrekkelijk hoog kan uitvallen, zoodat de lengteplooi in tegenstelling van het in fig. 3^a voorgestelde reeds rondom C_0 aanwezig is lang voor zich een driephasenevenwicht bij M heeft gevormd. (fig. 4^a en 4^b). Het samenvallen van deze lengteplooi, die dan reeds een groote uitbreiding heeft verkregen, met de nevenplooi heeft dan ook veel meer in de nabijheid van de lijn 1, 2 van den driephasendriehoek plaats, zoodat na de samenvloeiïng de plooi de in fig. 4^c geteekende gedaante verkrijgt, waardoor zij het karakter der eigenlijke lengteplooi grootendeels behoudt. Aanvankelijk heeft dus drukverhooging een toenadering der phasen tengevolge (dit gedeelte kan uiterst gering zijn, maar het zal in het algemeen altijd bestaan); daarna doet verdere drukverhooging de phasen 1 en 2 wederom uiteenwijken, totdat x_1 en x_2 bij $p = \infty$ tot grenswaarden naderen, zonder dat de lengteplooi — zooals vroeger wel mogelijk werd geacht [zie o.a. VAN DER WAALS, Cont. II, blz. 190 (1900)] — zich ooit weer sluit. Want tengevolge van het minimum bij D omsluit de lengteplooi altijd het punt C_0. Alleen bij temperaturen hooger dan T_0, waarbij de lengteplooi nog niet bestaat, kan er van blijvende homogeniteit bij hooge drukken sprake zijn. Maar dan behoort het plooipunt P tot de *nevenplooi* van de *dwarsplooi*, en *niet* tot de lengteplooi. Dit wordt aangegeven o. a. door fig. 3^a, *nadat* de gesloten connodale in M door de eigenlijke connodale der dwarsplooi is heengebroken; of door fig. 3^b, *voordat* zich een lengteplooi rondom C_0 heeft ontwikkeld.

Natuurlijk kan ook het geval zich voordoen, dat de plooi rondom C_0 met de nevenplooi samenvalt op het oogenblik dat deze met haar plooipunt juist uit de dwarsplooi te voorschijn treedt, zooals fig. 5^a te zien geeft, maar dit involveert noodzakelijk een *betrekking* tusschen θ en π en is dus altijd een *zeer bijzonder geval*. Het naar buiten treden van de nevenplooi heeft dan toevallig juist in het minimum bij D plaats. Na het samenvallen vertoont de plooi dan de gedaante als in fig. 5^b is geteekend. Thans doet drukverhooging de beide phasen 1 en 2 *van den aanvang af* uiteengaan.

Maar het kan ook voorkomen, dat de lengteplooi rondom C_0 de connodale lijn der dwarsplooi treft, *voordat* de gesloten connodale lijn naar buiten is getreden (fig. 6^a). Het driephasenevenwicht ontwikkelt zich dan niet, zooals bij fig. 4^a, aan de dwarsplooi (waaruit een nevenplooi te voorschijn treedt), maar aan de *lengteplooi* rondom C_0. Deze boort zich dan verder in de dwarsplooi in, tot zij in D de geïsoleerde gesloten connodale ontmoet (fig. 6^b), waarna de samenvloeiïng met deze in het irrealizabele gebied plaats heeft (fig. 6^c).

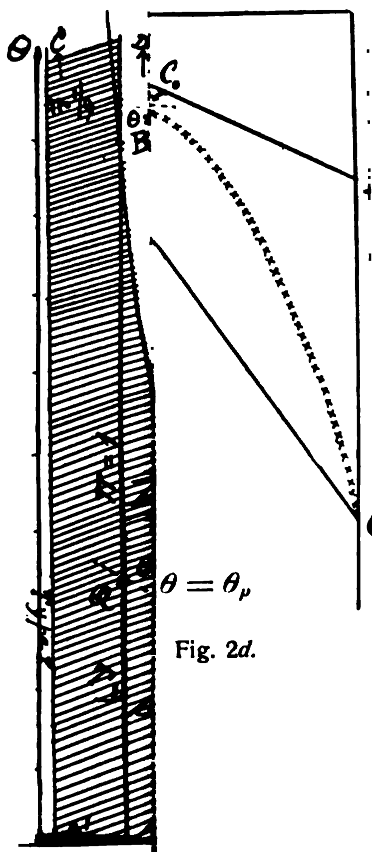


Fig. 2*d*.

Deze plooi is dan de *eigenlijke lengteplooi*, waarvan bij mengsels van moeilijk mengbare stoffen meestal sprake is. Maar men vergete daarbij niet, dat zich evengoed het boven behandelde geval van fig. 4 kan voordoen, met dat van fig. 5 als overgangsgeval.

De berekening leert, dat het overgangsgeval intreedt, wanneer de verhouding θ der kritische temperaturen der beide componenten in de nabijheid is van 1, terwijl de verhouding π der kritische drukken tegelijk vrij groot is.

Van deze verschillende verhoudingen geven ook de beide p, T-voorstellingen van fig. 7 en fig. 7ª een duidelijk beeld. (De temperatuur van C_2 is daar lager aangenomen dan die van R_2, maar zij kan evengoed hooger zijn). De plooipunten p' op het gedeelte R_2A beneden het keerpunt zijn de onrealizeerbare plooipunten (zie ook fig. 3—6); de plooipunten p op het gedeelte R_2M vóór M evenzoo. (de geïsoleerde gesloten connodale is dan nog niet naar buiten getreden); terwijl de plooipunten P voorbij M alle realizeerbaar zijn.

Wij komen dus na het bovenstaande tot de conclusie, dat in al de gevallen, waarin een duidelijke lengteplooi optreedt van den vorm als in fig. 4^c of 6^c (wanneer dus het minimum D dicht bij R_2 ligt), het kritische mengpunt M der drie phasen niet altijd op de lengteplooi behoeft te liggen (zie fig. 4^a), en ook dat de lengteplooi met haar plooipunt P niet altijd zal samenvallen met de dwarsplooi zelf, maar ook met de nevenplooi van deze kan samenvallen, zoodat op dat oogenblik geen driephasenevenwicht, d. w. z. geen dampphase aanwezig is (zie fig. 4^c). Wel vallen dan de beide vloeistofphasen 1 en 2 samen.

Het geval, in fig. 5^a en 5^b geteekend, blijft natuurlijk hooge zeldzaamheid, en men kan de voorwaarden voor het optreden daarvan berekenen (zie boven). Maar deze berekening, alsook die welke in het algemeen de ligging der punten R_2, D en M aangeeft, zal elders (in de Arch. Teyler) worden gepubliceerd. Het spreekt echter van zelf, dat de bovenstaande algemeene beschouwingen in geenen deele van deze speciale berekeningen afhankelijk zijn.

Het is wellicht niet overbodig op te merken, dat de samenstelling x_3 der dampphase, nòch in fig. 4^a, nòch in fig. 5^a of 6^a, gelijk is aan de samenstelling der beide samenvallende vloeistofphasen $x_{1,2}$, zooals VAN DER LEE in zijn Akademisch Proefschrift (1898) ten onrechte meent te hebben aangetoond [zie bl. 66—69, 73—74 en Stelling III; ook VAN DER WAALS, Cont. II, bl. 181 (1900)]. Wij weten nl. thans, dat wanneer x_3 bij lagere temperaturen tusschen x_1 en x_2 inligt, dit niet behoeft te blijven totdat x_1 en x_2 zijn samengevallen. Dit laatste zou zeer toevallig zijn; in het algemeen zal het eene der

beide maxima, bv. in de p,x-lijn, welke in het labiele gebied tusschen x_1 en x_2 inliggen, *naar buiten treden voordat* x_1 en x_2 zijn samengevallen. Zie de figg. 12^a tot 12^f in mijne Verhandeling in Deze Verslagen van 5 April 1905 en § 8 bl. 669—670, benevens de Noot op bl. 665. Reeds in een vroeger stuk (Deze Verslagen van 27 Juni 1903) had ik dit uitvoerig aangetoond, en KUENEN kwam iets later (Deze Verslagen van 31 Oct. 1903) onafhankelijk van mij tot het zelfde inzicht. [1]) En in 1900 had SCHREINEMAKERS (Z. f. Ph. Ch. **35**, p. 462—470) dit naar buiten treden proefondervindelijk aangetoond, juist bij het zelfde mengsel (phenol en water), waarvoor VAN DER LEE theoretisch meende te kunnen bewijzen, dat $x_3 = x_{1,2}$ zou wezen. [2])

Ten slotte wil ik er nog even op wijzen, dat in het eigenaardig verloop der p,T-voorstelling van de plooipuntslijn (fig. 7) in de nabijheid van het punt D, en in het *niet* samenvallen der beide kritische momenten, door fig. 4^a en 4^c aangegeven (daar D en M in het algemeen *niet* samenvallen), wellicht de sleutel ligt ter verklaring van een hoogst raadselachtig en tot nu toe onverklaard verschijnsel, dat zoowel GUTHRIE als ROTHMUND [Z. f. Ph. Ch. **26**, p. 446 (1898)] [3]) bij hunne proeven hebben waargenomen, nl. het optreden en weder verdwijnen van een duidelijke troebeling bij verhitting boven de „kritische mengtemperatuur", welke troebeling dikwijls tot 10° boven deze temperatuur bleef bestaan.

Dierkunde. — De Heer HUBRECHT biedt eene mededeeling aan van den Heer Dr. F. MULLER : „*De placentatie van Sciurus vulgaris*".

(Medeaangeboden door den Heer L. BOLK).

I. Allerjongste stadia. De eerste stadia van ontwikkeling maakt het ei van Sciurus door in den oviduct.

Inmiddels heeft de tweehoornige uterus zich op de komst van het eitje voorbereid: anti-mesometraal heeft beneden het éénlagige epitheel de mesometraal zeer dun blijvende mucosa zich zeer sterk verdikt, zoodat een spleetvormig excentrisch lumen van T-vorm

1) Zie ook KUENEN: Theorie der Verdampfung und Verflüssigung von Gemischen. Leipzig 1906, bl. 170, Noot.

2) De aanname $x_3 = x_{1,2}$ in het punt M voert trouwens, zooals de berekeningen leeren, niet alleen tot vreemde, maar tot hoogst absurde gevolgtrekkingen.

3) Zie ook FRIEDLÄNDER, Ueber merkwürdige Erscheinungen in der Umgebung des kritischen Punktes. Z. f. Ph. Ch. **38**, p. 385 (1901).

(dwarsstuk: mesometraal) overblijft. Een voorbereiding speciaal van de aanhechtingsplaats der eieren is nergens aantoonbaar. Wel is een sub-epitheliaal liggende zone kernrijker dan het losse bindweefsel dat deze laag scheidt van de muscularis.

II. Praeplacentaire stadia. (Van de aankomst van het eitje in den uterus tot den eersten aanleg der allantoide placenta).

De eitjes fixeeren zich in verschillend aantal, rechts veelal meer dan links, op ongeveer gelijke afstanden aan den anti-mesometralen (i. e. anti-placentairen) uteruswand en wel met hun vegetatieven pool. Een zona pellucida is afwezig, daarentegen omgeeft het ei zich met een massa, gevormd uit kliersecreta, transsudatievloeistof van cellige afkomst van den uteruswand.

De eitjes nemen vrij snel in grootte toe, voor 't grootste deel door uitzetting van de navelblaas, die in deze stadia nog het voornaamste deel van het ei uitmaakt. Eigenaardig is dat de area vasculosa zoo klein blijft, dat alleen entoderm en trophoblast over 't grootste deel van de navelblaas de kiemblaaswand vormen.

De uteruswand vertoont in dit tijdperk krachtige actie, vele processen spelen zich hier snel na en naast elkaar af. Alle beginnen zij op de plaats waar het eitje zich heeft genesteld en breiden zich van dit punt naar alle richtingen uit, meer en meer zoowel de tusschen de fixatieplaatsen der eieren overgebleven ruimten van den uterushoorn, als de mesometraal gelegen deelen bereikend; alle beginnen zij verder subepitheliaal, gaandeweg dieper en dieper doordringend. De opeenvolging dier processen geeft zoo aanleiding tot het ontstaan van schotelvormige lagen van verschillenden bouw, die het ei aan de anti-mesometrale zijde omgeven, en wier meest uitgesproken karakter telkens te vinden is in de het verst van het mesometrium afgelegen punten. Door de uitzetting van het anti-mesometrale deel van het lange einde van het T-vormige lumen ontstaat hier een verbreeding, die, meer en meer mesometraalwaarts voortschrijdend, ten slotte een ruimte doet ontstaan, waarvan de vorm op een dwarsdoorsnede overeenkomt met die van een kegel, mesometraalwaarts afgeknot door het oude dwarsstuk van de T, anti-mesometraalwaarts begrensd door een cirkelsegment conform aan de navelblaas. De hierdoor gevormde eikamers zijn ontstaan ingevolge van groei en uitzetting van den anti-mesometralen wand van den uterus, waardoor de deze verbindende stukken van den hoorn ingeplant zijn aan de mesometrale zijde der vruchtkamers en tevens naar dezen kant zijn afgebogen. De woekering in stromaweefsel, in de subepitheliale laag beginnend, dringt de mondingen der klieren uiteen. Later degenereert het epitheel

hierin, de wanden verkleven, ten slotte vindt men nog maar klierresten onder de muscularis in het meer normale stroma.

De processen, waardoor de eerste vorming van schotelvormige lagen plaats heeft, welke echter steeds een relatief kort bestaan hebben, zijn de met woekering van de subepitheliale, kernrijke zone gepaard gaande, oedemateuze imbibitie van 't weefsel en oplossing van cellige elementen, waardoor ten slotte een holtesysteem ontstaat, begrensd door dunne celbalken en gevuld met producten van oedeem en oplossing van weefsel. Deze laag is van buiten omgeven door lagen, die den overgang vormen tot het nog normale, alleen gewoekerde weefsel, terwijl zij aan 't lumen meer en meer gescheiden wordt door producten van een later proces.

Zeer merkwaardig is het in dezen tijd optreden van „reuzencellen", plasmaklompen van verschillende grootte, die zich donker kleuren en vele reuzenkernen met een grooten nucleolus bevatten. Individueel verschillend vindt men samenhangende lagen of meer afzonderlijke groepen, naar 't schijnt. Zij liggen meestal oppervlakkig, vaak in verband met den trophoblast, niet met de vaten. Oppervlakkig zou men ze gaarne houden voor foetale „zuigwortels" van den trophoblast, door REJSEK bij Spermophilus beschreven. Daar men alle overgangen vindt tusschen het mucosaweefsel en deze elementen, soms zelfs den overgang kon vervolgen; daar zij verder aan 't ei worden gevonden, bezig zich op te lossen in de dit omgevende massa; echter nooit een ontstaan uit den trophoblast kon worden waarschijnlijk gemaakt, zijn de reuzencellen om deze en andere redenen m. i. te beschouwen als een degeneratieve materne vorming, als een symplasma. Met de „monstre cells" van MINOT, SCHOENFELD, e. a. bij 't konijn beschreven, zijn zij niet te identificeeren, daar deze elementen ook bij Sciurus te vinden zijn, echter veel later. Ten slotte spreken vergelijkend anatomische beschouwingen vóór mijn opvatting (zie beneden).

Het uteres-epitheel verdwijnt gaandeweg overal waar de kiemblaas er mede in aanraking is. Van woekering er van is nu nooit sprake.

Reeds betrekkelijk snel (zelfs met een zeer uitgebreid materiaal zijn de overgangen moeilijk te volgen!) ontstaat een tweede stadium, waarin van de oppervlakte af door woekering van de stromacellen een schotel ontstaat van cubische cellen met gegranuleerd plasma (decidua), die zich meer en meer uitbreidt, terwijl, waarschijnlijk door resorptie onder invloed van den druk, de boven beschreven holten verdwijnen. Intusschen veranderen de deciduacellen aan de oppervlakte weer verder en worden (wel door de navelblaas, daar hierin en in de cellen van den wand een dergelijke stof is te vinden)

geresorbeerd, waarbij een fijn maaswerk ontstaat, doordat de peripherie der cellen blijft bestaan; door den druk wordt dit maaswerk tot een dunne laag van lamelleuze structuur samengeperst, die in zijn jongste deelen steeds nog de mazen vertoont. Vaten zijn in de decidua niet of nauwelijks te vinden. De scheiding tusschen de decidua en het er buiten gelegen, nog weinig of niet veranderde, subdeciduale weefsel is de grens tot waar de differentiatieprocessen in den wand zijn voortgeschreden, tevens ongeveer die tot waar de verkleving van de kiemblaas met den wand tot stand kwam; zij kan daarom „differentiatiegrens" heeten.

In dezen tijd worden de boven beschreven reuzencellen minder en minder in aantal, zien er steeds meer degeneratief uit, om spoedig geheel te verdwijnen. Aan de mesometrale zijde heeft vooral door epitheelwoekering een vermeerdering en vergrooting van crypten plaats (niet klieren !).

Een tweede tijdperk in deze praeplacentaire stadia kenmerkt zich voor het ei door het ontstaan van 't amnion etc. De vergrooting van het embryo doet dit plaats zoeken in een impressie van het bovendeel van de navelblaas, die zich meer en meer accentueert. Aan de navelblaas begint, weer aan het 't verst van 't embryo verwijderde deel aanvangend, een uitgroeien van de trophoblastcellen met hun kernen, welk proces eveneens steeds meer naar de embryonale pool voortschrijdt.

Kenmerkend voor dit stadium is het optreden van verschillende processen, die aan het ei zoowel als aan den uterus in aequatoriale banden boven de differentiatiegrens beginnen van hieruit eveneens van alle zijden mesometraalwaarts voortschrijden. Deze processen bestaan voor het ei in een woekering van den trophoblast, die later het buitenblad van de amnionplooi zal bekleeden; er ontstaan onregelmatig geplaatste, donkere, polygonale cellen, duidelijk begrensd, op de oppervlakte van den trophoblast verheffen zich overal celhoopjes.

Aan den uteruswand ontstaat op de correspondeerende plaats eerst een progressief proces: vorming van crypten door woekering van het epitheel, tevens verdikking van het tusschengelegen stroma; later is door dit proces een ring ontstaan, die in het lumen boven de differentiatiegrens overal een weinig naar binnen inspringt, de holte van de vruchtkamer verdeelend in een mesometraal gelegen, placentair deel en daaronder gelegen omphaloïd deel, terwijl door deze insnoering de inmiddels voltooide diplotrophoblast (chorion) met zijn zeer sterk verdikte trophoblastlaag uitpuilt. Het hyperplastische stroma van den uitspringenden ring is door crypten overal rijk doorploegd.

Inmiddels is dit woekeringsproces op den voet gevolgd door een

van regressieven aard; het epitheel begint aan de oppervlakte, later dieper en dieper in de gevormde crypten doordringend, te degenereeren; plasma en kernen worden donkerder, homogener, kleiner; later lossen de pycnotische kernen in het plasma op en er ontstaat een massa: symplasma epitheliale, waarin ten slotte overal kleine en grootere vacuolen optreden. Overal zijn korte epitheeluitloopers in het stroma doorgedrongen, die spoedig in degeneratie overgaan. Ook het stroma zelf ondergaat later dergelijke veranderingen.

Overal waar deze degeneratie eenigszins is voortgegaan, begint een derde bandvormig uitgebreid proces: de verdikte trophoblast dringt met zijn uitloopers een eindweegs in de crypten binnen, later ook daartusschen in de gedegenereerde massa. Hier en daar verandert daarbij de foetale massa na vergrooting en bleeker worden van de elementen in een syncytium, waarvan de kernen goed contrasteeren tegen die van het symplasma materna. In deze ring van verbinding verdwijnt spoedig weer het syncytium; de rekking maakt de verdikte trophoblast met zijn in de crypten indringende holle uitloopers weer éénlagig; de area vasculosa blijft een tijdlang juist hier nog in verband met den trophoblast: alles spreekt m. i. voor de hypothese, dat dit als een rudiment is te beschouwen en wel van een omphaloïde placentatie (bij Sorex, die onder de Insectivoren het dichtst bij de Rodentia staat, wordt een duidelijke omphaloïde placentatie aangetroffen!).

De producten van de crypten en klieren, transsudaten en symplasmamassa's, worden uitgestort over den koepel van den diplotrophoblast en waarschijnlijk door deze geresorbeerd.

De vaten woekeren intusschen sterk in den wand van het mesometrale, nog onveranderde deel der vruchtkamer tusschen de crypten; hun wand blijft bestaan uit enkelvoudig endotheel, zonder perivasculaire scheede.

III. Placentaire stadia. (Na den aanvang van den aanleg der allantoïde placenta).

In het omphaloïde deel der vruchtholte wordt door rekking en resorptie van weefsel de wand meer en meer verdund, ofschoon de lagen steeds als voren te herkennen blijven. De vroeger reeds begonnen vergrooting der trophoblastcellen van de navelblaas leidt nu tot de vorming van echte „monster cells", wier cellichaam vaak concentrische ringen vertoont en andere eigenaardigheden, terwijl de groote kern dikwijls als een halve maan om een vacuole ligt. Steeds meer nadert dit proces de mesometraal gelegen vormingen. Het entoderm, dat deze monstercellen bedekt is zeer smal en kleincellig;

waar het de area vasculosa bekleedt, bestaat het daarentegen uit cubische, krachtige cellen. In de navelblaas ligt steeds een coagulummassa. Het groote embryo stulpt meer en meer het bovendeel van de navelblaas in. Tusschen de monstercellen en het entoderm ontwikkelt zich een soort cuticula.

De processen, die in aequatoriale banden zich uitbreiden, schrijden steeds verder voort naar de mesometrale pool der vruchtkamer, tevens in de scheidingsstukken der vruchtkamers waardoor ze meer en meer in deze laatste worden opgenomen. Hierdoor ontstaan, vooral op doorsneden, uiterst gecompliceerde beelden.

De uitzetting treft nu het placentaire deel der vruchtkamers, zoowel als hun onderlinge verbindingsstukken, zeer sterk, zoodat het omphaloïde deel minder en minder groot wordt, terwijl de vroeger bestaande kamvormige afscheiding tusschen beide verdwijnt.

Het progressieve proces bereikt eindelijk de mesometrale pool der placentaire ruimte en dringt steeds verder in de verbindingsstukken der vruchtkamers door: het eerst koepelvormige, nog intacte stuk wand wordt later 8-vormig, ten slotte gereduceerd tot twee ronde vlakken, die meer en meer door de woekering tot de verbindingsstukken worden beperkt. Het progressieve proces vormt nu crypten, die, elders smal en diep, op de placentairplaats breed en wijd zijn door dilatatie en excessieve woekering van het stroma. Het epitheel is veellagig, verheft zich nog overal als papilletjes aan de oppervlakte. In het stroma bereikten niet alle cellen tegelijkertijd hun volmaaktheid als deciduacel, waardoor een eigenaardig gereticuleerd aspect ontstaat. Ook de vaten vermeerderen.

In dezen bodem treedt nu het degeneratieve proces op, ook weer centripetaal naar de mesometrale pool voortgaand. Het epitheel wordt tot een symplasma, geheel als boven beschreven, echter nu in overgroote massa, overal de trophoblast bedekkend. In het stroma vormt zich een conjunctivaal symplasma en wel, evenals het hyperplastische proces, niet overal gelijktijdig, zoodat balkjes van symplasma nog meer gezonde groepen omgeven. Buiten den placentairen trophoblast gaat dit alles voort tot het ontstaan van één massa symplasma epitheliale et conjunctivale, in het bereik van den placentairen trophoblast evenwel is vóór dien tijd reeds de trophoblast ingedrongen. Bij deze degeneratie worden ook vaten geopend, zoodat extravasaten nu geen zeldzaamheid zijn en veranderd bloed tegen den trophoblast wordt gevonden.

Het derde proces, dat van verbinding van den trophoblast met den uteruswand, bestaat nu in holle, éénlagige instulpingen in de crypten, welke trophoblastpapillen door kappen symplasma zijn bedekt; tus-

schen de crypten is de trophoblast door rekking uiterst dun, vaak niet herkenbaar, ook indien later de vorming van reuzencellen tot hier is doordrongen: deze zijn dan zeer lang en smal.

Eindelijk legt zich de placentaire trophoblast, die den sluitsteen a. h. w. vormt van den koepel van den diplotrophoblast en nu uit een duidelijk te onderscheiden basale laag cellen van één cel dikte en een, vaak 20 cellen dikke laag daarboven bestaat, overal tegen de in degeneratie begrepen papillen van den mesometralen koepel van de placentaire vruchtkamerruimte, waarbij eveneens de trophoblastpapillen nog door het symplasma zijn bedekt, als dit tusschen deze reeds is opgeslorpt.

Nu komt het, centraal boven beginnend en centrifugaal naar beneden voortgaand, tot de vorming van een foetaal syncytium uit de oppervlakkige lagen van den verdikten placentairen trophoblast, waarbij de kernen, die eerst klein en donker waren, grooter en helderder worden, één grooten nucleolus bevatten en duidelijk van alle materne elementen zijn te onderscheiden. Dit syncitium dringt overal in het materne weefsel binnen in strengen, zoodat een innige doorvlechting van matern en foetaal weefsel ontstaat, die centripetaal in de papil voortgaat. Dan ontstaan overal (waarschijnlijk nu eerst ten koste van moederlijk weefsel) „vacuolen" in deze massa, die bij hun vergrooting de basale trophoblastlaag (cytotrophoblast) uitbochten naar binnen en zich ten slotte met moederlijk bloed vullen. De allantois is intusschen in de trophoblastpapillen binnengedrongen en wordt door den groei van telkens twee uitbochtingen van den cytotrophoblast in lobjes verdeeld. Foetale vaten dringen weldra in elk lobje rijkelijk binnen.

De aanleg der placenta als geheel heeft geen ronden vorm, de naar de verbindingsstukken der vruchtkamers gekeerde randen zijn naar deze zijden concaaf, in overeenstemming met den vorm van het door de progressieve en regressieve processen hier ingenomen vlak.

Langzamerhand wordt al het materne weefsel door foetaal vervangen, zoodat ten slotte de eerst geheel moederlijke papillen geheel foetaal zijn. Door verdere uitzetting der door syncytium foetale omgeven „vacuolen" (ook groei ten koste van een zich nu overal vormend symplasma foetale!) en onderverdeeling weer van deze, gepaard aan een verder en verder gaande omscheiding der allantoisvlokjes door deze, moederlijk bloed voerende holten, ontstaan ten slotte papilvormige lobben met secundaire zijlobjes, alle gescheiden door allantoisbalken met foetale vaten; deze worden omgeven door den cytotrophoblast, welke op zijn beurt de, door een eerst breede, later steeds smaller wordende laag syncytium omsloten „vacuolen" (nu =

moederlijk bloed voerende holten) omringt. De zoo ontstane placenta rust op een onderbouw van matern weefsel, dat uit dezelfde elementen als vroeger (decidua, etc.) is samengesteld; de deciduacellen groeien vaak sterk uit, terwijl de grens tusschen foetaal en matern weefsel op vele plaatsen door een smalle strook symplasma wordt aangegeven. De vorming van trophoblast-reuzencellen bereikt langzamerhand ook de supraplacentaire gedeelten, zoodat ook hier de enorme cellen (ook hier later vaak vrij) in het moederlijk weefsel liggen.

Extraplacentair komt spoedig een stadium, waarbij de progressieve en regressieve processen, boven beschreven, in de mucosa uteri hun uiterste grens hebben bereikt. Oppervlakkig is alles veranderd in symplasma, alleen in de diepte bestaan nog deciduacellen, die intusschen, daar de degeneratie niet zoover in de diepte reikt, vrij groot zijn geworden. De nog door deze processen vrij gelaten deelen der mucosa zijn alleen het slijmvlies van de, nu geheel in de vruchtkamers opgenomen, gedilateerde verbindingsstukken, wier door rekking dunne mucosa alleen nog platgedrukte crypten en een vrij dik epitheel bezit, dat voor een deel in symplasma overgaat. Tegen al deze extraplacentaire deelen ligt de extraplacentaire trophoblast, nu geheel uit reuzencellen bestaand, welke thans vaak losraken en vrij te midden van decidua komen te liggen.

Het embryo heeft bij zijn verderen groei plaats gevonden in de langzamerhand geheel ingestulpte navelblaas, waarvan de wanden elkaar nu bijna raken. De randen van de zoo ontstane, het embryo omvattende kom, worden niet gevormd door den sinus terminalis: deze ligt verder beneden in den binnensten wand. De kleine ruimte in de navelblaas is nog steeds gevuld met coaguleerende massa's, terwijl het de area vasculosa bekleedende entoderm, dat nu vaak papillen gaat vormen, nog zeer krachtig van uiterlijk is. De buitenwand van dezen kom verdwijnt nooit,

Bij den verderen groei van de placenta bereikt deze de randen van de navelblaaskom, nog later groeit zij er in binnen en vergroeit met den binnenwand: de sinus terminalis ligt dan op de helft van de dikte der placenta, terwijl een plooi van het entoderm er in schijnt opgenomen te zijn.

In het laatste deel der graviditeit groeit van uit de boven beschreven, door de progressieve en regressieve processen vrijgelaten deelen epitheel tusschen het gedegenereerde en het normale deel van de mucosa, vereenigt zich misschien met de intusschen woekerende klierresten in de diepte: de navelblaas wordt van de mucosa afgelicht. Iets later begint dit ook circulair om de placenta, zoodat aan het eind der zwangerschap dit orgaan min of meer gesteeld is en

na den partus het grootste deel van den uteruswand reeds met een nieuw epitheel is voorzien.

Vergelijkende Beschouwingen. Onder de Rodentia geeft de studie van den tijd van optreden van verschillende processen en organen van het ei (niet foetus!) aanleiding tot het opstellen van een rij: Sciurus — Lepus — Arvicola — Meriones — Mus — Cavia, waarin de eerste de meest primitieve vormen heeft bewaard, Lepus in vele opzichten een overgang tot de laatste vormt, bij welke meer en meer door het op den voorgrond treden van nieuwe processen, de oude, primitieve op den achtergrond worden gedrongen, in elkaar loopen en veranderen, in 't kort bijna onherkenbaar worden. Van dit laatste geeft de studie der literatuur over de verhouding van ei en uterus bij de Rodentia genoegzaam bewijzen; hier is het tevens dat blijkt, hoe groot de steun is, die het vergelijkend anatomisch onderzoek geeft, ja, dat allerlei problemen zonder deze niet zijn op te lossen.

Duidelijk blijkt de progressie in de eigenaardigheden van de navelblaas bij de verschillende dieren: bij alle wordt het bovendeel in het benedendeel ingestulpt, bij Sciurus eerst laat, bij Cavia als een der eerst optredende processen; de distale wand blijft bij Sciurus steeds bestaan, bij Lepus verdwijnt hij laat, bij Cavia reeds heel in 't begin; het entoderm bekleedt den binnenwand bij Sciurus reeds zeer vroeg, bij Mus zeer laat, bij Cavia nooit geheel.

In dezelfde volgorde verschijnt de antimesometrale fixatie en treedt de allantoïde placenta vroeger op, en daarmee de, deze vormende, trophoblastverdikking. De merkwaardige praeplacentaire processen, die bij Mus en Cavia zoo nauwkeurig zijn bestudeerd, zijn het juist, die door deze verdringing de groote moeilijkheden opleveren.

Bij alle Rodentia treedt de vegetatieve eipool in verbinding met den antimesometralen wand van den uterus. Deze verbinding eindigt bij Sciurus eerst tegen den partus, bij Mus en Cavia zeer vroeg reeds, bij Lepus tusschenbeide: door onderschuiving van epitheel van uit de verbindingsstukken der vruchtkamers.

Bij deze fixatie wordt de navelblaas omgeven door gewoekerd mucosaweefsel, dat later degenereert, opgelost en geresorbeerd wordt door het ei. Het epitheel verdwijnt reeds spoedig na lichte progressieve veranderingen, het stroma verandert in decidua door zeer sterke woekering, welke bij Mus, Cavia etc., overeenkomstig de kleinheid van de navelblaas (en dus van het ei), zich als reflexa om het ei verheft. Overeenkomstig een, in den zin van bovengenoemde volgorde, optredende neiging om de voeding door stromaproducten

te vervangen door matern bloed, is de vascularisatie van de decidua bij den Eekhoorn zeer gering, bij Cavia uiterst sterk en overeenkomstig de extravasaten, die het ei omgeven, bij Sciurus zeer zeldzaam, bij Mus on Cavia regel en rijkelijk.

Bij deze processen treden bij Sciurus moederlijke reuzencellen op (symplasma) en later foetale, als de eerste reeds verdwenen zijn. Bij Lepus zijn, overeenkomstig de meergemelde rij, door SCHOENFELD e.a. de foetale reuzencellen (monster cells) reeds in vroegere stadia gevonden; alle dan voorkomende worden voor foetaal aangezien, waarschijnlijk treden echter de materne in hetzelfde tijdperk op en is een deel der beschreven reuzencellen moederlijk, symplamatisch van oorsprong. Bij Mus zijn in veel vroeger stadia door JENKINSON beide reeds gevonden en onderscheiden, KOLSTER zag niet de foetale, DUVAL niet de materne! Bij Cavia moeten zij dus nog eerder optreden; de foetale zijn dan waarschijnlijk de woekerende „Gegenpolcellen" van v. SPEE, die de zona aan de vegetatieve pool doorboren; de materne komen overeen met de producten van de processen in den „Implantationshof" van v. SPEE. Ook het weer verdwijnen van deze vormsels gaat sneller en sneller. (Door dit alles wordt het reeds uit een phylogenetisch oogpunt zeer gewaagde der vergelijking van Cavia en Mensch door v. SPEE, nog scherper belicht).

In het licht der vergelijkende studie kunnen deze foetale „monster cells" worden beschouwd als rudimenten van een bij de voorouders der Rodentia krachtig ontwikkeld orgaan.

De het ei omgevende massa („coagulum") bestaat bij Sciurus vooral uit weefselproducten; deze treden in de volgorde der rij meer op den achtergrond en worden vervangen door bloed.

Van de bij Sciurus reeds rudimentaire omphaloïde placentatie kan bij de anderen niet veel terugverwacht worden, ofschoon de tot nu toe verwaarloosde studie van de morphologie der extraplacentaire deelen van de vruchtkamer misschien licht zou kunnen verschaffen.

De nu volgende aanleg der allantoïde placenta treedt het laatst op bij Sciurus, het eerst bij Cavia. De neiging, in de bekende volgorde toenemend, om zooveel mogelijk een voeding zonder weefselproducten der uterusmucosa en allantoid-placentaire wisseling tusschen foetaal en moederlijk bloed tot stand te brengen, doet de processen veranderen, die bij de placentatie in het spel zijn: bij Sciurus nog een zeer sterke hyperplasie van stroma-epitheel, later degeneratie, oplossing en resorptie met doordringing van den trophoblast in deze massa, alles tijdelijk duidelijk gescheiden en relatief langzaam in zijn werk gaande, bij Cavia bijna uitsluitend vaatwoekering terwijl proliferatie en degeneratie hand in hand gaan, evenals de invasie van

den trophoblast deze op den voet volgt, en (daar het doel: amener une hémorrhagie maternelle á être circonscrite par des tissus foetaux (DUVAL), spoediger bereikt is), niet ver gaat en zeer snel afgeloopen is. Bij de andere dieren alle tusschenstadia!

De latere processen in de ontwikkeling der placenta zijn bij alle verschillend, ofschoon in principe gelijk: onderverdeeling van moederlijk en foetaal bloed voerende holten, resp. vaten. De allantois blijft hierbij passief, de foetale massa omgroeit verder en verder bij zijn steeds meer doordringen in de vruchtkamerholte, de allantois-takjes.

De vorming van foetale reuzencellen gaat bij alle Rodentia voort over den geheelen trophoblast van de vegetatieve naar de placentaire pool; ook de deciduacellen worden grooter, zoodat ook de reuzencellen, die bij alle supraplacentair zijn gevonden (zooals JENKINSON reeds voor de Muis aangaf) deels van maternen, deels van foetalen oorsprong zijn; bij Sciurus blijven beide steeds goed te onderscheiden.

De min of meer geïsoleerde plaats, die in sommige opzichten, volgens de opgaven der auteurs, Lepus zou bezitten, zal misschien verdwijnen, indien de tot nu toe meer verwaasloosde studie van het praeplacentaire tijdvak (ook wat betreft de morphologie van de vruchtkamer) uitvoeriger zal zijn onderzocht.

Ten slotte heb ik mij evenwel niet kunnen overtuigen, dat ook voor de morphologie van de vruchtkamerholten de eenheid in het bouwplan voor alle Rodentia zoover gaat als FLEISCHMANN dat wil; de verschillen, die ik vond aangegeven zullen echter wellicht verdwijnen indien aan een omvangrijker materiaal dit alles is onderzocht, ofschoon FLEISCHMANN's opvattingen, om gelijke redenen, in hun tegenwoordigen vorm zeker onjuist zijn.

Physiologie. — De Heer WINKLER biedt eene mededeeling aan van den Heer J. K. A. WERTHEIM SALOMONSON: „*Eenige opmerkingen naar aanleiding van de methode der ware en valsche gevallen*".

(Mede aangeboden door den Heer PLACE.)

De methode der ware en valsche gevallen is door FECHNER aangegeven als hulpmiddel bij zijn psychophysische onderzoekingen. Hij gebruikte deze methode op verschillende wijzen: eerst ter bepaling van de nauwkeurigheidsmaat (Präcisionsmasz) bij het waarnemen van onderscheidsdrempels, later ter bepaling van die onderscheidsdrempels.

Reeds bij zijn eerste bepalingen deed zich de moeilijkheid voor, dat bij het herhaaldelijk pogen tot waarneming van een onderscheid tusschen twee gelijktijdig of achter elkander inwerkende prikkels niet alleen juiste en onjuiste waarnemingen gedaan werden, beantwoordende aan de „ware" en „valsche" gevallen, doch dat ook twijfelachtige gevallen voorkwamen, waarbij dus de waarnemer in het onzekere bleef omtrent den aard of het bestaan van een verschil der beide prikkels. Deze moeilijkheid heeft FECHNER zelf, en na hem verschillende andere onderzoekingen op verschillende wijzen trachten op te lossen. Hoe moest men handelen met die twijfelachtige gevallen?

FECHNER heeft verschillende methodes aangegeven en aan een uitvoerige kritiek onderworpen. Hij kwam tot de conclusie dat de beste methode die was, waarbij de twijfelachtige gevallen gelijkelijk over de valsche en ware gevallen verdeeld werden. Vond hij b.v. w ware gevallen, v valsche en t twijfelachtige dan berekende hij zijn precisiemaat alsof er $w + {}^1/_2 t$ „ware" gevallen en $\frac{1}{2}t + v$ valsche gevallen geweest waren.

Hij wijst er ook op dat een vooral bij de Amerikaansche experimenteel-psychologen gebruikelijke methode om bij de proeven den reagent op te dragen steeds een uitkomst te noemen, ook al verkeert hij in twijfel, feitelijk op hetzelfde neerkomt als op een gelijkmatige verdeeling der t-gevallen tusschen de ware en de valsche.

FECHNER heeft nog een andere methode aangegeven waarbij hij de drempelwaarde berekende, eerst uit de ware gevallen, dan uit de ware en twijfelachtige gevallen en uit die beide drempelwaarden de einduitkomst berekent.

G. E. MÜLLER heeft vervolgens een uiterst elegante methode aangegeven om de resultaten van de methode der valsche en ware gevallen te berekenen, waarbij hij uitgaat van de opvatting dat steeds de drie groepen van gevallen moeten voorkomen en recht van bestaan hebben; dat het aantal in elk dezer groepen door de waarschijnlijksrekening kon bepaald worden. Uit de getallen die hij afleidt uit zijn berekening kan dan later de drempelwaarde weder berekend worden.

Eenige andere methoden b.v. die van FOUCAULT, die van JASTROW, welke o.a. door FULLERTON en CATTELL warm wordt aanbevolen noem ik slechts ter loops, daar de methode van FOUCAULT ongetwijfeld onjuist is (zie o.a. G. E. MÜLLER), terwijl die van JASTROW niet van willekeur is vrij te pleiten.

Tegen al deze wijzen van behandeling van de methode der valsche en ware gevallen heb ik een principieel bezwaar, dat ik zal trachten hieronder nader toe te lichten.

Indien ik achtereenvolgens twee prikkels van verschillende physische intensiteit op een zintuig laat inwerken, dan zal de reagent omtrent het verschil dier prikkels al of niet eenige mededeeling kunnen doen. Kan hij geen mededeeling doen dan hebben wij een twijfelachtig geval voor ons, kan hij wèl een mededeeling doen dan kan nog deze mededeeling juist zijn — hetgeen dan een waar geval zou zijn — of onjuist zijn en wij hebben een valsch geval voor ons.

Wordt de proef een genoegzaam aantal malen herhaald, dan hebben wij ten slotte een zeker aantal ware gevallen *w*, valsche gevalen *v* en twijfelachtige gevallen *t* voor ons.

Algemeen wordt nu aangenomen, dat de reagent inderdaad *w*-malen goed heeft waargenomen, *v*-malen zich vergist heeft, *t*-malen heeft getwijfeld. Ware deze premisse juist, dan kon ook de opvatting van FECHNER of die van G. E. MÜLLER juist zijn, doch dit is niet het geval. In de premisse schuilt reeds een fout, zooals wij aanstonds zullen zien.

Omtrent de opvatting der twijfelachtige gevallen heerscht geen enkel meeningsverschil. Hiertoe behooren in de eerste plaats de gevallen waar de indruk van positieve gelijkheid door den reagent ontvangen is, en verder de gevallen, waar hij geen verschil waarnam, dus in twijfel bleef. Steeds hebben wij daarbij werkelijk alleen gevallen, waarbij een kleiner of grooter physisch verschil niet gepercipiëerd werd, zoodat twijfel ontstaat.

Ook omtrent de valsche gevallen behoeft geen meeningsverschil te bestaan. Hier heeft een zinsprikkel ingewerkt; hier werd een oordeel uitgesproken, doch door een reeks van omstandigheden onafhankelijk van den wil van den reagent is het oordeel niet in overeenstemming met de physische oorzaak. De physische oorzaak is dus *niet* waargenomen, maar toevallige omstandigheden hebben den reagent er toe gebracht, te meenen, dat hij wèl een oordeel kon uitspreken, waarbij weder toevallig dit oordeel onjuist was.

En nu komen wij tot het hart van de kwestie. Indien het mogelijk is, dat onder een reeks van proeven een aantal voorkomen, waarin de reagent feitelijk de physische oorzaak niet waarneemt, maar door het toeval er toe komt een oordeel uit te spreken, dat *onjuist* is, dan moeten er ook een aantal gevallen zijn, waarin eveneens de physische oorzaak niet wordt waargenomen, doch waarbij het toeval er toe voert om een oordeel uit te spreken, doch ditmaal een juist oordeel. Daar nu dit feit alleen afhankelijk is van toevallige omstandigheden buiten onzen wil gelegen, bestaat er evenveel kans dat een verkeerd oordeel als dat een juist oordeel wordt uitgesproken. Hadden wij dus *v* valsche gevallen, dan mogen wij redelijkerwijze

ook aannemen, dat er v gevallen zijn waarin feitelijk de physische oorzaak *niet* is waargenomen, doch waarin toch een oordeel, en ditmaal een goed oordeel is uitgesproken. Deze v gevallen zijn echter geprotocolleerd onder de ware gevallen, doch mogen niet als gevallen van juiste waarneming worden aangemerkt: slechts van $w—v$ gevallen mogen wij veronderstellen, dat de physische oorzaak inderdaad en feitelijk is waargenomen: in alle overige gevallen, dus in $2v + t$ gevallen is geen waarneming van de werkelijke differentie der prikkels geschied.

En nu hebben wij inderdaad slechts met twee mogelijkheden te doen, die ik als *gepercipiëerde* en *niet gepercipiëerde* gevallen zal aanduiden en wier aantal ik met ξ en χ zal aangeven; reeds a priori is dan de veronderstelling gewettigd dat wij het recht hebben de principes der kansrekening hierbij toe te passen.

Deze veronderstelling wordt zekerheid, wanneer wij even in herinnering brengen welke mathematische betrekkingen door Fechner voor het aantal valsche en ware gevallen gegeven werden.

Zooals men weet telde Fechner bij het aantal ware gevallen dat het experiment opleverde de helft der twijfelachtige gevallen op: hij nam dus een gecorrigeerd aantal ware gevallen w' aan zoodat dus $w' = w + \frac{1}{2} t$. Op dezelfde wijze corrigeerde hij het aantal valsche gevallen door er eveneens de helft der twijfelachtige gevallen bij op te tellen: $v' = v + \frac{1}{2} t$.

Indien ik mijn aantal gepercipieerde gevallen bereken vind ik daarvoor $\xi = w—v$, terwijl het aantal niet gepercipieerde gevallen $\xi = t + 2v$ bedraagt. Nu zien wij onmiddellijk, dat ik voor het aantal gepercipieerde gevallen ook kan schrijven:

$$\xi = w^1 — v^1.$$

Daar door Fechner voor de relatieve grootte van het aantal gecorrigeerde ware gevallen de uitdrukking:

$$\frac{w^1}{w+t+v} = \frac{w+\frac{1}{2}t}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2}\, dt$$

gegeven is, en voor het relatieve aantal gecorrigeerde valsche gevallen:

$$\frac{v^1}{w+t+n} = \frac{v+\frac{1}{2}t}{n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2}\, dt$$

zoo vinden wij hieruit onmiddellijk voor ξ en χ de beide betrekkingen:

$$\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2} dt$$

en

$$\chi = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{Dh} \varepsilon^{-t^2} dt.$$

Wij zien dus dat de door mij voorgestelde verdeeling der ware, twijfelachtige en valsche gevallen ons in staat stelt voor de berekening gebruik te maken van de bekende tabellen van FECHNER.

Ik wensch hier met nadruk er op te wijzen, dat de formules van G. E. MÜLLER de zelfde uitkomst geven behoudens het bekende verschil in de integraal-grenzen: welke bij G. E. MÜLLER 0 en $(S_u \pm D)\, h_u$ zijn.

Het ligt in het minst niet in mijn bedoeling hier partij te kiezen usschen FECHNER en G. E. MÜLLER in de kwestie der „drempelwaarde": deze wordt door mijn opmerking zelfs niet aangeraakt.

Het blijkt uit het bovenstaande, dat de resultaten van een berekening eener voldoend uitgebreide proefreeks volgens mijne opvatting getallen moeten geven, die nauw te saam hangen met die van FECHNER of van G. E. MÜLLER — afhankelijk van de integratiegrenzen. Toch zou ik in het bijzonder nog er op willen wijzen dat G. E. MÜLLER's formules over de ware, valsche en twijfelachtige gevallen eerder de voorstelling zijn van een statistisch geconstateerde psychologische gebeurtenis, terwijl bij de door mij voorgestane opvatting der methode van de valsche en ware gevallen een meer physiologisch standpunt wordt ingenomen.

Ten slotte nog de opmerking dat het hier medegedeelde misschien een steun is voor de door CATTELL en FULLERTON voorgestelde opvatting van drempelwaarde. Zij nemen aan dat deze bereikt is als het aantal gecorrigeerde ware gevallen 75 pCt. bedraagt. In dat geval is ξ en χ beide 50 pCt. Zij nemen dus als drempelwaarde aan een zoodanig verschil tusschen 2 prikkels, dat er evenveel kans bestaat dat dit wèl als niet waargenomen wordt.

Meteorologie. — De Heer VAN DER STOK biedt eene mededeeling aan van den Heer W. VAN BEMMELEN: *„Over magnetische storingen volgens hunne opteekening te Batavia."*

Eenige maanden geleden richtte de Heer MAUNDER van het Observatorium te Greenwich het verzoek aan het Observatorium te Batavia om hem een lijst van de te Batavia opgeteekende storingen te verschaffen, met het doel daaraan zijne uitkomsten omtrent den invloed

van de synodische omwenteling der zon op het optreden der storingen te toetsen.

MAUNDER komt door een groepeering der Greenwich-storingen volgens den synodischen omwentelingstijd tot het besluit, dat zij een besliste neiging vertoonen om eens en soms zelfs meermalen terug te keeren en maakt deze gevolgtrekking:

„Our magnetic disturbances have their origin in the sun. The solar „action with gives rise to them does not act equally in all directions, „but along narrow, well defined streams, not necessarily truly radial. „These streams arise from active areas of limited extent. These active „areas are not only the source of our magnetic disturbances, but „are also the seats of the formation of sun-spots."

Zoo spoedig mij mogelijk was, ben ik tot het opmaken dier lijst overgegaan, en heb die over de jaren 1880 tot 1899 uitgestrekt. Zij bevat niet minder dan 1149 nummers. Dadelijk daarop heb ik eenige statistische berekeningen, op de lijst gegrond, uitgevoerd.

Het is altijd beter, dat de uitkomsten van dergelijke statistische berekeningen eerst door den maker zelven worden besproken, dan dat een ander, voor wien het onmogelijk is het gebruikte materiaal te raadplegen, hiertoe overgaat.

Ofschoon het mijn voornemen is, de lijst met de noodige reproducties van storingsbeelden te voorzien, wensch ik wegens de actualiteit van de betreffende vraagstukken, een voorloopige mededeeling hierover te doen.

Regels gevolgd bij het opmaken der lijst.

Een scherpe definitie van het begrip storing is nog nimmer gegeven; het bezit evenwel karakteristieke eigenschappen, te weten:

1. Een plotseling begin.
2. Eene aardmagnetische nastoring.
3. Eene verhoogde bewegelijkheid.

Wat de tweede eigenschap betreft, door mij aldus genoemd, kan in herinnering gebracht worden, dat het een bekend feit is, hoe bij een storing het gemiddelde niveau der componenten begint te dalen of rijzen tot een maximale verandering is bereikt, om vervolgens weer langzaam tot het oude niveau terug te keeren.

In 1895 [1]) vestigde ik de aandacht op dit verschijnsel en bestudeerde zijn voorkomen over de geheele aarde. Door dit onderzoek was het mij mogelijk de volgende beschrijving te geven:

Tijdens een magnetische storing ontwikkelt zich een kracht, tegenovergesteld aan de aardmagneetkracht, die evenwel gericht is volgens

de meridianen van het regelmatige deel van het aardmagnetisme en dientengevolge niet naar de magnetische pool, maar naar het magnetische aspunt wijst.

In overeenstemming met deze beschrijving vermindert gedurende het eerste gedeelte van een storing de horizontale component, terwijl de verticale toeneemt, en keeren deze componenten gedurende het tweede gedeelte weer langzaam tot hun oude waarden terug.

Daar nu de bovenvermelde eigenschappen sub. 1 en 2, niet aan iedere storing eigen zijn, of niet altijd ondubbelzinnig genoeg zich vertoonen, om eenige opvolging van bochten in de geregistreerde kromme al of niet als storing te kunnen beschouwen, zijn zij niet geschikt om als vaste maatstaf te dienen.

De verhoogde bewegelijkheid daarentegen begeleidt iedere storing en is dus in zooverre wel daarvoor geschikt en dientengevolge ook door mij aangenomen.

Ongelukkigerwijze is het evenwel onmogelijk een zekeren graad van bewegelijkheid vast te stellen, die als kriterium van storing kan aangenomen worden, want niet alleen de grootte van den uitslag, maar ook de steilheid en veelvuldigheid der bochten bepalen de mate van bewegelijkheid.

Om de nadeelen, voortvloeiende uit het in 't spel komen van persoonlijk oordeel, zooveel mogelijk onschadelijk te maken, is de lijst opgemaakt:

1e. door één persoon;

2e. in zoo kort mogelijken tijd;

3e. volgens de opteekening van een en dezelfde component (in casu de horizontale intensiteit, welke te Batavia het sterkst gestoord wordt);

4e. voor een tijdperk met zooveel mogelijk gelijke schaalwaarde der krommen (m.m. = ± 0.00005 C. G. S.);

Voor iedere storing is opgeteekend:

1e. het aanvangsuur;

2e. het einde;

3e. de tijd van maximale storing;

4e. de intensiteit.

In de gevallen van een storing beginnende met een plotselingen stoot, is de tijd tot op tienden van uren nauwkeurig vermeld; bij een geleidelijk begin slechts in uren.

Maunder spreekt bij plotseling begin van een S-storing; in analogie zal ik de geleidelijk aanvangende G-storingen noemen.

---

[1]) Die erdmagnetische Nachstörung. Meteorol. Zeitschrift 1895.

Het begin van een G-storing is niet gemakkelijk aan te geven. Ik heb daarvoor het uur van het eerste toenemen in bewegelijkheid gekozen en niet het uur, waarin de bewegelijkheid een onmiskenbaar storingstype begint te krijgen.

Naderhand werd het mij duidelijk, dat ik een groote voorkeur aan de even uren had toegekend, wat te verklaren valt uit het feit, dat op de Bataviasche magnetogrammen alleen de even uren van een tijdsein en bijgeschreven uurgetal zijn voorzien.

Ter elimineering van deze ongelijkmatigheid, heb ik de aantallen voor de oneven uren voor de eene helft bij het voorgaande, voor de andere bij het volgende uur gebracht.

Bij het geleidelijk uitsterven, aan de magnetische storingen eigen, is het meestal onmogelijk eenigszins nauwkeurig den eindtijd aan te geven. Ik heb altijd den duur zeer ruim genomen en dientengevolge zijn vele dagen op een groote storing volgende, als gestoord aangenomen, die anders als ongestoord zouden voorbijgegaan zijn.

Voor den tijd van het maximum heb ik het uur van grootste bewegelijkheid genomen. Dat valt niet altijd samen met dat van grootste nastoring. Dit laatste is misschien een passender tijdmaat, maar om het te bepalen zou een groote reken- en meetarbeid noodig zijn, daar de verandering in niveau meestal door de gewone dagelijksche variatie verborgen wordt.

De intensiteit is opgegeven volgens een schaal van vier graden: 1 = zwak, 2 = matig, 3 = sterk, 4 = hevig.

Het is onmogelijk een nadere definitie van deze sterktegraden in woorden te geven; een reproductie van typische gevallen is daarvoor noodig.

Verdeeling van de aanvangsuren over den dag.

Het is een bekend feit, dat de beginstoot gelijktijdig over de geheele aarde optreedt. De twee lijsten voor Batavia en Greenwich geven 53 gevallen van overeenkomstige beginstooten, en als de gelijktijdigheid absoluut is, moet hier uit het lengteverschil Grw.—Bat. afgeleid kunnen worden.

Ik vond nu voor dat tijdsverschil:

in	6 gevallen	$7^u 12^m$
„	19 „	7 0
„	28 „	7 6
	gemiddeld	$7^u\ 7^m 15^s$.

Het ware lengteverschil bedraagt $7^u 7^m 19^s$.

Om uit 53 gevallen, waarbij de tijd ruwweg tot op slechts een tiende uur is gemeten, zulk een groot lengteverschil tot op 4 secunden nauwkeurig te verkrijgen, is zeker hoogst merkwaardig.

Deze gelijktijdigheid over de aarde zou een gelijkmatige verdeeling van de beginstooten over alle uren van het etmaal in zich sluiten, indien elke beginstoot ook over de geheele aarde zich verbreidde. Dit nu is, zooals door de twee storingslijsten bewezen wordt niet het geval, en het is dientengevolge begrijpelijk, dat de beginstoot een ongelijkmatige verdeeling vertoont.

Verdeeling van den beginstoot over het etmaal.

Uur	Aantal in %	Uur	Aantal in %
0 a. m.	4.1	12	4.7
1	2.5	13	5.0
2	3.0	14	3.3
3	2.2	15	3.9
4	4.1	16	4.4
5	3.9	17	3.6
6	6.3	18	4.1
7	4.5	19	5.5
8	5.1	20	3.6
9	5.8	21	3.9
10	6.1	22	3.6
11	5.0	23	3.3

De beginstoot is dns het veelvuldigst des morgens om 6 en 10 uur en 's avonds om 7 uur; het zeldzaamst om 3 uur 's morgens en 2 uur 's middags.

Diezelfde verdeeling vinden wij in de G-storingen terug, maar veel meer uitgesproken.

Verdeeling der G-storings-aanvangstijden over het etmaal (in %).

Uur		0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
Intens:	1	6.0	6.0	5.1	6.7	18.7	17.9	7.4	4.7	6.0	8.0	6.5	7.1
	2	4.5	4.9	4.2	5.7	20.8	16.4	7.3	5.6	5.4	9.2	8.4	7.6
	3 en 4	7.1	3.5	4.3	7.5	18.5	13.4	3.9	5.5	5.1	9.1	11.8	10.2
	Alle	5.4	5.1	4.6	6.3	19.7	16.5	6.8	5.2	5.6	8.7	8.3	7.8

Hier hebben wij een hoofdmaximum om 8 uur 's morgens en een secundair maximum om 6 uur 's avonds, en het blijkt dus, dat het aanvangsuur der G-storingen afhankelijk is van den stand der zon ten opzichte van het waarnemingsstation en ook dat de uren, die het meest geeigend zijn voor den aanvang van een G-storm, evenzoo het ontstaan van een beginstoot begunstigen.

Verdeeling van den tijd van maximumstoring
over het etmaal (in °/₀).

	Uur	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22
S-stor.	Intensiteit 1	11.5	6.7	5.5	1.8	4.7	12.8	12.6	5.3	6.1	6.1	10.9	16.2
	» 2	16.9	9.1	5.9	1.2	1.4	7.3	7.6	3.9	7.6	10.8	13.5	15.2
	» 3 en 4	11.2	4.0	2.4	1.6	0.8	4.0	7.2	6.8	12.0	13.6	17.2	19.2
	Alle	14.1	7.4	4.9	1.5	2.4	8.6	9.2	4.8	7.8	9.7	13.3	16.3
G-stor.	Intensiteit 1	12.3	16.7	10.9	5.8	4.3	13.8	5.8	2.9	2.9	5.1	10.1	9.4
	» 2	11.3	7.7	3.6	5.6	3.3	8.5	11.3	8.5	6.1	5.2	14.1	14.9
	» 3 en 4	12.2	9.3	5.8	3.2	3.5	7.7	9.0	6.4	8.0	7.7	10.3	17.0
	Alle	11.9	10.2	6.0	4.6	3.6	9.2	9.2	6.5	6.3	6.3	11.6	14.8

De verdeeling van den tijd waarop de storing haar grootste intensiteit bereikt is dus voor alle soorten van storingen dezelfde en vertoont een hoofdmaximum 's avonds om 10 uur, een secundair maximum om 11 uur 's morgens, en minima om 8 uur 's morgens en 3 uur 's middags. Derhalve is de ontwikkeling van een storing sterk afhankelijk van den stand van de zon ten opzichte van het waarnemingsstation en wel op dezelfde wijze voor S- en G-storingen.

Vergelijken wij deze verdeeling met die van de aanvangstijden, dan blijkt: *dat op de uren, waarop de kans voor een maximum van storing begint te stijgen, de grootste kans voor het aanvangen van een storing bestaat.* Dientengevolge mogen wij besluiten: *dat de ontvankelijkheid van het aardmagneetveld voor gestoordheid aan een dagelijksche en een halfdagelijksche periode onderhevig is, hoe ook de oorsprong der gestoordheid moge wezen, 't zij plotseling of geleidelijk.*

Dezelfde uitkomst volgde al uit het doorzien van de honderdtallen van dagkrommen bij het opmaken der storingslijst. De bewegelijkheid bleek, na een groote rust in de morgenuren, ongeveer te 8 uur

te ontstaan en ongeveer op den middag een hoogtepunt te bereiken, daarna weer af te nemen tot een rust in den namiddag, die evenwel minder uitgesproken was dan die in den morgen, en vervolgens weer sterk toe te nemen tot kort voor middernacht, om ten slotte snel tot groote rust af te nemen.

De dagbochten waren gewoonlijk kleiner en sneller, de nachtbochten grooter en langduriger, ook regelmatiger van vorm. Deze regelmatige nachtbochten bleven soms tot één geïsoleerde beperkt. Zulk een solitaire golf is zeer geschikt voor het onderzoek omtrent de oorzaak dier golven.

Verdeeling van de eindtijden over het etmaal.

Uur	Aantal malen	Uur	Aantal malen
0 a. m.	163	12	66
2	172	14	60
4	204	16	43
6	140	18	50
8	60	20	46
10	36	22	49

Het is duidelijk, dat een voorkeur aan 0 uur a. m. — het eind van den dag — is gegeven.

Verder is — volkomen in overeenstemming met de boven vermelde gevolgtrekkingen — de verdeeling bijna geheel het omgekeerde van die van het maximum.

Samenvattende leert dus de statistiek der Batavia-storingen :

primo, *dat de oorsprong der S-storingen kosmisch is.*

secundo, *dat de oorsprong der G-storingen mogelijkerwijze ook kosmisch is, maar dat de aanvang van den plaatselijken tijd van den dag afhankelijk is,*

tertio, *dat de ontwikkeling van alle storingen op dezelfde wijze van den plaatselijken tijd afhangt.*

Storingen en zonnevlekkenaantal.

In onderstaande tabel is het jaar van 1 April tot 1 April gerekend, met uitzondering van 1882, daar van Dec. '82 tot Maart '83 geen diagrammeu verkregen zijn. De storingsaantallen voor de niet vol-

ledige jaren '80—'83 zijn in verhouding met het aantal ontbrekende dagen vergroot.

Aantallen storingen in °/₀.

Jaar	Zonnevlekken getal	Intensiteit							
		1		2		3 en 4		Alle	
		S	G	S	G	S	G	S	G
1880/81	37.5	2.7	4.2	1.5	6.6	1.2	2.3	1.6	5.1
81/82	56.9	1.4	6.7	0.0	5.9	1.2	2.3	0.8	5.6
82	70.8	1.4	2.8	5.3	6.6	13.0	6.1	7.9	5.2
83/84	68.8	6.8	7.8	7.5	5.4	6.9	5.3	7.1	6.2
84/85	59.5	2.7	4.6	9.8	6.4	9.3	6.1	8.2	5.7
85/86	45.7	4.1	1.4	9.8	4.1	10.6	6.9	9.0	3.6
86/87	19.6	0.0	1.1	2.3	5.9	1.9	7.6	1.6	4.5
87/88	11.6	2.7	7.8	3.0	4.3	3.7	4.6	3.3	5.6
88/89	6.4	5.4	5.7	4.5	4.1	2.5	3.1	3.8	4.5
89/90	5.9	10.8	4.9	5.3	3.3	1.2	4.6	4.6	4.1
90/91	13.0	13.5	8.1	2.3	3.8	0.6	3.1	3.8	5.2
91/92	47.4	6.8	4.6	5.3	5.1	6.9	8.4	4.7	5.5
92/93	74.5	9.5	6.4	8.3	3.3	12.4	4.6	10.3	4.6
93/94	85.2	9.5	6.0	9.0	3.8	11.8	5.3	10.3	4.8
94/95	74.2	5.4	4.6	8.3	7.7	3.7	6.9	5.7	6.5
95/96	57.4	6.8	5.3	5.3	6.9	5.0	8.4	5.4	6.6
96/97	38.7	4.1	4.2	5.3	5.4	2.5	3.1	3.8	4.6
97/98	26.5	4.1	5.3	3.0	5.4	3.7	7.6	3.5	5.7
98/99	22.9	2.7	8.5	4.5	5.9	1.9	3.8	3.0	6.5

Uit deze procentgetallen blijkt dat S-storingen *wel*, de G-storingen *niet* met de zonnevlekkenperiode medegaan; ook dat de overeenstemming met de zonnevlekken aantallen bij de S-storingen met de intensiteit toeneemt. Maar bovendien, dat bijna als regel elk maximum van S-storingen staat tegenover een minimum van G-storingen en omgekeerd.

Dit nu is wel alleen daarvan het gevolg, dat deze storingen elkaar wederkeerig verbergen, zoodat tijdens een S-storm een nieuw optredende G-storm niet wordt opgemerkt en omgekeerd niet een S-storm te midden van een G-storm optredende. Tijdens groote zonsactiviteit zullen evenwel de G-stormen meer door de langdurige S-stormen worden opgeslokt, en zelfs zullen dan de S-stormen van intensiteit 1 door hun sterkere broeders worden geëclipseerd. De S_1-storingen vertoonen dan ook een omkeering der zonnevlekken periode.

Verdeeling der storingen over het jaar.

Maand	(Aantal storingen (1 April '83—1 April '99	
	S.	G.
Januari	31	54
Februari	31	53
Maart	29	60
April	24	57
Mei	24	61
Juni	27	51
Juli	31	61
Augustus	29	47
September	32	55
October	31	64
November	22	58
December	18	58

Hier treedt een beslist onderscheid tusschen G- en S-storingen op; de S-storingen vertoonen een uitgesproken jaarlijkschen gang en de G-storingen niet.

Evenals voor de aanvangstijden wijst dit, òf op een verschil van oorsprong van beide soorten van storingen òf op een gedurende den dag en het jaar veranderlijke ontvankelijkheid voor het ontstaan van den beginstoot.

Vergelijking met de Greenwich-storingen.

De verdeeling der aanvangsuren over het etmaal vertoont voor beide stations een opmerkelijk verschil. MAUNDER vindt uit de storings-

reproducties, in de jaarlijksche publicatie van het Greenwich-observatorium voorkomende, een maximum te 6 uur 's avonds en uit de oorspronkelijke diagrammen een maximum te 1 uur namiddags. De reden van deze ongelijkmatigheid vindt hij in de wijze, waarop dat aanvangsuur werd opgezocht. Hij schrijft:

„The times when the phases are most strongly marked are naturally most often taken as the times of commencement." Die phasen (van bewegelijkheid) zijn nu te Greenwich te 1 uur p. m. en 6 uur p. m. het meest uitgesproken. Daar ik evenwel het eerste begin van verhooging der bewegelijkheid als aanvangsuur heb aangenomen, zullen dus mijn aanvangsuren vroeger zijn.

Het verschil tusschen Greenwich en Batavia, wat de aanvangsuren aangaat, is derhalve hoofdzakelijk aan verschil van opvatting toe te schrijven.

De verdeeling der storingen over het jaar blijkt voor beide plaatsen geheel dezelfde te zijn; maar de Greenwich-storingen, die aan een volledigen magnetischen kalender voor de periode 1848—1902, door Ellis opgemaakt, ontnomen zijn, laten geen scheiding toe tusschen S- en G-stormen. Het is dus niet te beoordeelen of te Greenwich bij de G-storingen de jaarlijksche schommeling ook afwezig is.

De beginstoot.

Het materiaal te Batavia aanwezig om dit verschijnsel ook voor andere plaatsen op aarde te onderzoeken, is zeer spaarzaam, maar desniettegenstaande kan reeds de gevolgtrekking gemaakt worden, dat *de beginstoot overal standvastig van eigenschappen is, en derhalve één verschijnsel van groote belangrijkheid, dat ons waarschijnlijk omtrent de wijze waarop de S-stormen de aarde bereiken, leering kan geven.*

Beschrijving voor eenige plaatsen.

Greenwich. Volgens de verkleinde reproducties van storingskrommen in de deelen der „Greenwich Observations", bestaat de stoot uit een plotselinge beweging in H, D en Z, onmiddellijk gevolgd door een beweging in tegenovergestelden zin, die veel grooter is, dan de eerste.

De richting is standvastig.

Voor den hoofdstoot vond ik voor 34 gevallen gemiddeld:

$H \Delta D = 25 \gamma W$; $\Delta H = +77 \gamma$; $\Delta Z = +39 \gamma$ ($1 \gamma = 0.00001$ C.G.S.).

Batavia. De voorstoot treedt te Batavia bij H en Z niet op, alleen bij de Declinatie, maar in geringere mate.

De richting is ook geheel standvastig.

35 gevallen uit de jaren 1891 en '92 gaven:

Grootte van den uitslag HΔD=9γW; ΔH=+45γ; ΔZ=—16γ.
Duur 5 min.; 305 min.; 12 min.

De beweging in de verticale intensiteit is zoo veel langzamer, dat men niet meer van stoot kan spreken.

In de reproducties van de Potsdam en Zi Ka Wei krommen vond ik ook verscheidene stooten, die een opmerkelijke standvastigheid in richting bezitten. Drie gevallen van Kaap Hoorn waren ook onderling van dezelfde richting. Hier volgt een overzicht van deze richtingen.

Station	D	H	Z
Potsdam	W	+	—
Greenwich	W	+	+
Zi Ka Wei	E	+	—
Batavia	W	+	—
Kaap Hoorn	W	+	—

Wij vinden dus, met één uitzondering voor declinatie en één voor de verticale intensiteit, dat: *de beginstoot van een S-storing is tegengesteld aan den nastoringsvector, evenwel met een afwyking naar het Westen.*

Onderstelling omtrent den oorsprong der storingen.

Het bestaan van begrensde conische stroombundels van electrische energie welke de aarde treffen is wel niet geheel nieuw, maar heeft door MAUNDER's uitkomsten verhoogde aannemelijkheid verkregen. Volgens de storingen te Batavia opgeteekend, zou men mogen onderstellen, daf het voornamelijk de S-stormen zijn, die ontstaan, als de aarde door zulk een bundel wordt getroffen. Daar nu de aarde het eerst langs den boog van zonsondergang wordt getroffen en de G-stormen juist meestal 's morgens aanvangen, zoo is er waarschijnlijkheid voor, dat de G-stormen hieraan maar gedeeltelijk hun ontstaan te danken hebben.

Kunnen wij bij de stroombundels aan de voortbeweging van negatieve electronen denken, zoo zouden de G-stormen door de rechtstreeksche lichtbestraling of de voortdrijving van geladen deeltjes door den lichtdruk veroorzaakt kunnen worden, in den geest van de onderstellingen door Sv. ARRHENIUS opgeworpen.

Verder mogen wij onderstellen, dat als de aarde eenmaal een lading heeft ontvangen, het verder verloop van de storiug hetzelfde is, omdat dit alleen van het plaatselijke uur afhankelijk is. ARRHENIUS

heeft in dien zin reeds een verklaring van het nachtelijke maximum gegeven.

Het is in den laatsten tijd vaak beproefd om de magnetische schommelingen te verklaren door de beweging van electrische ladingen door de hoogere lagen der atmospheer (SCHUSTER, VAN BEZOLD, SCHMIDT, BIGELOW).

De opmerkelijke analogie welke overal tusschen de stroomvelden der atmospherische circulatie en de krachtvelden der magnetische schommelingen ontmoet wordt, leidt tot dergelijke beschouwingen.

Daarom meen ik dat het geoorloofd is zulk een beschouwing te wagen, betreffende de oorzaak van den beginstoot en de nastoring.

Wij mogen onderstellen, dat de stroombundels negatieve electronen bevatten, en dat als de aarde door hen wordt getroffen, de allerbuitenste lagen der atmospheer met negatieve electronen geladen zullen worden.

Deze lagen evenwel blijven bij de dagelijksche omwenteling achter, en wel hoe hooger zij zijn hoe meer. Dientengevolge treedt een negatief geladen tegenstrooming in oostwestelijken zin op, die een toeneming van de horizontale intensiteit en een afneming van de verticale intensiteit zal veroorzaken.

De electronen zullen evenwel, wanneer zij in het magnetische veld der aarde treden, langs de krachtlijnen naar de magnetische zuidpool (de + pool) gedreven worden. Deze beweging is door de noorderlichtstralen bewezen.

De oostwestelijke beweging verandert daardoor in een noordoost-zuidwestelijke en de overeenkomstige magnetische kracht zal naar het westen afwijken.

Op deze wijze zou wellicht de beginstoot een verklaring kunnen vinden.

De plotselinge lading van de buitenste lagen der atmospheer met negatieve electriciteit zal de positieve ionen, wier tegenwoordigheid in de minder hooge lagen bewezen is, naar hoogere lagen trekken. Deze positieve ionen komen daardoor in een snellere tegenstrooming en een positieve oostwestelijke stroom wordt dientengevolge geboren.

De positieve ionen bewegen zich maar zeer langzaam langs de krachtlijnen naar het noorden toe, en geven dus geen noemenswaardige oostelijke afwijking van de optredende magnetische kracht. Die kracht zal dezelfde richting hebben als de nastoringskracht, vermindering der horizontale intensiteit en vermeerdering der verticale. Dat zij veel minder plotseling dan de beginstoot aangroeit is begrijpelijk, ook dat zij langzaam weer verdwijnt, naarmate de negatieve electronen òf de aarde weer verlaten òf zich met de positieve ionen

verbinden. Alleen zou men verwachten, dat de positieve strooming evenwijdig met de aardparalellen ware en dus de nastoringsvector naar de zuidelijke pool der aarde gericht en niet naar het zuidelijke magnetische aspunt. Misschien kunnen wij evenwel in den invloed van het regelmatige gedeelte van het aardmagnetisme op de verdeeling der positieve ionen de reden van dit feit vinden.

Hoe ruw ook deze verklaring van beginstoot en nastoring moge zijn, zij heeft toch een groot voordeel, n. l. dat zij de moeilijkheid ontgaat, die volgens Lord KELVIN daarin ligt, dat de uitwerping van energie door de zon, noodig om de magnetische storingen op aarde te veroorzaken, veel te groot moet genomen worden om eenigszins aannemelijk te zijn.

CHREE (Terrestrial Magnetism X, p. 9) toont aan, dat MAUNDER's beperkte stroombundels die moeilijkheid niet uit den weg ruimen. Volgens mijn verklaring evenwel is het noodig om alleen de ontvangen lading op het oogenblik van ontmoeting in rekening te brengen en is het niet noodig om die over den geheelen tijd tusschen het een of meer terugkeeren van den stroombundel te integreeren. Het is bij terugkeering mogelijk een intermitteerende emissie van energie aan te nemen. Ook wordt een gedeelte van de energie door de rotatie-energie van de aarde geleverd en een merkwaardige gevolgtrekking zou zijn, dat de omwentelingstijd der aarde door een magnetische storing met een zeer kleine fractie verlengd moet worden.

Batavia, 31 Augustus '06. W. VAN BEMMELEN.

Scheikunde. — De Heer HOOGEWERFF biedt eene mededeeling aan van den Heer R. A. WEERMAN over: *„Inwerking van kaliumhypochloriet op kaneelzuuramide"*.

(Mede aangeboden door den Heer FRANCHIMONT).

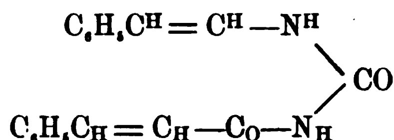
Uit de proeven van BAUCKE [1]) bij het propiolzuuramide en van FREUNDLER [2]), VAN LINGE [3]) en JEFFREYS [4]) bij het kaneelzuuramide schijnt te volgen, dat bij deze onverzadigde zuren de HOFMANN'sche reactie om met halogeen en alkali uit een amide een amine te maken niet gelukt.

Men kan over het niet gelukken twee onderstellingen maken; in

1) Rec. 15, 123.
2) BULL [3] 17, 420.
3) Proefschrift VAN LINGE, Bazel 1896.
4) Am. Chem. Journ. 22, 43.

de eerste plaats, dat de dubbele binding de intramoleculaire atoomverschuiving, die bij de HOFMANN'sche reactie moet worden aangenomen, verhindert [1]) en in de tweede plaats, dat het amine dat zou moeten ontstaan, in dit geval het $C_6H_5CH = CHNH_2$ in de gegeven omstandigheden verandering ondergaat [2]).

Het eerste is nu *niet* het geval, daar het gelukte uit het kaneelzuuramide te maken het ureumderivaat:



waarbij dus de helft van het amide de omzetting heeft ondergaan.

Waar het hier een onverzadigd amide geldt, is het aangewezen om gebruik te maken van de wijziging van HOOGEWERFF en VAN DORP en niet met vrij halogeen te werken. Verder moet de hypochlorietoplossing geen extra alkali bevatten en werd wegens de onoplosbaarheid van het kaneelzuuramide en de daardoor veroorzaakte onwerkzaamheid, in alcoholische oplossing gewerkt.

Kan het op het eerste gezicht ook eenigszins vreemd lijken, dat in alcoholische oplossing het ureumderivaat en niet het urethaan ontstaat, zoo wordt dit toch verklaarbaar door de proeven van STIEGLITZ en EARLE [3]) dat isocyanaten zeer gemakkelijk met halogeenamiden [4]) reageeren.

Ter bereiding van het ureumderivaat lost men het kaneelzuuramide op in de achtvoudige hoeveelheid 96 pCt. alcohol, laat tot gewone temperatuur afkoelen en druppelt langzaam de KOCl oplossing toe, bereid volgens GRAEBE [5]) en waarbij de overmaat alkali onmiddellijk voor het gebruik door 2N HCl is geneutraliseerd (op 2 mol. amide 1 mol. KOCl). De vloeistof verwarmt zich en spoedig scheidt zich een kristalbrij van zeer fijne naalden af. Na eenige uren wordt afge-

---

[1]) Bij de groote analogie, die er bestaat tusschen de LOSSEN'sche omlegging van hydroxamzuren en de HOFMANN'sche reactie was deze eerste onderstelling wel niet waarschijnlijk daar THIELE toch uit het geacyleerde kaneelhydroxamzuur het urethaan $C_6H_5CH = CH—NH—CO_0C_2H_5$ bereidde. Een tweede aanwijzing, hoewel minder bewijzend, bij de meer verwijderde analogie tusschen de BECKMANN'sche omzetting en de HOFMANN'sche reactie, was het ontstaan van isochinoline uit het oxim van kaneelaldehyd (Ber. 27, 1954).

[2]) Zie THIELE, Ann. 309, 197.

[3]) Amer. Chem. Journ. 30, 412. C 1904, I, 239.

[4]) Dit is ook de reden, waarom bij de bereiding van urethanen volgens JEFFREYS het Na alcoholaat in eens toegevoegd moet worden.

[5]) Ber. 35, 2753.

zogen, hetgeen door de fijne verdeeling vrij lastig gaat. De geel gekleurde massa wordt nu met warme alcohol behandeld en daarna met water gewasschen. Het ureumderivaat blijft dan reeds vrij zuiver achter smpt. ± 218. Door één à tweemaal omkristalliseeren uit ijsazijn verkrijgt men het zuiver in naalden van smpt. 225—226.

0,1733 gr. stof geven 0,0894 gr. H_2O en 0,4682 gr. CO_2
0,1654 „ „ „ 0,1863 „ „ „ 0,4467 „ „
0,1654 „ „ „ 13,9 CC.N bij 19½° en 765 m.M.

Gevonden:	73,68 pCt. C	5,78 pCt. H	9,70 pCt. N
	73,66	5,85	
Berekend voor $C_{18}H_{16}N_2O_2$:	73,95 pCt. C	5,51 pCt. H	9,59 pCt. N

De verbinding is in de koude onoplosbaar in water, ligroïn, aethylalcohol, methylalcohol, aether, zwavelkoolstof en benzol; bij kookhitte een weinig in alcohol en benzol en vrij gemakkelijk in ijsazijn, chloroform en aceton, onoplosbaar in alkaliën of zuren.

Scheikundig Laboratorium der T. H.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt, mede namens den heer H. A. SIRKS, eene mededeeling aan over „*de zes isomere dinitrobenzoëzuren*”.

Volledige stellen van isomere benzolderivaten $C_6 H_3 A_2 B$ zijn nog zeer weinig bestudeerd; toch moet het voor het dieper indringen in de kennis dier derivaten van groot belang worden geacht de eigenschappen der zes mogelijke isomeren waaruit zulke stellen bestaan, aan een vergelijkend onderzoek te onderwerpen. Eene bijdrage hiertoe is het onderzoek der zes isomere dinitrobenzoëzuren, hetgeen de heer SIRKS onder mijne leiding heeft uitgevoerd.

De overwegingen, die mij bij de keuze van deze serie isomeren hebben geleid waren de volgende. Vooreerst waren alle zes de isomeren bekend, hoewel de bereidingswijze van eenige hunner veel te wenschen overliet. Ten tweede bestond bij deze serie de gelegenheid om V. MEYERS „esterwet” aan een veel breeder materiaal te toetsen, dan tot nu toe het geval was geweest en om te bestudeeren welken invloed de aanwezigheid van twee groepen, op verschillende plaatsen in de kern aanwezig, op de esterificatiesnelheid hebben en deze te vergelijken met die snelheid in de monogesubstitueerde benzoëzuren. Ten derde konden de dissociatieconstanten dezer zuren aan een vergelijkend onderzoek worden onderworpen en hunne waarden in verband gebracht worden met die der esterificatieconstanten. Eindelijk

konden de smeltpunten en spec. gew. der zuren en van hunne esters, in hun verband met diezelfde constanten bij andere zoodanige seriën, onderzocht worden.

Omtrent de bereiding der zes dinitrobenzoëzuren zij het volgende medegedeeld. Het symmetrische zuur (1, 3, 5, met 1 wordt steeds de plaats der carboxylgroep aangegeven) werd door nitratie van benzoëzuur of van *m*-nitrobenzoëzuur verkregen. Alle overige werden door oxydatie van de overeenkomstige dinitrotoluolen bereid. Deze oxydatie werd ten deele uitgevoerd met permanganaat in zwavelzure oplossing, ten deele door lang voortgezet koken met salpeterzuur 1.4 sp. gew. aan een opstijgenden koeler.

De bereiding der dinitrotoluolen moest voor drie hunner, nl. (1,3,4). (1,3,6) en (1,3,2), (CH_3 op 1) zelf ter hand worden genomen; (1.2,4) en (1,2,6) toch zijn in den handel te verkrijgen, terwijl (1,3,5) niet noodig was, omdat het overeenkomstige zuur, zooals reeds werd gemeld, door directe nitratie van benzoëzuur gemakkelijk toegankelijk was. Zooals men ziet, zijn alle drie de dinitrotoluolen, die moesten bereid worden, derivaten van *m*-nitrotoluol en werd dus beproefd welke dezer door verdere nitratie hiervan zouden kunnen verkregen worden.

Het *m*-nitrotoluol, hetgeen thans door DE HAEN in zuiveren toestand tegen billijken prijs in den handel wordt gebracht, werd daartoe met een mengsel van zwavelzuur en salpeterzuur bij ca 50° behandeld. Bij afkoeling van het verkregen nitratieproduct krystalliseerde eene belangrijke hoeveelheid 1,3,4 dinitrotoluol uit, welke nog kon vermeerderd worden door gefractioneerde distillatie in vacuo van het vloeibare deel; de hoogste fracties werden telkens vast en leverden weder dit dinitrotoluol, zoodat ten slotte uit 100 gr. *m*-nitrotoluol ca 65 gr. dinitrotoluol (1,3,4) verkregen werden.

Daar de lager kokende fracties, niettegenstaande zij grootendeels van dinitrotoluol (1,3,4) bevrijd waren, ook bij afkoeling niet vast werden, was het waarschijnlijk dat hierin, behalve een weinig van genoemd dinitrotoluol, nog meer dan één der andere isomeren zou voorkomen, wier vorming bij de nitratie van *m*-nitrotoluol theoretisch mogelijk is. Bedenkt men nl. dat de aanwezigheid van 1 °/₀ van een isomeer in de vele gevallen die door mij onderzocht werden, ongeveer eene depressie van 0.5° in het smeltpunt geeft, dan was het feit dat de olie eerst aanzienlijk onder 0° vast werd en bij geringe temperatuurverhooging reeds weder smolt, terwijl de zuivere isomeren eerst bij 60° en hooger vloeibaar worden, niet te verklaren door de aanwezigheid van betrekkelijk geringe hoeveelheden (1,3,4) dinitrotoluol in de olie naast één ander bestanddeel, maar moet ondersteld wor-

den, dat zij uit een ternair systeem bestond. Dit werd bevestigd, toen het fractioneeren nog verder werd voortgezet; weldra begonnen nl. de laagst kokende fracties bij afkoeling, of ook langzaam bij gewone temperatuur, vast te worden en bleek deze zich afscheidende vaste stof het (1,2,3) dinitrotoluol te zijn. Het fractioneeren, gecombineerd met het uitvriezen der verschillende fracties, deed toen verder nog een derde isomeer tot afscheiding komen, nl. het (1,3,6) dinitrotoluol, waarmede dus de drie isomere dinitrotoluolen die bereid moeten worden, alle door het nitreeren van *m*-nitrotoluol waren verkregen. Het vierde mogelijke isomeer (1,3,5) werd ook bij voortgezet fractioneeren en uitvriezen, niet waargenomen.

Wat de relatieve hoeveelheden betreft, waarin de drie in het nitratieproduct van *m*-nitrotolual aangetoonde isomeren ontstaan, kan worden gemeld, dat dit product voor meer dan de helft uit (1, 3, 4) diditrotoluol bestaat, terwijl (1, 2, 3) in grootere hoeveelheid dan (1, 3, 6) schijnt voor te komen, daar de afzondering van dit laatste in voldoende hoeveelheid nog de meeste moeite kostte.

De *gecorrigeerde stolpunten* van de dinitrotoluolen (het zesde, symmetrische, werd ter completeering, volgens de methode van Beilstein A. **158**, 341 bereid) werden als volgt gevonden. Ook die der dinitrobenzoëzuren en van hunne aethylesters vindt men in onderstaande tabel.

	3.4	3.5	2.3	2.5	2.6	2.4
Dinitrotoluolen	58.3	92.6	59.3	50.2	65.2	70.1
Dinitrobenzoëzuren	163.3	206.8	204.1	179.0	206.4	180.9
Aethylesters	71.0	92.9	88.4	68.8	74.7	40.2

De *specifieke gewichten* der dinitrotoluolen en der aethylesters werden met behulp van Eykmans pyknometer bij 111°.0 bepaald met onderstaand resultaat:

CO_2H op 1 of CH_3	toluolen	esters
3.4	1.2594	1.2791
3.5	1.2772	1.2935
2.3	1.2625	1.2825
2.5	1.2820	1.2859
2.4	1.2860	1.2858
2.6	1.2833	1.2923

Water van 4° als eenheid. Gecorrigeerd voor opwaartschen luchtdruk en voor de uitzetting van glas.

Geleidingsvermogen. Dit werd op de gebruikelijke wijze met Wheatstone-brug en telephoon bij 25° en bij 40° bepaald. Aangezien de zuren in water moeielijk oplosbaar zijn, werd als begin-concentratie $v = 100$ of 200 genomen; de eindconcentratie was $v = 800-1600$. In onderstaande tabel zijn de dissociatie-constanten vereenigd.

Dinitrobenzoëzuren →→		3.4	3.5	2.3	2.5	2.4	2.6
K = 100 k	bij 25°	0.163	0.163	1.44	2.64	3.85	8.15
	bij 40°	0.171	0.177	1.38	2.16	3.20	7.57

Bij de vergelijking dezer cijfers valt terstond in het oog, dat de zuren met ortho-standige nitrogroep een veel grootere dissociatie-constante bezitten dan de twee andere, zoodat zij in dit opzicht in twee groepen te verdeelen zijn. Bij de zuren zonder orthostandige nitrogroep is de waarde der dissociatie-constante vrijwel dezelfde. Bij de vier andere blijkt daarentegen de plaats der tweede groep vrij groote verschillen te weeg te brengen. Het meest vergroot die tweede groep genoemde constante wanneer zij ook ortho staat; het 2-6-dinitrobenzoëzuur is in $^1/_{100}$ normaal oplossing reeds voor 90 % geioniseerd. Dan echter verhoogt eene NO_2-groep op paraplaats de dissociatie constante meer dan wanneer deze groep op meta staat; en voor de twee zuren 2,3 en 2,5 die beide de tweede groep op meta hebben, is K voor 2,5, dus voor het niet vicinale zuur aanzienlijk grooter dan voor het vicinale; zoodat ook hier niet alleen de plaats der groepen op zichzelf, maar ook hunne plaats ten opzichte van elkander invloed uitoefent. Daaruit volgt dan verder, dat de methode van OSTWALD, ter berekening van de dissociatie constante van digesubstitueerde zuren uit die der overeenkomstige monogesubstitueerde zuren, niet juist kan zijn, zooals uit onderstaande tabel ook blijkt:

Dinitrobenzoëzuur CO_2H op 1	K berekend	K gevonden
3.4	0.23	0.16
3.5	0.20	0.16
2.4	4.1	3.8
2.5	3.6	2.6
2.3	3.6	1.4
2.6	64	8.1

Bij de twee vicinale zuren 2,3 en 2,6 zijn de afwijkingen van de berekende waarde bijzonder groot, zooals ik vroeger (Rec. **20**, 363) voor andere vicinaal gesubstitueerde zuren ook aantoonde.

Met het oog op de vergelijking der cijfers voor de dissociatie constanten dezer zuren en voor hunne esterifatie-constanten scheen het wenschelijk, om ook een oordeel te hebben omtrent de moleculaire geleidbaarheid dezer zuren in alcoholische oplossing, Daartoe werden zij tot $^1/_{200}$ N. in alcohol van 95°/₀ (vol.) opgelost en bij 25° het geleidingsvermogen dier oplossingen bepaald. Onderstaande tabel vereenigt de gevonden waarden met die van waterige oplossingen van dezelfde concentratie en temperatuur:

dinitrobenzoëzuren →	3.4	3.5	2.3	2.5	2.6	2.4
μ_{200} in alcoh. opl.	1.1	1.15	1.75	2.25	2.7	2.9
μ_{200} in waterige opl.	161.5	162.5	293	321	355.5	335.5

waaruit blijkt, dat ook in alcoholische oplossing de zuren met orthostandige nitrogroep meer geioniseerd zijn, dan de andere.

Esterificatiesnelheid. De gevolgde methode was die van Goldschmidt, die het zuur in eene groote overmaat van alcohol oploste en als katalysator chloorwaterstof aanwendde. Het hier gebruikte alcoholische zoutzuur was 0,455 N. Bij gewone temperatuur bewaard, veranderde het zijn titre gedurende vele maanden niet merkbaar. Daar Goldschmidt aantoonde, dat de constanten evenredig zijn met de concentratie van den katalysator, werden alle omgerekend op eene concentratie van normaal zoutzuur. Door de groote overmaat van alcohol kon de vergelijking voor monomoleculaire reactie worden toegepast. De snelheidsmetingen werden bij 25°, 40° en 50° uitgevoerd. Bij deze laatste temperaturen ging het titre van het alcoholische zoutzuur (door chlooraethylvorming) zeer langzaam terug en moest dus daarvoor eene correctie worden aangebracht. De gebruikte alcohol was van 98.2 vol. °/₀.

Om niet alleen de esterificatieconstanten E der dinitrobenzoëzuren onderling, maar ook deze met de constanten van benzoëzuur en zijne mononitro-derivaten te kunnen vergelijken werden, althans bij 25°, die constanten voor laatstgenoemde zuren bepaald, onder geheel dezelfde omstandigheden als bij de dinitrozuren. In onderstaande tabel zijn de verkregen resultaten vereenigd:

Zuren	E bij 25°	E bij 40°	E bij 50°
benzoëzuur	0.0122	—	—
m. NO_2 »	0.0071	—	—
o. » »	0.0010	—	—
3.4 dinitro »	0.0086	0.033	0.077
3.5 » »	0.0053	0.028	0.060
2.3 » »	0.0005	0.0025	0.0071
2.5 » »	0.0003	0.0027	0.0076
2.4 » »	0.0002	0.0017	0.0056
2.6 » »	onmeetbaar klein		

Zooals men ziet, is E voor benzoëzuur zelf verreweg het grootst, en doet iedere verdere substitutie zijne waarde dalen.

Ook bij de beschouwing van deze tabel valt het terstond op, dat bij de dinitrobenzoëzuren twee groepen te onderscheiden zijn. Degene met ortho-standige nitrogroep hebben hier eene veel *kleinere* constante dan de twee andere. *Terwijl dus de dissociatieconstante voor zuren met orthostandige nitrogroep het grootst is, is hunne esterificatieconstante het kleinst.* Zooals uit onderstaande tabel blijkt, gaat dit verschijnsel volkomen parallel: de zuren wier dissociatie constante het grootst is hebben de kleinste esterificatie constante en omgekeerd.

Dinitrobenzoëzuren	diss. const. bij 40°	esterif. const bij 40°
3.4	0.171	0.033
3.5	0.177	0.028
2.3	1.38	0.0025
2.5	2.16	0.0027
2.4	3.20	0.0017
2.6	7.6	$<$ 0.0001

Bij een onderzoek in de literatuur is ons gebleken, dat deze regelmatigheid niet alleen in deze serie van dinitrobenzoëzuren bestaat, maar in een betrekkelijk groot aantal gevallen wordt waargenomen: De sterkste zuren worden het langzaamst veresterd. Men zoude

daaruit moeten besluiten, dat het bij de esterificatie door alcoholisch zoutzuur niet de geioniseerde, maar de ongesplitste moleculen der zuren zijn, die aan de reactie deelnemen.

Amsterdam / *Groningen* Sept. 1906, Lab. d. Univ.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt, mede namens den heer J. HUISINGA, eene mededeeling aan: *„over de nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur"*.

Van het phtaalzuur zijn twee isomere mononitroderivaten mogelijk die ook beide bekend zijn, in het bijzonder door een onderzoek van MILLER (A. **208**, 223). Het isophtaalzuur kan drie isomere mononitrozuren geven. Van deze is het symmetrische zuur, dat in verreweg de grootste hoeveelheid bij de nitratie ontstaat, goed bekend. Over de hierbij ontstaande monogenitreerde bijprodukten heerscht in de literatuur verschil van meening; in ieder geval is er slechts één tweede mononitrozuur vermeld, welks structuur echter twijfelachtig is gebleven.

Het onderzoek der nitratie van phtaalzuur en isophtaalzuur werd door ons ter hand genomen om ook hier de relatieve hoeveelheid der gelijktijdig ontstaande isomeren te bepalen, daar hieromtrent, voor de mononitrophtaalzuren, slechts een ruwe schatting (door MILLER) bekend was, terwijl voor de mononitroisophtaalzuren ook eerst nog moest worden uitgemaakt, welke isomeren daarbij ontstaan.

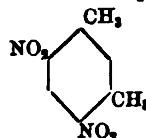
Wij zijn begonnen met de vijf mononitrozuren, afgeleid van phtaalzuur en isophtaalzuur, in geheel zuiveren toestand te bereiden. Voor de α- en β-nitrophtaalzuren leverde dit geene moeielijkheden op, daar de indicaties van MILLER, met slechts enkele ondergeschikte wijzigingen, geheel konden worden gevolgd. De zuren werden dus door nitratie van phtaalzuur, en scheiding der isomeren, verkregen.

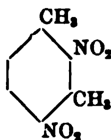
Het *symmetrische nitro-isophtaalzuur werd* door nitratie van isophtaalzuur *bereid*. Het krystalliseert met 1 mol. H_2O en smelt bij 255—256° terwijl in de literatuur wordt opgegeven, dat het met $1^1/_2$ mol. H^2O krystalliseert en bij 248° smelt. Aanvankelijk hoopten wij, dat uit de moederloogen van dit zuur de twee andere nitro-isophtaalzuren zouden te verkrijgen zijn. Daartoe moest eerst het isophtaalzuur zelf in volkomen zuiveren toestand verkregen worden, daar het anders twijfelachtig was, of de gevormde bijprodukten inderdaad van isophtaalzuur afkomstig waren. Door oxydatie van zuiver *m*-xylol (van KAHLBAUM) werd een isophtaalzuur verkregen, hetgeen nog terephtaalzuur bevatte, dat er door omzetting in de barytzouten uit verwijderd kon worden.

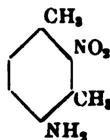
In de moederloogen van het sym. mononitro-isophtaalzuur bleek echter van de bijprodukten slechts zulk eene kleine hoeveelheid aanwezig te zijn, dat aan eene bereiding der nitrozuren (1, 3, 2) en (1, 3, 4) (1 en 3 =carboxyl) hieruit niet kon gedacht worden. Daartoe werd de volgende weg ingeslagen.

Bereiding van asymmetrisch nitro-isophtaalzuur (1, 3, 4). Bij voorzichtige nitratie van *m*-xylol bij 0° met een salpeterzuur van 1.48 spec. gew. ontstaat een mengsel van mono- en dinitroxylol, hetgeen ook nog onveranderd *m*-xylol bevat. Door distillatie met waterdamp gaat dit laatste eerst over; wanneer de mededistilleerde vloeistofdruppels in water beginnen onder te zinken verwisselt men van ontvanger, waarin naast water nu het as-nitro-metaxylol wordt opgevangen. Het einde der distillatie herkent men daaraan, dat zich in den koeler krystallen van dinitroxylol beginnen te vertoonen; 100 gr. xylol gaven ca. 85 gr. mononitroxylol (1, 3, 4).

Na rectificatie van dit mononitroxylol (kookpunt 238°) werd het in alkalische oplossing met een kleine overmaat van permanganaat geoxydeerd, waarbij uit 20 gr. 12 à 13 gr. zuur gewonnen werd, dat echter uit een mengsel van nitrotoluylzuur en nitro-isophtaalzuur bestond, die door krystalliseeren uit water konden gescheiden worden. Zoo werd het a.s. nitro-isophtaalzuur gewonnen met een smeltpunt van 245°. In water is het veel meer oplosbaar dan het symm. zuur, nl. bij 25° tot een bedrag van ca. 1 %. Het krystalliseert, in tegenstelling van het symmetrische zuur, zonder krystalwater in kleine, tamelijk dikke, plaatvormige krystallen. In heet water, alcohol en aether is het zeer gemakkelijk oplosbaar.

Bereiding van het vicinale nitro-isophtaalzuur (1, 3, 2). Door GREVINGK is opgemerkt, dat bij de nitratie van m-xylol met salpeterzwavelzuur er naast symmetrische dinitro-m-xylol 

als hoofdprodukt ook het vicinale isomeer 

ontstaat. Door reductie met zwavelwaterstof gaan beide dinitroxylolen over in nitroxylidienen, die betrekkelijk gemakkelijk te scheiden zijn. Het nitroxylidien 

geeft door eliminatie der NH_2-groep vicinaal

nitro-m-xylol. Terwijl echter GREVINGK aangeeft, dat hij van het vicinale nitroxylidien eene opbrengst van 25 % verkreeg, werd door ons nooit meer dan eenige procenten van dit lichaam waargenomen, zoodat de bereiding van het vicinale nitro-m-xylol langs dezen weg, althans voor grootere hoeveelheden, tamelijk omslachtig blijft. Toen het bleek, dat de „fabrique de produits chimiques de Thann et Mulhouse" dit nitroxylol in den handel bracht, is de oxydatie, naast die met eigen vervaardigd matriaal, grootendeels met dit handelsprodukt doorgevoerd. Ook deze oxydatie werd in alkalische oplossing met permanganaat uitgevoerd. Het vicinale nitro-isophtaalzuur is een in heet water tamelijk en in koud water zeer moeilijk oplosbare, in fraaie glinsterende naaldjes krystalliseerende verbinding, die bij 300° smelt. Zij krystalliseert zonder krystalwater en is gemakkelijk oplosbaar in alcohol en aether, waaruit zij zich in naaldjes weer afzet.

Nu de drie mogelijke mononitro-isophtaalzuren verkregen waren, kon het vraagstuk ter hand worden genomen om den aard van het bijprodukt uit te maken,dat bij de nitratie van isophtaalzuur ontstaat. Nadat de hoofdmassa van het gevormde nitro-isophtaalzuur door krystallisatie verwijderd was, bleef een rest over, die in water veel meer oplosbaar dan dit zuur was, hetgeen op de aanwezigheid van het asymmetrische nitrozuur duidde. Inderdaad kon er dit ook door gefractioneerde kristallisatie uit afgezonderd worden. Hoe werd uitgemaakt, dat het nitratiemengsel werkelijk enkel een mengsel was van het symmetrische en het asymmetrische zuur, zal straks nader blijken.

Daar bij de bepaling van de relatieve hoeveelheden, waarin de nitratie-producten ontstaan, van oplosbaarheidsbepalingen werd gebruik gemaakt, volgen hier eerst de oplosbaarheden, bij 25°, in procenten, der vijf nitrophtaalzuren in water.

α-nitrophtaalz.	β-nitrophtaalz.	symm. nitro-isophaalz met krystalwater
2.048	zeer oplosbaar	0.157

asymm. nitro-isophtaalz.	vic. nitro-isophtaalz.
0.967	0.216

Quantitatieve nitratie van phtaalzuur. Deze werd met reëel salpeterzuur uitgevoerd. Het bleek, dat zij zelfs bij 30° zeer langzaam verliep, zoodat het phtaalzuur gedurende drie weken met de zesvoudige hoeveelheid salpeterzuur in aanraking werd gelaten. Het laatstgenoemde zuur werd nu, na verdunning met water, op een waterbad verdreven, of wel door verdamping boven kalk weggenomen. Het vaste residu werd zeer fijn gewreven en door langdurig verwarmen op 110° van de laatste sporen salpeterzuur bevrijd. Daar

onder de bovengenoemde omstandigheden de mononitrophtaalzuren niet verder genitreerd worden, kon door titratie worden uitgemaakt of alle phtaalzuur in mononitrozuur was overgegaan; het product was slechts zeer weinig geel gekleurd, zoodat eene verontreiniging geheel te verwaarloozen was. Van het aldus voor de analyse gereed gemaakte produkt werden verschillende hoeveelheden afgewogen, deze telkens in 100 gr. water gebracht, en na toevoegen van een overmaat α-nitrophtaalzuur in het schudtoestel gebracht. Het gehalte aan opgelost zuur werd door titratie bepaald en uit deze cijfers het gehalte aan β-zuur berekend, door gebruik te maken van eene tabel, die eerst vervaardigd was en waarin was aangegeven welke gehalten aan β-nitrozuur met een bepaald titre eener zoo verkregen oplossing overeenkomen.

Zoo werd in vier goed met elkander overeenstemmende waarnemingen als gemiddelde gevonden, dat bij de nitratie van phtaalzuur met reëel salpeterzuur bij $+ 30°$ gevormd wordt:

49.5 % α- en 50.5 % β-nitrophtaalzuur.

De quantitatieve nitratie van isophtaalzuur werd op dezelfde wijze uitgevoerd als die van phtaalzuur; ook hier waren voor de volledige nitratie bij 30° een paar weken noodig. De verontreiniging met gele bijmengselen was wederom geheel te verwaarloozen, daar een slechts zeer weinig gekleurd nitratieprodukt werd verkregen. Dit nitratieprodukt, zoo verkregen, bevat het watervrije α-nitro-isophtaalzuur, zoodat bij de oplosbaarheidsbepalingen, waardoor zijne samenstelling werd uitgemaakt, het krystalwaterhoudende zuur moest worden toegevoegd, daar het watervrije zuur zich slechts zeer langzaam hydrateert en eene grootere oplosbaarheid bezit. De bepaling van de totale hoeveelheid bijprodukt gaf aan, dat er slechts 3.1 % van gevormd was. Het qualitatieve onderzoek had reeds geleerd, dat dit het asymm. zuur bevat; dat het enkel hieruit bestaat werd op de volgende wijze uitgemaakt. Waren de gevonden 3.1 % inderdaad enkel asymm.-zuur, dan moest eene oplossing, verkregen door 100 gr. water te schudden met overmaat symm- en vicinaalzuur + 1 gr. nitratiemengsel (bevatte 31 mgr. asymm.-zuur), hetzelfde titre hebben als eene oplossing, verkregen door 100 gr. water met overmaat van beide genoemde zuren + 31 mgr. asymm.-zuur te schudden. Bevatte daarentegen het nitratieproduct ook vicinaal zuur, dus minder dan 31 mgr. asymm.-zuur, dan moest het titre lager worden gevonden. Dit nu was niet het geval, zoodat hieruit blijkt, dat het asymm.-zuur het eenige bijprodukt is. Het resultaat is dus, dat bij de nitratie van isophtaalzuur met reëel salpeterzuur bij 30°, gevormd wordt

96.9 % symmetrisch en 3.1 % asymmetrisch nitro-isophtaalzuur.

Vergelijkt men bovenstaande uitkomsten met het resultaat der nitratie van benzoëzuur, waarbij (bij 30°) 22.3 % ortho-, 76,5 % meta-, en 1.7 % para-nitrobenzoëzuur ontstaat, dan blijkt het volgende.

Daar bij het phtaalzuur [ring: CO_2H op 1, CO_2H op 2; plaatsen 1–6] de plaatsen 3 en 6 meta ten opzichte van het eene carboxyl staan en ortho ten opzichte van het tweede, de plaatsen 4 en 5 ook meta ten opzichte van één carboxyl, maar para ten opzichte van het andere, zou volgens de door mij ingevoerde onderstellingen te verwachten zijn, dat het *α*-zuur (het vicinale) hoofdproduct, het *β*-zuur daarentegen nevenprodukt is, omdat in dit laatste door één der carboxylen de nitrogroep naar para moet gericht worden en *p*-nitrobenzoëzuur slechts in zeer geringe hoeveelheid bij de nitratie van benzoëzuur ontstaat. Wat het isophtaalzuur betreft, ware te verwachten, dat verreweg in hoofdzaak [ring: CO_2H op 1, CO_2H op 3; plaatsen 1–6] het symm. nitrozuur zal ontstaan, maar als nevenproducten zoowel (1, 3, 2) als (1, 3, 4) en wel het eerste in grootere hoeveelheld, hoewel anderzijds te bedenken is, dat eene nitrogroep een grooten weerstand schijnt te ondervinden als zij zich tusschen twee andere groepen moet plaatsen.

Wat de nitratie van het isophtaalzuur betreft, beantwoordt het resultaat van bovenstaand onderzoek vrij wel aan de verwachting, hoewel de geheele afwezigheid van het vic. nitro-isophtaalzuur toch opvallend is. Voor het phtaalzuur daarentegen is dit in mindere mate het geval, daar hier van de twee mogelijke isomeren ongeveer gelijke hoeveelheden gevormd worden.

De heer Huisinga heeft nu in zijn proefschrift eene poging gedaan om meer nauwkeurig dan tot nu toe het geval was, uit de verhoudingscijfers, waarin de isomeren C_6H_4AC en C_6H_4BC ontstaan bij invoering van C in C_6H_5A resp. C_6H_5B, te berekenen in welke verhouding de isomeren C_6H_3ABC ontstaan bij de invoering van C in C_6H_4AB. Hij merkt vooreerst op, dat er in een lichaam C_6H_5A twee ortho- en twee meta-plaatsen zijn, tegen één paraplaats, zoodat als de verhouding der isomeren C_6H_4AC p : q : r is (ortho : meta : para) voor ieder der ortho- en meta-plaatsen en voor de paraplaats deze verhouding $\frac{1}{2}$ p : $\frac{1}{2}$ q : r is. Verder geeft hij aan eene sommeering dezer verhoudingsgetallen de voorkeur boven eene vermenigvuldiging, die door mij bij de voorspelling der isomeren tot nu toe werd toegepast. Deze sommeering wordt daarom door hem verkozen, omdat hij de verhoudingsgetallen als evenredig met de „richtkrachten" beschouwt, die door de groepen A en B op de andere

plaatsen van de kern worden uitgeoefend en de samenwerking van twee zulke richtkrachten op één H-atoom door eene som dient te worden voorgesteld. Nu zijn echter enkel de verhoudingen dier richtkrachten bekend, niet hunne absolute waarde; bij de nitratie van nitrobenzol kan de kracht waarmede de NO_2-groep naar de m-plaats wordt gedreven, zeer goed van eene geheel andere orde zijn, dan waarmede diezelfde groep bij de nitratie van benzoëzuur eveneens naar de *m*-plaats wordt gericht. Men zal dus de cijfers, die de richtkrachten voorstellen (of er evenredig mede zijn) van twee verschillende groepen niet zonder meer mogen gaan optellen; dit zal enkel dan veroorloofd zijn als de twee aanwezige substituenten gelijk zijn.

Als voorbeeld zijner berekeningswijze zij het volgende aangevoerd. Daar bij nitratie van broombenzol 37.6 °/₀ ortho, 62.1 °/₀ para en 0.3 °/₀ meta-nitrobroombenzol ontstaat, heeft de substitutie aan de afzonderlijke plaatsen van de benzolkern in de verhouding

Br
18.8 — 18.8
0.15 — 0.15
62.1

plaats; voor de verhouding, waarin zich de isomeren bij de nitratie van o-dibroombenzol vormen geeft de berekening

Br
18.8 + 0.15 — Br
62.1 + 0.15 — 18.8 + 0.15
62.1 + 0.15

of 62.25 : 18.95; d. i. 76.7 °/₀ asymm. nitro-o-dibroombenzol
23.3 °/₀ vic. „ „ „

terwijl de waarneming aangaf 81.3 °/₀ asymm. en 18.3 °/₀ vic.

Het valt nu niet te ontkennen, dat in een aantal gevallen deze berekeningswijze cijfers oplevert, die tot de waargenomene veel meer naderen, dan degene, die door de vroegere berekeningswijze werden verkregen, waarbij de niet gehalveerde verhoudingscijfers eenvoudig met elkander vermenigvuldigd werden. Maar daartegenover staan andere gevallen, vooral zulke, waarin een meta-gesubst. lichaam genitreerd wordt, waar de berekening van de waarneming nog zeer ver afstaat. Brengt men de verhoudingscijfers voor de enkele plaatsen in rekening, dan verkrijgt men daarenboven met de produkten in den regel eene veel betere nadering tot de waargenomen cijfers, dan met de sommen, ook voor het geval, dat de twee aanwezige substituenten ongelijk zijn, waarop HUISINGA's berekeningswijze niet kan worden toegepast. Ten bewijze daarvan dient onderstaande tabel, waarin de verhoudingscijfers staan, in welke de isomere nitro-derivaten van de boven de kolommen staande

lichamen ontstaan, met de volgens de sommen en volgens de producten berekende waarden dier cijfers:

	Cl:Cl ortho	Cl:Cl meta	Br:Br ortho	Br:Br meta	$CO_2H:CO_2H$ ortho	$CO_2H:CO_2H$ meta
gevonden	7:93	4:96	18.3:81.7	4.6:95.4	49.5:50.5	3.1:96.9
product	18:82	9:91	23.3:76.7	13:87	82 :18	*10.6:89 4
som.	18:82	15:85	23.3:76.7	19:81	55.6:44.4	*38 :62

*totale hoev. bijprodukt.

	CO_2H : Cl ortho	CO_2H : Cl meta	CO_2H : Br ortho	CO_2H : Br meta
gevonden	16 0:84.0	8.7 : 91.3	19.7:80.3	11.4:88.6
product	17.7:82.3	17.7:82.3	23.3:76.7	23.3:76.7

Amsterdam, org. lab. d. Univ. 1906.

Scheikunde. — De Heer HOLLEMAN biedt namens den heer J. J. BLANKSMA eene medededeeling aan: *„Nitratie van meta-gesubstitueerde phenolen"*

(Mede aangeboden door den Heer v. ROMBURGH)

Voor eenige jaren [1]) heb ik aangetoond, dat door nitratie van meta-nitrophenol en van 3-5-dinitrophenol het tetra- en pentanitrophenol ontstaan. Hieruit bleek, dat de m-standige NO_2-groepen de verdere vervanging der o- en p-standige H-atomen door andere groepen niet verhinderen. Ik heb nu getracht deze twee gevallen met enkele te vermeerderen en daarom het gedrag van eenige m-gesubstitueerende phenolen onderzocht, die behalve een m-standige NO_2-groep nog een tweede m-standige groep bevatten, en wel van $C_6H_3 . OH . NO_2 . (CH_3,OH,OCH_3,OC_2H_5,Cl,Br)$ 1 . 3 . 5.

Van deze phenolen waren het 5-nitro-m-kresol [2]) en de monomethylether van het 5-nitroresorcine [3]) bekend. De nog onbekende gesubstitueerde phenolen werden gemaakt als volgt:

Het 5-nitroresorcine (Sp. 158°) uit zijn bovengenoemde monomethylether door verhitting (5 uren) met HCl (30%) op 160°, of door

[1]) Versl. Konk. Akademie 25 Jan. 1902. Rec. 21. 241.

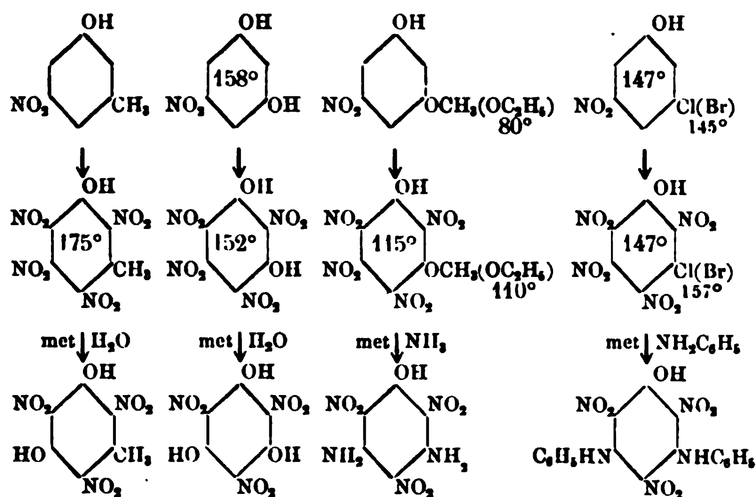
[2]) NEVILE en WINTHER Ber. 15. 2986.

[3]) H. VERMEULEN Rec. 25. 26.

reductie van 3-5-dinitrophenol met zwavelammonium tot 5-nitro-3-aminophenol (Sp. 165°) en vervanging van de NH_2-groep in dit lichaam door OH.

De monoethylether van het 5-nitroresorcine (Sp. 80°) werd bereid (volkomen analoog aan de methylether) uit 5-nitro-3-aminophenetol; het 3-Cl (Br) 5-nitrophenol werd verkregen door in het 5-nitro-3-aminoanisol de NH_2-groep volgens SANDMEYER door Cl (Br) te vervangen en daarna het aldus gevormde 3-Cl (Br)-5-nitroanisol Sp.(101° [1]) en 88°) met HCl (als boven) te verhitten waardoor naast CH_3Cl het gezochte 3-Cl (Br) 5-nitrophenol (Sp.147° en 145°) ontstaat.

De aldus verkregen 3-5-gesubstitueerde phenolen nemen door behandeling met Br-water gemakkelijk 3 atomen Br op; evenzoo worden door nitratie met HNO_3 (1.52) en H_2SO_4 3 nitrogroepen ingevoerd. Deze laatste verbindingen, die alle 4 NO_2-groepen bevatten gelijken op pikrinezuur, tetra- en pentanitrophenol. Uit een mengsel van salpeterzuur en zwavelzuur kristalliseeren ze als kleurlooze kristallen, die door eene geringe hoeveelheid water geel gekleurd worden; de stoffen smaken bitter, reageeren zuur, kleuren organische weefsels (o. a. de huid) sterk geel, sommige tasten de huid sterk aan, terwijl de aanwezigheid der 4 NO_2-groepen de lichamen tot explosiefstoffen maakt [2]).



In dit schema zijn alleen de smeltpunten aangegeven van de tot nu toe onbekende verbindingen.

---

1) DE KOCK, Rec. 20, 118 geeft als Sp. 91°.

2) Een vergelijkend onderzoek van deze eigenschappen bij deze verschillende verbindingen is nog niet uitgevoerd.

Het tetranitro-m. kresol geeft door koking met water het trinitroorcine; op dezelfde wijze geeft het tetranitroresorcine [1]) trinitrophloroglucine; ook het tetranitrochloor- en broomphenol geven door koking met water (gemakkelijker met Na_2CO_3 oplossing) het trinitrophloroglucine. Door inwerking van NH_3 of $NH_2C_6H_5$ etc. in alcoholische oplossing krijgt men verschillende andere produkten, b. v. de in het schema opgenomen lichamen, die reeds vroeger uit het pentanitrophenol verkregen zijn [2]). Men ziet tevens, dat water of alcohol niet als oplosmiddel kunnen dienen om deze verbindingen om te kristalliseeren, daarvoor kunnen chloroform en tetrachloorkoolstof gebruikt worden.

Vervangt men in de bovengenoemde 3-5-gesubstitueerde phenolen de OH-groep door OCH_3 dan gelukt het niet drie nitrogroepen in te voeren. Zoo geeft bijv. de dimethylether van het 5-nitroresorcine twee isomere trinitroresorcinedimethylethers, (in hoofdzaak die met smeltpunt 195°, dus als bij de nitratie van 5-nitro-m-xylol) [3]) evenzoo geeft de methylether van 5-nitro-m-kresol (Sp. 70°) de methylethers van drie isomere trinitro-m-kresolen, voornamelijk de verbinding met Sp. 139°. De constitutie van deze lichamen is nog niet vastgesteld.

Amsterdam, September 1906.

Plantenkunde. — De Heer WENT biedt eene mededeeling aan van den Heer W. BURCK: „*Over den invloed der nectariën en andere suikerhoudende weefsels in de bloem op het openspringen der helmknoppen*".

(Mede aangeboden door den Heer J. W. MOLL).

De overweging dat het openspringen der helmknoppen wordt voorafgegaan door een belangrijk waterverlies [4]) en dat bij zeer vele

[1]) Volgens HENRIQUES (Ann. der Chem. **215**, 335) ontstaat tetranitroresorcine (Sp. 166°) door nitratie van 2-5-dinitrophenol. In het handboek van BEILSTEIN (Bd. II, pg. 926) wordt terecht aan de juistheid van deze waarneming getwijfeld. Het verkregen lichaam is waarschijnlijk onzuiver trinitroresorcine geweest, ontstaan door inwerking van water op het primair gevormde tetranitrophenol. (Zie Rec. **21**, 258).

[2]) Rec. **21**, 264.

[3]) Rec **25**, 165.

[4]) Dit waterverlies bedraagt o.a. bij *Fritillaria imperialis* 90 % van het gewicht der helmknoppen, bij *Ornithogalum umbellatum* 86 %, bij *Diervilla floribunda* 87 %, bij *Aesculus Hippocastanum* 88 %, bij *Pyrus japonica* 80 %, bij verschillende gekweekte Tulpen 59—68 % enz. Bij planten wier meeldraden in den bloemknop openspringen is het waterverlies geringer; de helmknoppen en het stuifmeel blijven daarbij vochtig. Bij *Oenothera Lamarckiana* bedraagt het 41 %, bij *Canna hybrida grandiflora* 56 %. bij *Lathyrus latifolius* 24 %.

planten o. a. bij de *Compositae, Papilionaceae, Lobeliaceae, Antirrhineae, Rhinanthaceae, Fumariaceae* en voorts bij alle planten, die zich in den knop bestuiven zoowel chasmogame als cleistogame, dit openspringen plaats vindt binnen eene gesloten bloem, en derhalve niet door transpiratie aan de lucht, heeft mij aanleiding gegeven tot de vraag of wellicht de nectariën of andere suikerhoudende weefsels in de bloem, die geen nectar naar buiten doen uitvloeien, invloed uitoefenen op de wateronttrekking der helmknoppen.

Mijn vermoeden, dat er ook onder de planten, wier helmknoppen eerst openspringen na de ontluiking van de bloem, wel zouden gevonden worden, waarbij almede dit proces onafhankelijk is van den hygroscopischen toestand van de lucht, werd bevestigd. Brengt men de bloemen onder een glazen klok in eene met waterdamp verzadigde ruimte, dan springen de helmknoppen van vele planten ongeveer terzelfder tijd open als van bloemen, die buiten de vochtige kamer in de open lucht zijn neergelegd.

Dit heeft mij aanleiding gegeven tot het instellen van eenige proeven, die tot de hieronder volgende uitkomsten hebben geleid.

1°. Wanneer in eene bloem van *Diervilla* (*Weigelia*) *rosea* of *floribanda*, die bezig is zich te ontplooien, een der helmdraden met de pincet wordt geknepen, waardoor de waterafvoer uit den helmknop naar beneden wordt verstoord, dan springen de 4 helmknoppen wier helmdraden intact zijn gebleven open, maar de 5de blijft gesloten. Het is bij deze plant niet noodig om de bloem in eene vochtige kamer te brengen; men krijgt in den regel hetzelfde resultaat, wanneer de bloem, zonder meer, aan de plant bevestigd blijft.

Brengt men eene bloem in de vochtige kamer tegelijk met de losse helmknoppen van een tweede bloem, dan springen die, welke aan de bloem bevestigd zijn open; de losse helmknoppen niet. Brengt men alleen de bloemkroon met de daaraan verbonden meeldraden in de vochtige kamer, dan springen de helmknoppen even goed open als die uit de volledige bloem. Het nectarium, dat zich midden in de bloem, terzijde van het vruchtbeginsel bevindt, oefent derhalve op het openspringen der helmknoppen geen directen invloed uit. Praepareert men dan verder een meeldraad geheel vrij in zijn volle lengte en brengt hem dan in de vochtige ruimte naast enkele losse helmknoppen, dan springt de helmknop van den meeldraad open, terwijl de losse helmknoppen gesloten blijven.

Uit die proeven valt dus af te leiden, dat de helmknoppen openspringen onder den invloed van den met de kroon verbonden helmdraad. Een onderzoek met FEHLING's proefvocht leert nu, dat zoowel

de helmdraad als de geheele bloemkroon tot zelfs de kroonslippen de bekende reactie geven, die op glucose wijst.

Van *Digitalis purpurea* werden door eene snede twee der helmknoppen van eene bloem in de vochtige kamer vrij gemaakt van de bloemkroon. De niet losgesneden helmknoppen sprongen open, doch de beide andere bleven gesloten. Een in zijne geheele lengte vrij gepraepareerde meeldraad doet in de vochtige kamer den helmknop openspringen; losse helmknoppen blijven in de vochtige ruimte gesloten.

Een onderzoek met FEHLING's proefvocht leerde ook hier, dat de kroon overal glucose bevat, maar ter plaatse, waar de helmdraden met de kroon vergroeid zijn is die hoeveelheid bizonder groot. Verder zijn ook de helmdraden over hunne geheele lengte bizonder rijk aan suiker,

Van *Oenothera Lamarckiana* wier helmknoppen reeds in den knop openspringen, werd een bloemknop ontdaan van kelkslippen en bloembladen. Een der meeldraden werd in zijne geheele lengte uit de bloem losgemaakt; van een anderen meeldraad werd alleen de helmknop afgenomen. Deze drie voorwerpen werden naast elkander in de vochtige kamer gelegd. De helmknoppen der helmdraden, die aan de kelkbuis verbonden bleven en die van den lossen helmdraad sprongen open; de losse helmknop echter bleef gesloten. Het onderzoek met FEHLING, gaf hetzelfde resultaat als hierboven voor *Digitalis* aangegeven.

Soortgelijke proeven werden nog genomen met de bloemen van: *Antirrhinum majus* L., *Lamium album* L., *Glechoma hederacea* L., *Salvia argentea* L., *Nicotiana affinis* Hort. en *sylvestris* Comes., en *Symphytum officinale* L. die alle dezelfde uitkomsten gaven, terwijl met de bloemen van: *Ajuga reptans* L., *Stachys sylvatica* L., *Scrophularia nodosa* L., *Cynoglossum officinale* L., *Anchusa officinalis* L., *Echium vulgare* L., *Calceolaria pinnata*, *Hibiscus esculentus*, *Anoda lavateroides*, *Malva vulgaris* Tr., *Torenia asiatica*, *Corydalis lutea* Dc., *Colchicum autumnale* L., *Lysimachia vulgaris* L., *Atropa Belladona* L. en *Rhinanthus major* Ehrh. werd volstaan met de proef, die aantoonde, dat zij alle hunne helmknoppen doen opengaan in eene met waterdamp verzadigde ruimte. Bij alle deze planten geven de bloemkroon en meeldraden een zeer sterke reactie met FEHLING's suikerproefvocht.

Die proeven wijzen er op, dat het water aan de helmknoppen onttrokken wordt door een osmotische werking, die uitgaat van het glucosehoudende weefsel.

Ik moet hier opmerken, dat het voorkomen van glucose — voor

zoover men wel altijd tot glucose besluiten mag uit den neerslag van cuproöxyd na behandeling met FEHLING's proefvocht — in andere bloemdeelen dan de eigenlijke nectarien en vooral in de bloemkroon, een *zeer algemeen* verschijnsel is (waarop ik nader hoop terug te komen) en zich niet bepaalt tot die bloemen, waar meeldraden en bloemkroon met elkander vergroeid zijn. Er is hier veel eer sprake van een quantitatief verschil dan van eene bizondere eigenschap, die bij deze bloemen valt op te merken.

2. Bij *Stellaria media* zijn de epipetale meeldraden meestal geaborteerd, terwijl van de episepale in den regel slechts 3 zijn overgebleven. Deze 3 meeldraden dragen aan den voet, aan de buitenzijde, een klier, die nectar afscheidt.

Brengt men eene bloem in de vochtige kamer en kwetst men één der helmdraden met de pincet, dan springen later de helmknoppen der niet gekwetste meeldraden open doch de andere blijft gesloten. En wanneer men losse helmknoppen uit de bloem in de vochtige kamer brengt naast een intact gebleven bloem, dan blijven de losse helmknoppen gesloten, terwijl de helmknoppen uit de bloem openspringen. Zoowel de bloembladen als de meeldraden doen uit FEHLING's proefvocht cuproöxyd neerslaan; ook het weefsel aan den voet der kelkbladen reageert daarop. Maar het openspringen der helmknoppen staat niet hiermee in verband; verwijdert men de kroonbladeren, dan heeft dit geen invloed op de uitkomst van de zooeven vermelde proef.

De proef wijst er op, dat het water aan de helmknoppen wordt onttrokken door de osmotische werking, die uitgaat van het *nectarium*.

In verband hiermee verdient het opmerking, dat de nectariën van den epipetalen krans en ook die van de ontbrekende meeldraden uit den episepalen krans, tegelijk met de meeldraden geaborteerd zijn. Hetzelfde neemt men waar bij *Cerastium semidecandrum* L., *C. erectum* L. en *Holosteum umbellatum* L.; ook hier zijn de honigklieren der ontbrekende meeldraden doorgaans verdwenen.

Bij de *Papilionaceae* waarvan ik *Lupinus luteus L.*, *Lupinus grandifolius L.*, *Lathyrus odoratus L.*, *Lathyrus latifolius L.* en *Vicia Faba L.* onderzocht, springen zooals bekend is de helmknoppen reeds open in de gesloten bloem. De bloembladen doen uit FEHLING's proefvocht cuproöxyd neerslaan, doch oefenen geen invloed uit op het openspringen der helmknoppen. Bloemknoppen van *Lathyrus latifolius* en *Lathyrus odoratus* werden van bloembladen ontdaan, in de vochtige kamer gebracht tegelijk met losse helmknoppen. De losse helmknoppen bleven gesloten, doch de andere sprongen open.

Op dezelfde wijze als de bloemen van *Stellaria media* en der

genoemde *Papilionaceae* verhouden zich ten aanzien van het openspringen der helmknoppen in een met waterdamp verzadigde ruimte: *Stellaria Holostea L.*, *St. graminea L.*, *Cerastium Biebersteinii C. arvense L.*, *Cochlearia danica L.*, *Sisymbrium Alliaria Scop.*, *Crambe hispanica L.*, *Bunias orientalis L.*, *Capsella Bursa pastoris Mnch.*, *Hesperis violacea L.*, *H. matronalis L.*, *Thlaspi arvense L.*, *Alyssum maritimum Lam.*, en verder *Lychnis diurna Sibth.*, *Silene inflata* Sm. *Galium Mollugo L.*, *Asperula ciliata Rochl.*, *Campanula media L.*, *C. latifolia L.*

Bij alle deze planten meen ik het openspringen der meeldraden te mogen toeschrijven aan den invloed der nectariën.

Bij *Hesperis* vindt men 2 groote nectariën aan de binnenzijde van den voet der 2 kleine meeldraden en tusschen deze en de 4 groote meeldraden. Brengt men van *Hesperis violacea* of *H. matronalis L.* eene bloem, na ze van kelk- en bloembladen te hebben ontdaan, in de vochtige kamer, dan springen bijna altijd alleen de 4 lange meeldraden open; de twee andere blijven gesloten.

Het is herhaaldelijk waargenomen, dat de nectar-afscheiding een aanvang neemt zoodra de meeldraden openspringen.

In verband met het bovenstaande zou men nu geneigd zijn daaruit af te leiden, dat de toevoer van water uit den helmknop de afscheiding van nectar veroorzaakt. Wanneer men echter bij *Stellaria media* de helmknoppen verwijdert vóór dat zij water naar de nectariën hebben doen afvloeien, dan vindt men desniettegenstaande bij het ontluiken der bloem de nectariën rijkelijk van honig voorzien. Hetzelfde laat zich waarnemen in de mannelijke bloemen van *Aesculus Hippocastanum.* In de nog zoo goed als gesloten bloemknop is het nectarium nog droog. Wanneer de bloem voortgaat zich te openen ziet men nog vóór dat de helmknoppen ter halver lengte uit den knop te voorschijn zijn gekomen, kleine droppeltjes vocht verschijnen op de oppervlakte van het nectarium, welke droppeltjes grooter worden naarmate de helmknoppen meer en meer naderen tot het oogenblik, waarop zij openspringen. Door weging laat zich bepalen, dat wanneer de eerste droppeltjes nectar op de oppervlakte van het nectarium zichtbaar worden, de helmknoppen reeds een deel van hun oorspronkelijk gewicht verloren hebben. Ook hieruit zou men geneigd zijn af te leiden, dat het water uit de helmknoppen weer in den vorm van nectar naar buiten komt. Wanneer men echter uit zeer jonge knoppen, wier nectarium nog niet vochtig is, de helmknoppen verwijdert, treedt toch op een verder stadium van de ontwikkeling van den bloemknop, de nectar-afscheiding evengoed op

als in bloemknoppen, die in 't bezit gebleven zijn der helmknoppen.

Bij *Fritillaria imperialis* is mij hetzelfde gebleken; doch was hier de nectarafscheiding niet zoo overvloedig als in knoppen, wier helmknoppen niet verwijderd waren geworden. Ik meen dat deze waarnemingen er op wijzen, dat de in de nectariën of andere suikerhoudende weefsels in de bloem opgehoopte glucose, wanneer zij begint hare osmotische werking uit te oefenen, niet alleen water tot zich trekt uit de helmknoppen, maar ook van elders uit de omgeving.

3. Bij de ondervolgende planten blijven de helmknoppen in eene met waterdamp verzadigde ruimte gesloten. Voor zoover zij in het bezit zijn van nectariën, bleken deze geen invloed op het openspringen der helmknoppen uit te oefenen.

Ranunculus acris L., R. bulbosus L., Aquilegia vulgaris L., Clematis Vitalba L., Chelidonium majus L., Brassica oleracea L., Geranium molle L., G. Robertianum L., G. macrorhizum L., Geum urbanum L., Rubus caesius L., Philadelphus coronarius L., Heracleum Sphondylium L., H. lanatum Michx, Aegopodium Podagraria Spr., Carum Carvi L., Pimpinella magna L., Valeriana officinalis L., Ligustrum vulgare L. Majanthemum bifolium Dc., en *Iris Pseudacorus L.*

Het meest opvallende is, dat *Brassica oleracea L.* eene uitzondering maakt op hetgeen overigens bij de Cruciferae werd waargenomen; de positie der meeldraden ten opzichte van de nectariën, die rijkelijk honig afscheiden, zou doen verwachten, dat zij zich in eene vochtige kamer evenzoo als de andere zou gedragen. Hetzelfde valt op te merken betreffende de soorten van *Geranium*.

De afscheiding van nectar in de bloem heeft reeds vele jaren vóór dat SPRENGEL zijne inzichten daarover heeft bekend gemaakt de aandacht getrokken van verschillende natuuronderzoekers. Ook na SPRENGEL in de eerste helft der vorige eeuw, is zij menigmaal het onderwerp geweest van onderzoek. Die natuuronderzoekers kwamen allen hierin met elkander overeen, dat zij overtuigd waren, dat, afgescheiden van de beteekenis der honigafscheiding voor de bevruchting der bloemen door de tusschenkomst van insecten, waarop SPRENGEL de aandacht gevestigd had de suikerhoudende weefsels en de afgescheiden vloeistof ook nog in ander opzicht van eenig direct nut waren voor de plant.

Nadat DARWIN in 1859 de waarnemingen van SPRENGEL omtrent de biologische beteekenis der verschillende bloemeigenschappen — welke waarnemingen meer en meer in vergetelheid geraakten — op nieuw in 't licht had gebracht en de consequenties daarvan had gemeend te kunnen aanvaarden door ze in verband te brengen, eens-

deels met zijne inzichten omtrent de noodzakelijkheid der kruisbevruchting voor het behoud der levensenergie van de soort, anderendeels met de theorie der natuurlijke teeltkeus is het onderzoek naar nog eene andere (primaire) beteekenis der nectariën voor de plant, gedurende geruimen tijd, geheel op den achtergrond gekomen.

Eerst in 1878 is dit onderwerp op nieuw ter sprake gebracht door BONNIER [1]), die in zijne uitvoerige verhandeling over de nectariën, waarin zoowel de anatomische als de physiologische zijde van het vraagstuk aan een zeer uitgebreid onderzoek werd onderworpen, aan 't licht bracht, dat suikerhoudende weefsels in de bloem en vooral in de onmiddellijke nabijheid van het vruchtbeginsel niet alleen, worden aangetroffen bij die planten, die geregeld tijdens den bloei nectar afscheiden, maar ook bij zulke planten, die onder normale omstandigheden, nimmer een zoodanige vloeistof doen uitvloeien. Bij die bloemen, die in de literatuur „pollenbloemen" worden geheeten, omdat de insecten daarin geen nectar vinden, werden door hem evenzoogoed suikerhoudende weefsels aangetroffen als in de z.g. „insectenbloemen". Zelfs bij windbloemige planten vond hij „nectaires sans nectar" o. a. bij *Avena sativa, Triticum sativum* en *Hordeum murinum.* Een aantal planten, die onder gewone levensvoorwaarden geen nectar bevatten, kon hij tot nectar-afscheiding brengen door ze onder daartoe gunstige condities te stellen.

Aan het einde van zijn artikel brengt hij in herinnering, dat eene accumulatie van reservestoffen overal daar, waar een tijdelijke stilstand optreedt in de ontwikkeling, een zeer algemeen en goed gekarakteriseerd verschijnsel mag heeten. Wanneer eene plant aan het einde van de groeiperiode in hare verdere ontwikkeling stilstaat, heeft zij reservestoffen opgezameld in hare onderaardsche deelen en wanneer het zaad zijn ontwikkeling voltooid heeft, heeft het voedingsstoffen opgehoopt in het kiemwit of in de zaadlobben van het embryo. Die reservestoffen in assimileerbare verbindingen omgezet, dienen dan voor de allereerste voeding der nieuw gevormde deelen.

Hij komt nu tot het besluit, dat er in de nabijheid van het ovarium saccharose wordt geaccumuleerd en dat deze reservestof na de bevruchting en naar mate de vrucht zich ontwikkelt, geheel of grootendeels overgaat in het weefsel van de vrucht en in het zaad na vooraf, onder de werking van een oplosbaar ferment in assimileerbare verbindingen te zijn omgezet.

Ook mij heeft het onderzoek geleerd, dat eene ophooping van

---

1) GASTON BONNIER. Les nectaires. Étude critique, anatomique et physiologique. Annales des sciences naturelles. Tome VIII. 1878.

saccharose als reservestof in de bloem een zeer algemeen voorkomend verschijnsel is. [1])

Maar behalve de rol, die BONNIER aan 't licht heeft gebracht en de beteekenis van den afgescheiden nectar voor de bevruchting is het mij duidelijk geworden, dat zoowel de uit de saccharose gevormde glucose, als de naar buiten afgescheiden nectar, ook nog in andere opzichten voor de plant van groot belang zijn. De hier meegedeelde waarnemingen wijzen reeds op eene zeer belangrijke en primaire functie n.l. *om de meeldraden in staat te stellen te rechter tijd hun stuifmeel aan de oppervlakte te brengen, onafhankelijk van den hygroscopischen toestand van de lucht.*

Ik hoop eerlang op eene andere functie te kunnen wijzen.

De nectarafscheiding verschijnt nu in een ander licht. De meening, dat zij te beschouwen is als een excretie van schadelijke of overtollige bijproducten der stofwisseling, [2]) die omdat die vloeistof door de insecten gretig werd weggenomen, in den loop der tijden tot verdere ontwikkeling gekomen is onder de werking der natuurlijke teeltkeus, als nuttige aanpassing ter bevordering der kruisbevruchting, moet plaats maken voor de meening, dat zij, voorafgegaan aan alle aanpassing, in hare verdere ontwikkeling gelijken tred heeft gehouden met die der geslachtsorganen.

Pathologie. — De Heer SPRONCK biedt eene mededeeling aan van den Heer H. EYSBROEK, cand. arts: *„Over de Amboceptoren van een Antistreptococcenserum”*. (Uit het Pathologisch Instituut te Utrecht).

(Mede aangeboden door den Heer C. A. PEKELHARING)

Zooals bekend is komt er in het serum van een dier, dat behandeld is met de bloedlichaampjes van een dier van een andere soort, een stof voor, welke in staat is met behulp van een andere stof, die reeds in normaal serum aanwezig is, de bloedlichaampjes van het tweede dier tot oplossing te brengen. Eerstgenoemde stof, welke slechts in immuunsera voorkomt, is thermostabiel en wordt door verschillende onderzoekers, al naar gelang de voor-

---

[1]) Men zie hierover ook: PAUL KNUTH, Über den Nachweis von Nektarien auf chemischem Wege. Bot. Centralbl. LXXVI. Band, 1898, p. 76 en ROB. STÄGER, chemischer Nachweis von Nektarien bei Pollenblumen und Anemophilen. Beihefte zum Bot. Centralbl. Band XII. 1901, p. 34.

[2]) CH. DARWIN. Origin of species. Sixth Edition. 1872. Chap. IV, p. 73 en The effects of Cross and Selffertilisation. Edition 1876. Chap. X, p. 402.

stelling, welke zij zich van hare werking maken, ook verschillend genoemd (Amboceptor van EHRLICH, Substance sensibilisatrice van BORDET, Fixateur van METCHNIKOFF). De andere stof, die normaliter in allerlei sera in grooter of kleiner hoeveelheid voorkomt, wordt door verhitten op 55—56° C. of door staan aan het licht zeer gemakkelijk ontleed. Het is verder gebleken, dat laatstgenoemde stof identiek is met een reeds vroeger door FODOR [1]) en FLÜGGE [2]) in normaal bloedserum aangetoonde bactericide stof, waaraan door BUCHNER de naam alexine gegeven is. Naast dezen naam worden tegenwoordig ook de benamingen komplement (EHRLICH) en cytase (METCHNIKOFF) gebruikt.

Had reeds in 1889 METCHNIKOFF op de analogie tusschen haemolyse en bacteriolyse gewezen, door latere onderzoekingen kon dit vermoeden volkomen bevestigd worden.

In 1901 publiceerden BORDET en GENGOU [3]) een methode om door middel van komplementbinding de aanwezigheid van een „substance sensibilisatrice" in sera van dieren, die tegen bepaalde micro-organismen geïmmuniseerd waren, aan te toonen. Tegelijk vonden ze, dat deze amboceptor een specifieke is; dat b.v. de in het bloed van dieren, welke tegen choleravibrionen geïmmuniseerd waren, voorkomende amboceptor wel werkzaam is tegenover de choleravibrionen zelf, maar niet tegenover andere bacteriën, b.v. typhusbacillen.

Omgekeerd is men dus in de gelegenheid om met behulp van een voorhanden amboceptor, door middel van komplementbinding, het daarbij behoorend micro-organisme van andere te onderscheiden.

Gebruik makende van genoemde methode van BORDET—GENGOU gelukte het aan BESREDKA [4]) ook in een door hem bereid antistreptococcenserum een amboceptor aan te toonen. Dit serum was verkregen van een paard, dat gedurende eenigen tijd intraveneus was ingespoten met een mengsel van 6—8 verschillende streptococcen, die op één uitzondering na direct — dus zonder passage door dieren, van pathologische processen van den mensch afkomstig waren. Verder heeft hij van de aanwezigheid van een amboceptor in zijn serum gebruik gemaakt, om na te gaan, of het misschien mogelijk zou zijn, met behulp van die stof, verschillende stammen van streptococcen van elkaar te scheiden.

Onder de voornaamste bezwaren, welke nog steeds bij de bereiding van een antistreptococcenserum worden ondervonden, dient in

---

[1]) Deutsche Med. Wochenschrift, 1887. N°. 34, S. 745.
[2]) Zeitschrift für Hygiene, Bd. IV, S. 208.
[3]) Annales de l'Inst. Pasteur, T. 15, 1901, p. 289.
[4]) Annales de l'Inst. Pasteur, T. 18, 1904, p. 363.

de eerste plaats het feit genoemd te worden, dat de direct van pathologische processen bij den mensch afkomstige — en voor dezen hoog virulente streptococcen (scarlatina, erysipelas, septicaemie) in het algemeen voor cnze gewone proefdieren een betrekkelijk geringen graad van virulentie bezitten. Hierdoor wordt eenerzijds de bereiding van een krachtig werkend serum bemoeilijkt, aan den anderen kant is een contrôle van het verkregen serum bijna onmogelijk. In de tweede plaats doet zich echter de vraag gelden, of alle, uit verschillende ziekteprocessen gekweekte streptococcen moeten beschouwd worden als vertegenwoordigers van een en dezelfde soort en dus slechts als varieteiten op te vatten zijn, of dat de onderlinge verwantschap een veel geringere is. Een oplossing van deze vraag, zoo mogelijk in dien zin, dat men kon komen tot een rationeele onderverdeeling in de groote groep der pathogene streptococcen, zou voor de serotherapie van groot belang te achten zijn.

Voor enkele jaren heeft SCHOTTMÜLLER [1]) getracht in plaats van de oudere morphologische verdeeling in streptococcus longus en streptococcus brevis (VON LINGELSHEIM [2]), BEHRING [3]) een nieuwe, op biologische gronden gebaseerde indeeling te geven. Het was hem mogelijk bij het kweeken van verschillende streptococcenstammen op bloedagar, twee typen te onderscheiden: 1e. grauwe kolonies met doorzichtigen hof; 2e. groenachtige zonder hof. De tot de eerste groep behoorende streptococcen zijn voor den mensch zeer virulent, en worden dan ook gevonden bij erysipelas, septicaemie, scarlatina, phlegmone enz., terwijl de tot de tweede groep behoorende in het algemeen voor mensch en dier weinig pathogeen zijn. SCHOTTMÜLLER verdeelt de pathogene streptococcen dus als volgt:

1. Streptococcus pyogenes s. erysipelatos.
2. Streptococcus mitior s. viridans.
3. Streptococcus mucosus.

Tot een dergelijk resultaat zijn in den laatsten tijd, op ongeveer dezelfde wijze, ook verschillende andere onderzoekers (EUG. FRAENKEL [4]), SILBERSTROM [5]), BAUMANN [6]) gekomen.

BESREDKA [7]) daarentegen trachtte met behulp van de methode der komplementbinding verschillende streptococcen van elkander te onder-

[1]) Münch. Med. Wochenschrift, 1903, N°. 20, S. 849; N°. 21, S. 909.
[2]) Zeitschrift für Hygiene, Bd. X, S. 331.
[3]) Centralblatt. für Bakteriologie, Bd. 12, S. 192.
[4]) Münch. Med. Wochenschrift, 1905, N°. 12, S. 548; N°. 39, S. 1869.
[5]) Centralblatt für Bakt., 1e Abth., Orig., Bd. 41, S. 409.
[6]) Münch. Med. Wochenschrift, 1906, N°. 24, S. 1193.
[7]) l. c.

scheiden. De conclusie, waartoe hij komt, is dat de „substances sensibilisatrices" in zijn serum aanwezig „rigoureusement" specifiek zijn; dat het serum van een paard, geïmmuniseerd met een streptococcus *A*, slechts den met dien bepaalden streptococcus correspondeerenden amboceptor *A''* bevat. Toch vond hij echter dezen amboceptor *A''* niet alleen werkzaam tegenover den streptococcus *A*, maar ook tegenover eenige andere stammen (*B*, *C*), waaruit volgens BESREDKA de identiteit, of ten minste de nauwe verwandschap van de genoemde streptococcen *A*, *B* en *C* zou blijken.

Naar aanleiding van deze uitkomsten zijn door mij eenige proeven gedaan, om na te gaan in hoeverre werkelijk door de specificiteit der amboceptoren, een scheiding van verschillende pathogene streptococcen mogelijk is.

Het antistreptococcenserum, dat ik gebruikte, werd mij zeer bereidwillig verstrekt door Prof. SPRONCK, wien ik daarvoor en voor den verderen steun, bij mijn werk ondervonden, hartelijk dank zeg.

Genoemd serum was afkomstig van een paard, dat gedurende zeer geruimen tijd (van Januari 1905 tot Juli 1906) met een aantal exemplaren van streptococcen en staphylococcen van verschillende herkomst werd ingespoten en wel subcutaan. Deze inspuitingen geschiedden wekelijks; hiervoor werden in de eerste maanden stijgende hoeveelheden, later iedere maal gemiddeld 40—60 c.C. gebruikt van een mengsel, bestaande uit gelijke deelen van een ascitesbouilloncultuur van de verschillende streptococcen en van een bouilloncultuur van de staphylococcen. Het mengsel werd vooraf twee maal gedurende een half uur op 55° C. verhit. Zoowel strepto- als staphylococcen waren direct, dus zonder passage door dieren, van den mensch afkomstig.

Dat het serum werkelijk curatieve eigenschappen bezit, bleek naast waarnemingen in de kliniek, ook uit dierproeven. Konijnen, die ingespoten werden met een mengsel van strepto- en staphylococcen, konden door toediening van betrekkelijk geringe hoeveelheden antistreptococcenserum in het leven gehouden worden, terwijl contrôledieren binnen korten tijd stierven.

De methode, welke door mij gevolgd werd, is die van BORDET—GENGOU [1]). Voor iedere proef werden zes buisjes gebruikt, die respectievelijk bevatten [2]):

---

[1]) l. c.

[2]) Als komplement werd het versche bloedserum van een cavia gebruikt. De te onderzoeken streptococcen werden op LOEFFLER's gestold bloedserum gekweekt, en na 24 uur in physiologische NaCl tot een homogene emulsie gesuspendeerd. Het antistreptococcenserum werd vooraf gedurende één uur verhit op 56° C., even-

N°. 1: $^2/_{10}$ c.C. komplement, $^1/_2$ c.C. emulsie van streptococcen, $^1/_2$ c.C. antistreptococcenserum.

N°. 2: $^2/_{10}$ c.C. kompl., $^1/_2$ c.C. emulsie van str., $^1/_2$ c.C. normaal paardeserum.

N°. 3: $^2/_{10}$ c.C. kompl., $^1/_2$ c.C. physiologische NaCl, $^1/_2$ c.C. antistreptococcenserum,

N°. 4: $^2/_{10}$ c.C. kompl., $^1/_2$ c.C. physiol. NaCl, $^1/_2$ c.C. normaal paardeserum.

N°. 5: $^2/_{10}$ c.C. physiol. NaCl, $^1/_2$ c.C. emulsie van str., $^1/_2$ c.C. antistreptococcenserum.

N°. 6: $^2/_{10}$ c.C. physiol. NaCl, $^1/_2$ c.C. emulsie van str., $^1/_2$ c.C. normaal paardeserum.

Na omroeren laat men de buisjes 3 à 5 uur bij kamertemperatuur staan, daarna voegt men aan ieder toe: $^3/_{10}$ c.C. van een mengsel, bestaande uit 2 c.C. haemolytisch serum en 1 c.C. bloedlichaampjes van een konijn, die men eenige malen goed met physiologische NaCl gewasschen heeft, ter verwijdering van het aanhangende serum. Al spoedig, meestal binnen 10 minuten, vertoonen de buisjes 2, 3 en 4 zeer duidelijk het verschijnsel der haemolyse, die natuurlijk in de buisjes 5 en 6 niet tot stand komt wegens afwezigheid van komplement. Uit het al of niet tot stand komen der haemolyse in het eerste buisje, besluit men tot de af- resp. aanwezigheid van een amboceptor in het onderzochte serum.

Het is noodzakelijk telkens al deze contrôle-proefjes te herhalen, in de eerste plaats, omdat sommige streptococcen bij hun groei een haemolysine produceeren; in de tweede plaats, omdat bacteriën reeds normaliter, zonder hulp van een amboceptor, in staat zijn komplement te binden, zij het dan ook in veel geringere mate. Zeer duidelijk kan men dit in vitro waarnemen. In 6 buisjes werden achtereenvolgende verdunningen gemaakt van een cultuur van diphteriebacillen; bij ieder buisje kwam $^2/_{10}$ c.C. komplement. Na 3 uur werd aan ieder toegevoegd $^3/_{10}$ c.C. van een mengsel van 2 c.C. haemolytisch serum (verhit op 56° C.) en 1 c.C. gewasschen konijnenbloed. Een half uur daarna was het resultaat als volgt: geen haemolyse in het eerste (minst verdunde) buisje, geringe haemolyse in het 2de buisje, steeds meer haemolyse in de buisjes 3, 4 en 5, terwijl deze in het zesde (dus meest verdunde) buisje volkomen was.

---

zoo het als contrôle dienende versche, normale paardeserum en het haemolytische serum, dat afkomstig was van caviae, welke te voren 3 of 4 maal waren behandeld met 5 c.C. gedefibrineerd konijnenbloed. Als physiologische NaCl werd altijd een 0,9% oplossing gebruikt.

Dezelfde proef werd gedaan met verschillende andere bacteriën met een gelijksoortig resultaat.

Het is dus te begrijpen, dat het nog al eens voorkomt, dat men in het eerste der bij de methode van Bordet—Gengou gebruikte buisjes geen haemolyse ziet tot stand komen tengevolge van een overmaat van bacteriën, blijkens het gelijktijdig absent zijn van de haemolyse in het tweede buisje. Zonder contrôlebuisjes zou men allicht uit het wegblijven der haemolyse besluiten tot de aanwezigheid van een amboceptor.

Allereerst werd nu nagegaan, of in het door mij gebruikte antistreptococcenserum een amboceptor tegenover een vijftal bij de immunisatie gebruikte streptococcen aanwezig was. Het resultaat was positief. Daarna werden verschillende andere streptococcen aan het onderzoek onderworpen. Deze streptococcen waren direct van zeer verschillende aandoeningen bij den mensch als scarlatina, cholecystitis, septicaemie, febris puerperalis, angina, afkomstig en hadden bij de immunisatie geen dienst gedaan. Onder deze streptococcen waren er enkele van patiënten, die tijdens het leven ingespoten waren geweest met hetzelfde antistreptococcenserum, evenwel zonder succes. De streptococcen werden dan post mortem uit het bloed of uit de milt gekweekt. Andere daarentegen waren gekweekt van patienten, waarbij inspuitingen van het serum een zeer duidelijke, curatieve werking hadden gehad. Vermoed werd nu, dat tegenover eerstgenoemde streptococcen geen amboceptor in het antistreptococcenserum zou gevonden worden.

Het onderzoek kon echter dit vermoeden niet bevestigen. *Alle streptococcen, onverschillig van welke herkomst ze waren, vertoonden onder invloed van het antistreptococcenserum een sterke komplementbinding.*

Vasthoudende aan de specificiteit der amboceptoren zou men nu kunnen komen tot dezelfde conclusie als Besredka [1]) en alle laatstgenoemde streptococcen als identiek of ten minste na verwant beschouwen aan de bij de immunisatie gebruikte. Voortgezette proeven met enkele, van dieren afkomstige, pathogene streptococcen leidden echter tot een andere opvatting. Gebruikt werden een streptococcus, die gekweekt was uit de longen van een cavia, die spontaan aan pneumonie gestorven was; verder den bekenden droesstreptococcus (Str. equi) en nog een tweetal andere streptococcen, die naast den Str. equi gekweekt waren uit etter, die afkomstig was van aan goed-

[1]) l. c.

aardige droes lijdende paarden. Ook tegenover de laatstgenoemde streptococcen kon in het gebruikte serum de aanwezigheid van een amboceptor ontwijfelbaar worden vastgesteld.

Aangezien nu de str. equi door zijne eigenschappen, wat o.a. blijkt uit zijn geheel afwijkenden groei op de gewone voedingsbodems, zeer duidelijke verschillen vertoont met de andere pathogene streptococcen, hetzij van mensch, hetzij van dier afkomstig, ligt de conclusie voor de hand, dat, ten minste in het door mij gebruikte antistreptococcen-serum, van de specifieke werking van den amboceptor al heel weinig is overgebleven. Mogelijk zou echter de onderstelling nog zijn, dat alle, zoowel van mensch als dier afkomstige pathogene streptococcen zeer na verwant zijn, waardoor men ten minste nog aan de specificiteit van de amboceptoren zou kunnen blijven vasthouden.

Evenwel werd bij verdere proeven gevonden, dat het antistreptococcenserum ook werkzaam is tegenover micro-organismen, die in het geheel niet tot de streptococcen gerekend worden, n.l. pneumococcen en meningococcen.

Hiermede is dus voldoende bewezen, dat de specifieke werking van de amboceptoren in het serum van een paard, dat gedurende zeer geruimen tijd met groote hoeveelheden streptococcen is behandeld geworden, zeer sterk verminderd is en heeft plaats gemaakt voor een meer algemeene werking. Mogelijk zou men deze algemeene werking op rekening van een en denzelfden amboceptor kunnen stellen, hoewel men de aanwezigheid van meer amboceptoren in hetzelfde serum moelijk zal kunnen ontkennen.

Zelfs oefent genoemd serum nog — al is het dan ook in geringere mate — een duidelijke gevoeligmakende werking uit op miltvuur-, typhus- en tuberkelbacillen.

Uit het zooeven meegedeelde blijkt dus wel, dat de methode der komplementbinding van Bordet—Gengou niet te gebruiken is, als het er op aankomt na verwante, op andere wijze moeilijk te scheiden bacterien van elkaar te onderkennen. Al moet men nu wel aannemen, dat een dergelijke vermindering der specifieke werking alleen maar voorkomt bij sera van dieren, die zeer geruimen tijd behandeld zijn; dat dus de specifieke werking van den amboceptor meer op den voorgrond treedt, naarmate de dieren korteren tijd geïmmuniseerd zijn, toch is het duidelijk, dat van een scherpe methode hier geen sprake kan zijn, omdat men nooit weet — en dit geldt ook voor sera van kort geïmmuniseerde dieren, hoever zich de specificiteit wel uitstrekt. Zelfs indien men aanneemt, dat het paard, waarvan het antistreptococcenserum afkomstig is, al een bijzonder gunstig

proefdier is, wat betreft de vorming van immuunstoffen, dan nog zou het zooeven gezegde onveranderd doorgaan.

Onlangs heeft Dopter[1]) gevonden, dat de amboceptor, aanwezig in het serum van een paard, dat gedurende 18 maanden met dysenteriebacillen (type Shiga) was behandeld geworden, naast zijne werking op de echte dysenteriebacillen, ook een dergelijke werking vertoonde tegenover de z. g. pseudo- of paradysenteriebacillen (type Flexner, Kruse). De specificiteit van den amboceptor op den voorgrond stellende, besluit hij hieruit tot „l'unité specifique" der dysenteriebacillen. Deze conclusie lijkt mij, met het oog op het boven vermelde, evenwel zeer gewaagd.

Tevens is het duidelijk, dat men aan de aanwezigheid van een amboceptor in een serum, niet al te veel gewicht mag hechten voor de werking van dat serum. Men mag toch niet aannemen, dat het antistreptococcenserum een gunstige werking zal uitoefenen bij lijders aan pneumonie, typhus, miltvuur enz., ofschoon er tegenover de respectievelijke verwekkers van die ziekten in vitro wel een zekere werking is waar te nemen. Opzettelijk heb ik dit voor miltvuurbacillen nagegaan. Verschillende caviae van ongeveer gelijk gewicht kregen deels een kleine hoeveelheid antistreptococcenserum (2—3 c. C.) waarin wat miltvuurbacillen (1 oogje van een verdunde, twaalf uur oude cultuur op bouillonagar) gebracht waren, deels normaal paardeserum (2—3 c.C.) met een gelijke dosis miltvuurbacillen. Van een gunstige werking van het antistreptococcenserum tegenover normaal serum was nooit iets te bespeuren. De dieren succombeerden altijd ongeveer gelijktijdig binnen 48 uur.

Wel meent Predtetschensky [2]), die dergelijke proeven bij konijnen genomen heeft, een gunstige werking, zoowel van antidiphterisch als van antistreptococcenserum, te kunnen bespeuren, doch de kolossale hoeveelheden serum, welke hij gebruikte, rechtvaardigen het vermoeden, dat men hier slechts te doen heeft met de gunstige werking, die, zooals bekend is, ook reeds de inspuiting van normaal paardeserum in vele gevallen uitoefent.

Het is dus niet geoorloofd, zonder meer op grond van de aanwezigheid van een amboceptor een gunstige werking aan een serum toe te kennen, nog minder echter hierop een kwantitatieve methode te baseeren ter bepaling van de sterkte van zulk een serum, zooals Kolle en Wassermann [3]) doen met betrekking tot een door hen bereid meningococcenserum. In het meningococcenserum van Jochmann

1) Annales de l'Inst. Pasteur, T. 19, 1905, p. 753.

2) Centralblatt für Bakt., 1e Abth., Ref., Bd. 38, S. 395.

3) Deutsche Med. Wochenschrift, 1906, n⁰ 16, S. 609.

(E. MERCK) was de aanwezigheid van een amboceptor niet alleen tegenover meningococcen, maar ook — natuurlijk in geringere mate — tegenover enkele streptococcen duidelijk aan te toonen.

Op de vraag, of een dergelijke vermindering der specificiteit in verband met een langer voortgezette toediening van antigenen ook voor andere stoffen in immuunsera bekend is, moet het antwoord bevestigend luiden. Speciaal geldt dit met betrekking tot de praecipitinen. Bekend is, dat een absolute specificiteit hierbij niet te bereiken is. Zoo kon NUTTALL [1]) zelfs met een zeer krachtig praecipitineserum, dat verkregen was met en tegenover een willekeurig zoogdiereiwit, een neerslag krijgen met het bloedserum van allerlei zoogdieren („mammalian reaction"). HAUSER [2]) komt tot een dergelijk resultaat; er blijven nog slechts kwantitatieve verschillen bestaan.

Ook met betrekking tot den amboceptor schijnt mij een dergelijke vermindering der specifieke werking voldoende aangetoond.

Wiskunde. — De Heer KORTEWEG biedt eene mededeeling aan namens den Heer L. E. J. BROUWER: *„Het krachtveld der niet-Euclidische, positief gekromde ruimten."*

(Mede aangeboden door den Heer P. H. SCHOUTE).

D [3]). *De sferische* R_3.

I. De stellingen onder C § I en II blijven voor de sferische en elliptische R_n's onveranderd geldig. Maar de eindigheid dezer ruimten brengt mee, dat we voor de volgende ontwikkelingen geen beperkende veldeigenschap behoeven te postuleeren. De sferische ruimten zullen we eerst nagaan.

Vooreerst merken we voor de algemeene lijnvectordistributie der sferische R_n op, dat de totale som der divergentie 0 is; immers de uitgaande vectorstroomen uit de verschillende ruimte-elementen vernietigen elkaar. Hieruit blijkt dus reeds, dat we als elementair-$\overset{1}{_0X}$ slechts kunnen nemen het veld van een dubbelpunt.

SCHERING (Göttinger Nachrichten 1873) en KILLING (Crelle's Journal

[1]) Blood immunity and blood relationship, Cambridge, 1904, p. 74, 135, 409.

[2]) Münch. Med. Wochenschrift, 1904, n⁰ 7, S. 289.

[3]) A, B en C hebben betrekking op: „Het krachtveld der niet-Euclidische, negatief gekromde ruimten." (Zie deze Verslagen, 30 Juni 1906).

1885) geven als elementairgradientenveld de afgeleide van de potentiaalfunctie $\int_r^{1/2\pi} \frac{dr}{sin^{n-1} r} \equiv v_n(r)$. [2])

Maar de afgeleide van dit veld bestaat uit twee gelijke en tegengestelde divergenties in twee tegenpunten; en het is duidelijk, dat een willekeurige integraal van zulke velden steeds in de tegenpunten gelijke en tegengestelde divergenties behoudt, dus niet de algemeene divergentiedistributie, die alleen gebonden is aan een totale divergentiesom $= 0$, kan geven.

II. Passen we bij een sferische R_n het theorema van Green toe over de geheele ruimte (d.w.z. over de beide helften, waarin zij door een willekeurige gesloten R_{n-1} verdeeld wordt, te zamen), en wel voor een scalarfunctie φ, die we onderstellen dat nergens divergentie heeft, en een scalarfunctie, die alleen in twee willekeurige punten P_1 en P_2 gelijke en tegengestelde divergenties heeft en verder nergens (zulke functies zullen we in het volgende afleiden), dan vinden we:

$$\varphi_{P_1} - \varphi_{P_2} = 0,$$

m. a. w. φ is een constante, daar de punten P_1 en P_2 willekeurig zijn gekozen.

Er is dus geen ${}_0^1X$ mogelijk, die nergens divergentie heeft, dus geen ${}^1X$, die nergens rotatie en nergens divergentie heeft, en hieruit volgt:

Een lijnvectordistributie in een sferische R_n is door haar rotatie en haar divergentie eenduidig bepaald.

III. De algemeene vectordistributie in een sferische R_n moet dus weer zijn te verkrijgen als willekeurige integraal van:

1°. velden E_1, waarvan de tweede afgeleide bestaat uit twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2°. velden E_2, waarvan de eerste afgeleide bestaat uit in de punten van een ${}^{n-2}$bolletje en loodrecht op dat ${}^{n-2}$bolletje gelijkmatig gedistribueerde planivectoren.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn ook hier weer de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

IV. Voor de sferische R_2 bestaat nu een eenvoudig middel om

---

[2]) De ruimteconstante stellen we weer, evenals bij de hyperbolische ruimten $= 1$.

het veld E_1 te vinden, n.l. conforme afbeelding door stereographische projectie van een Euclidisch plat vlak met een dubbelpuntspotentiaal, welk dubbelpunt is gelegen in het raakpunt van den bol met het platte vlak. Voeren we op beide oppervlakken als coördinaten in den afstand tot het dubbelpunt en den hoek van den voerstraal met de dubbelpuntsas — op het platte vlak ϱ en φ, op den bol r en φ — dan hebben we:

$$\tfrac{1}{2}\varrho = tg\, \tfrac{1}{2} r$$

De potentiaal in het platte vlak: $\dfrac{\cos\varphi}{\varrho}$ wordt dus op den bol:

$$\tfrac{1}{2} \cos\varphi \cot \tfrac{1}{2} r.$$

Deze potentiaal vertoont in het centrum van projectie op den bol niets bijzonders, is dus werkelijk de gezochte potentiaal van een enkel dubbelpunt, het veld E_1. (Plaatsen we in het tegenpunt van het dubbelpunt nog een dubbelpunt zóó, dat de ongelijknamige polen als tegenpunten correspondeeren, dan vinden we als potentiaal $\tfrac{1}{2}\cos\varphi\,(\cot \tfrac{1}{2} r + tg\, \tfrac{1}{2} r) = \dfrac{\cos\varphi}{\sin r}$, wat de Scheringsche potentiaal van een dubbelpunt is).

V. Ook hier kunnen we intusschen het veld van een dubbelpunt wel weer splitsen in twee fictieve „velden van een enkel agenspunt"; we hebben daarvoor maar te nemen $\int_r^{\pi} \tfrac{1}{2}\cot \tfrac{1}{2} r\, dr = - l \sin \tfrac{1}{2} r \equiv F(r)$; zoodat dan voor een willekeurige gradientendistributie geldt:

$$ {}_0^1X = \overline{\nabla_1} \int \frac{\overline{\nabla_2}\; {}_0^1X}{2\pi} F(r)\, d\tau' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

Het „veld van een enkel agenspunt" heeft echter overal op den bol divergentie.

VI. Uit het veld E_1 leiden we op analoge wijze, als onder B § VI af het veld E_2 van een rotatiedubbelpunt, loodrecht op het agensdubbelpunt van het veld E_1. Als scalarwaarde van de planivectorpotentiaal vinden we daar:

$$\tfrac{1}{2} \sin\varphi \cot \tfrac{1}{2} r,$$

zooals we moesten verwachten, volledig duaal met de scalarpotentiaal van het veld E_1.

Als fictief krachtveld van een eenheidsrotatie-element leiden we hieruit af (op de wijze van B § VI):

$$\tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2} r,$$

gericht loodrecht op den voerstraal. Dit krachtveld heeft overigens weer overal in de R_2 rotatie.

VII. Hieruit vinden we dan weer (vgl. onder B § VII) voor de scalarwaarde der planivectorpotentiaal van een rotatieëlement:

$$\int_r^\pi \tfrac{1}{2} \cot \tfrac{1}{2} r \, dr \equiv F(r),$$

zoodat voor een willekeurige ${}^1_2X$:

$$ {}^1_2X = \overline{\nabla}^2 \int \frac{\overline{\nabla}^1 \, {}^1_2X}{2\pi} F(r)\, d\tau. \quad \ldots \ldots \quad (1I)$$

En een willekeurig vectorveld is de ∇ van een potentiaal:

$$\int \frac{\nabla X}{2\pi} F(r)\, d\tau.$$

E. De sferische R_3.

I. Het doel is vooreerst, het veld E_1 te vinden; we zullen het samenstellen uit eenige bijzondere licht te construeeren potentiaalfuncties met eenvoudige divergentiedistributies.

Denken we een grooten bol B met polen P_1 en P_2, en in B een grooten cirkel C met polen Q_1 en Q_2, die op B meridiaancirkels M bepalen, C snijdend in punten H.

We kunnen dan vooreerst uit de bijzondere Scheringsche potentiaal construeeren de potentiaal van twee dubbelpunten, in P_1 en P_2, waarvan de positieve polen beide naar Q_1 zijn gericht (zoodat in tegenpunten ongelijknamige polen correspondeeren). Bepalen we een punt S van de hypersfeer door den afstand $PS = r$ en $\angle QPS = \varphi$ (waar voor P en Q de index 1 of 2 moet worden genomen, naarmate S met P_1 of met P_2 aan denzelfden kant van B ligt), dan wordt deze potentiaal (α):

$$\pm \frac{\cos \varphi}{\sin^2 r},$$

waar het $+$ ($-$) teeken moet worden genomen voor de halve hypersferen tusschen P_1 (P_2) en B.

Dit veld heeft geen andere divergentie, dan die van de dubbelpunten P_1 en P_2.

Keeren we nu het teeken van de potentiaal om in de halve hypersfeer aan den kant van P_2, dan komt de potentiaal (β):

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2 r}.$$

De divergentie hiervan bestaat vooreerst uit twee dubbelpunten, één in P_1 gericht naar Q_1 en één in P_2 gericht naar Q_2 (zoodat dus nu in twee tegenpunten gelijknamige polen correspondeeren); en verder uit een magnetische schaal (immers een potentiaalsprong) in den bol B, van sterkte varieerend volgens $\cos\varphi$.

II. Hiernaast gaan we zoeken een potentiaal, waarvan de divergentie bestaat uit alleen zulk een magnetische schaal in den bol B met een sterkte, evenredig aan $\cos\varphi$.

Nu is een veld van een magnetische schaal in B met een sterkte, die volgens een andere zonale bolfunctie varieert, eenvoudig te vinden. Nemen we n.l. in elken „meridiaanbol" PQH als potentiaal van een punt S den hoek $PHS = \frac{1}{2}\pi - \angle QHS$ (P en Q steeds op de boven aangegeven wijze naar de plaats van S van indices te voorzien) $= bg\,tg\,\{\cos\varphi\, tg\, r\}$, dan hebben we zulk een potentiaal; in de hypersfeer is zij een zonale bolfunctie om PQ als as; op den bol B heeft zij haar eenige divergentie in den vorm van een magnetische schaal, waarvan de sterkte wisselt volgens een zonale bolfunctie met pool Q.

Nemen we nu beurtelings alle punten van den bol B als pool Q' van zulk een potentiaalfunctie, en integreeren we al die potentialen over den lichaamshoek om P, elke potentiaal vermenigvuldigd met $\cos Q'Q$, dan is volgens een welbekende stelling over bolfuncties de integraal een zonale functie van den vorm $\cos\varphi\, f(r)$, waarin $f(r) = \int \cos\varphi \,.\, bg\,tg\,\{\cos\varphi\, tg\, r\}\, d\omega$. ($d\omega$ stelt voor het element van den lichaamshoek om P), terwijl dit integraalveld als eenige divergentie heeft een magnetische schaal in B met sterkte evenredig aan $\cos\varphi$.

De integratie uitvoerende, vinden we:

$$f(r) = 2\pi \int_0^{\pi} \sin\varphi \cos\varphi\, bg\,tg\,\{\cos\varphi\, tg\, r\}\, d\varphi.$$

$$f(r) = 2\pi \left\{ -\cot r + \frac{r}{\sin^2 r} \right\},$$

en voor de bijbehoorende potentiaalfunctie (γ) komt:

$$2\pi \cos\varphi \left\{ -\cot r + \frac{r}{\sin^2 r} \right\}.$$

III. Nemen we het verschil van het veld (β) met $\frac{1}{2}$, en het veld (γ) met $\frac{1}{2\pi^2}$ vermenigvuldigd, dan valt de magnetische schaal in B weg, en we houden het veld (δ):

$$\frac{\cos\varphi}{\pi}\left\{\frac{\frac{\pi}{2}-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\},$$

welk veld als eenige divergentie heeft twee dubbelpunten in P_1 en P_2, waarvan in de tegenpunten gelijknamige polen correspondeeren.

De som van dit veld (δ), en het veld (α) met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd, moet nu geven een veld, dat als divergentie heeft een enkel dubbelpunt met eenheidsmoment in P_1, m. a. w. het gezochte veld E_1.

We vinden daarvoor dus op de halve hypersfeer van P_1:

$$\frac{1}{\pi}\cos\varphi\left\{\frac{\pi-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\}$$

en op de halve hypersfeer van P_2:

$$\frac{1}{\pi}\cos\varphi\left\{\frac{-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\},$$

of, als we nu op beide helften de coördinaten r en φ definieeren van uit P_1 en $P_1 Q_1$, komt de volgende uitdrukking, geldig voor beide helften:

$$\frac{1}{\pi}\cos\varphi\left\{\frac{\pi-r}{\sin^2 r}+\cot r\right\}\equiv\psi(r)\cos\varphi.$$

IV. Om dit veld E_1 te splitsen in twee fictieve „velden van een enkel agenspunt" (die echter over de geheele hypersfeer divergentie hebben), nemen we voor de laatste maar $\int_r^\pi \psi(r)\,dr \equiv F_1(r)$.

Dan geldt voor een willekeurige gradiëntendistributie:

$$ {}_0^1X = \overline{\nabla^1}\int\frac{\overline{\nabla^2}\;{}_0^1X}{4\pi}F_1(r)\,d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

V. Het veld E_2 van een kringstroompje volgens het aequatorvlak in den oorsprong, is buiten den oorsprong met bovenstaand veld E_1 identiek; maar nu is elke krachtlijn een gesloten vectordraad met een lijnintegraal van 4π langs zichzelf.

Volgens de methode van A § IX zoeken we van dit veld E_2 de planivectorpotentiaal H in het meridiaanvlak en onafhankelijk van het azimuth.

We vinden, als we $\pi - r = \beta$ schrijven:

$$\Sigma = \frac{1}{\pi} \sin^2\varphi \, (1 + \beta \cot r) \, d\vartheta.$$

$$H = \frac{1}{\pi} \sin\varphi \frac{1 + \beta \cot r}{\sin r},$$

verdwijnt dus langs alle groote cirkels in het tegenpunt.

Waaruit we weer afleiden voor de kracht van een stroomelement met eenheidssterkte in den oorsprong, gericht volgens de as van het sferisch coördinatenstelsel:

$$\frac{1}{\pi} \sin\varphi \frac{1 + \beta \cot r}{\sin r},$$

gericht loodrecht op het meridiaanvlak.

VI. Hieruit leiden we op de wijze van A § XI af een vectorpotentiaal V van een stroomelement, evenwijdig aan dat stroomelement, en een functie van r alleen. Voor de scalarwaarde U van die vectorpotentiaal hebben we de differentiaalvergelijking:

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left\{ U \sin\varphi \sin r \, d\varphi \right\} dr - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{ U \cos\varphi \, dr \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \sin\varphi \frac{1 + \beta \cot r}{\sin r} \, . \, dr \, . \sin r \, d\varphi.$$

Of:

$$U - \frac{\partial}{\partial r}\left\{ U \sin r \right\} = \frac{1}{\pi}(1 + \beta \cot r),$$

waarvan de oplossing is:

$$U = \frac{c}{\cos^2 \frac{1}{2} r} + \frac{1}{\pi}\left\{ \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} r} - \frac{\beta}{\sin r} \right\}.$$

We kiezen $c = 0$, en vinden dus als vectorpotentiaal V van een eenheidsstroomelement:

$$\frac{1}{\pi}\left\{ \frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2 \frac{1}{2} r} - \frac{\beta}{\sin r} \right\} \equiv F_2(r),$$

gericht evenwijdig aan het stroomelement. De functie $F_2(r)$ verdwijnt in het tegenpunt.

Voor een willekeurige flux geldt nu:

$$\overset{1}{_2}X = \nabla^{\!2}\!\!\int \frac{\nabla^{\!1} \overset{1}{_2}X}{4\pi} F_2(r) \, d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

En het willekeurige vectorveld X ten slotte is de ∇ van de potentiaal:

$$\int \frac{\sqrt[2]{X}}{4\pi} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\sqrt[1]{X}}{4\pi} F_2(r)\, d\tau .$$

F. *De sferische* R_n.

I. Om het veld E_1 te vinden, gaan we analoog te werk, als voor de sferische R_3. De groote bol B wordt hier een ${}^{n-1}$bol B; de groote cirkel C der punten H een groote ${}^{n-2}$bol C dèr punten H.

Voor de potentiaal (α) wordt gevonden:

$$\pm \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r};$$

voor de potentiaal (β):

$$\frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r};$$

dit veld (β) heeft in den bol B een magnetische ${}^{n-1}$schaal.

De potentiaal (γ) wordt geïntegreerd uit velden $bg\, tg \{ \cos \varphi\, tg\, r \}$ volgens $\cos \varphi$, de eerste zonale ${}^{n-1}$bolfunctie op B. Deze integratie geeft, als dw het element van den n-dimensionalen lichaamshoek om P voorstelt:

$$\cos \varphi\, f(r),$$

waarin:

$$f(r) = \int \cos \varphi\, bg\, tg \left\{ \cos \varphi\, tg\, r \right\} dw = k_{n-1} \int_0^\pi \sin^{n-2} \varphi \cos \varphi\, bg\, tg \left\{ \cos \varphi\, tg\, r \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{k_{n-1}}{n-1} \int_0^\pi \sin^n \varphi \frac{tg\, r\, d\varphi}{1 + tg^2 r \cos^2 \varphi}$$

(k_n gedefinieerd als onder C § III).

Hierin nu onder 't integraalteeken een factor $\sin^2 \varphi\, tg^2 r$ buiten haakjes brengend, en, door dien factor te schrijven als $\frac{1}{\cos^2 r} - (1 + \cos^2 \varphi\, tg^2 r)$, de integraal schrijvend als som van twee integralen, op de eerste waarvan dezelfde verdeeling in tweeën wordt toegepast, enzoovoort, vinden we, als we $\int_0^\pi \sin^h r\, dr = S_h$ schrijven:

$$\frac{(n-1) f(r)}{k_{n-1}} \sin^{n-1} r = - \sin^{n-2} r \cos r\, S_{n-2} - \sin^{n-4} r \cos r\, S_{n-4} \ldots$$

$$\ldots - \sin^2 r \cos r\, S_2 + \pi (1 - \cos r)$$

(voor n even)

$$= - \sin^{n-2} r \cos r \, S_{n-2} - \sin^{n-4} r \cos r \, S_{n-4} \ldots .$$
$$\ldots . - \sin r \cos r \, S_1 + 2 r$$

(voor n oneven)

$$= \pi . \frac{(n-1)(n-3)\ldots .}{(n-2)(n-4)\ldots .} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr = (n-1) \, S_{n-2} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

(voor n even)

$$= 2 . \frac{(n-1)(n-3)\ldots .}{(n-2)(n-4)\ldots .} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr = (n-1) \, S_{n-2} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

(voor n oneven)

Schrijven we ξ_n voor $2 . \pi . 2 . \pi . 2 \ldots .$, tot n factoren toe, dan hebben we:

$$k_n = \frac{\xi_n}{(n-2)(n-4)\ldots .}, \quad \text{en} \quad \frac{k_{n+1}}{k_n} = S_{n-1}.$$

Derhalve:

$$f(r) \sin^{n-1} r = k_n \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr,$$

en de potentiaal (γ) wordt:

$$k_n \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr.$$

II. Het veld (δ) vinden we als het verschil van het veld (β) met $\frac{1}{2}$, en het veld (γ) met $\frac{1}{k_n S_{n-1}} = \frac{1}{k_{n+1}}$ vermenigvuldigd, als:

$$\frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} . \frac{\frac{1}{2} S_{n-1} - \int_0^r \sin^{n-1} r \, dr}{S_{n-1}} = \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} . \frac{\int_r^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-1} r \, dr}{S_{n-1}};$$

dit veld heeft weer als eenige divergentie twee dubbelpunten in P_1 en P_2, waarvan in de tegenpunten gelijknamige polen correspondeeren. Het veld E_1 komt, door hierbij op te tellen het veld (α), met $\frac{1}{2}$ vermenigvuldigd. We vinden:

Op de halve sferische R_n om P_1:

$$\frac{1}{S_{n-1}} . \frac{\cos \varphi}{\sin^{n-1} r} \int_r^{\pi} \sin^{n-1} r \, dr.$$

Op de halve sferische R_n om P_2:

$$-\frac{1}{S_{n-1}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r} \int_0^r \sin^{n-1} r\, dr.$$

Of, als we op beide helften de coördinaten r en φ definieeren van uit P_1 en $P_1 Q_1$, komt de voor beide helften geldige uitdrukking:

$$\frac{1}{S_{n-1}} \cdot \frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r} \cdot \int_r^\pi \sin^{n-1} r\, dr \equiv \psi_n(r.) \cos\varphi.$$

III. Voor de potentiaal van het fictieve „veld van een enkel agenspunt" komt:

$$\int_r^\pi \psi_n(r)\, dr \equiv F_1(r).$$

En voor de wiilekeurige gradientendistributie geldt:

$$ {}^1_0X = \overline{\nabla^1} \int \frac{\overline{\nabla^2}\, {}^1_0X}{k_n} F_1(r)\, d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (I)$$

Van de divergentiedistributie van $F_1(r)$ in punten van algemeene ligging weten we, dat ze, genomen voor twee geheel willekeurige centra (fictieve agenspunten) met tegengesteld teeken, en dan uit beide gesommeerd, 0 oplevert; die distributie is dus aan den eenen kant onafhankelijk van de ligging van het centrum, en aan den anderen kant ligt ze geometrisch aequivalent ten opzichte van alle punten; ze is dus een constante. Maar heeft de functie $F_1(r)$ in punten van algemeene ligging constante divergentie, dan voldoet ze aan een differentiaalvergelijking, die de divergentie constant stelt. Hierin ligt dus een tweede middel om de functie F_1, en daaruit het veld E_1 te bepalen.

De differentiaalvergelijking wordt:

$$\frac{d}{dr}\left\{\sin^{n-1} r \cdot \frac{dF_1}{dr}\right\} = c \sin^{n-1} r \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (H)$$

$$\sin^{n-1} r \cdot \frac{dF_1}{dr} = c \int \sin^{n-1} r\, dr.$$

$$\frac{dF_1}{dr} = c \cdot \frac{\int \sin^{n-1} r\, dr}{\sin^{n-1} r}.$$

Zal uit de functie $F_1(r)$ het veld E_1 zijn samen te stellen, dan mag het tegenpunt van het centrum geen eindigen uitgaanden vectorstroom hebben; we stellen dus daarvoor $\int \sin^{n-1} r\, dr = 0$, zoodat we

krijgen:

$$\frac{dF_1}{dr} = -\frac{c}{\sin^{n-1} r}\int_r^\pi \sin^{n-1} r\, dr,$$

hetgeen met de boven gevonden uitkomst overeenstemt.

IV. Het veld E_2 van een wervel-$^{n-2}$bolletje volgens de R_{n-1}, loodrecht op de as van het zooeven beschouwd dubbelpunt, is buiten den oorsprong met dat veld E_1 identiek; elke krachtlijn is nu echter een gesloten vectordraad met lijnintegraal k_n langs zichzelf.

Volgens de methode van C § VII zoeken we van dit veld E_2 de planivectorpotentiaal H, die ligt in het meridiaanvlak, en alleen afhangt van r en φ; en die dus is een ${}_1^2X$. We vinden:

$$dh = c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi.$$

Kracht in r-richting:

$$(n-1)\cos\varphi \left\{\frac{1}{(n-1)S_{n-1}} + \frac{\cot r}{S_{n-1}} \cdot \frac{\int_r^\pi \sin^{n-1} r\, dr}{\sin^{n-1} r}\right\} \equiv (n-1)\cos\varphi \,.\, \omega_n(r.)$$

$$\Sigma = \int_0^\varphi (n-1)\cos\varphi\, \omega_n(r) \,.\, c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2}\varphi \,.\, \sin r\, d\varphi =$$

$$= \omega_n r \,.\, c\varepsilon \sin^{n-1} r \sin^{n-1}\varphi.$$

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \omega_n(r)\sin r \sin\varphi \equiv \chi_n(r)\sin\varphi.$$

Hieruit volgt dan weer voor de kracht van een vlak wervelelement met eenheidssterkte in den oorsprong:

$$\chi_n(r)\sin\varphi,$$

gericht evenwijdig aan het ageerende wervelelement, en zich op diens vlak projecteerend volgens de raaklijn aan een concentrischen cirkel; terwijl φ is de hoek van den voerstraal met de R_{n-2} loodrecht op het wervelelement.

V. Op de wijze van C § IX leiden we hieruit af de planivectorpotentiaal V van een wervelelement, die overal evenwijdig aan het wervelelement gericht is, en waarvan de scalarwaarde een functie van r alleen is. Die scalarwaarde U van die vectorpotentiaal is hier bepaald door de differentiaalvergelijking:

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left\{U\cos\varphi\,.\,dr\,.\,c\varepsilon\sin^{n-3}r\cos^{n-3}\varphi\right\}d\varphi-$$

$$-\frac{\partial}{\partial r}\left\{U\sin\varphi\,.\,\sin r\,d\varphi\,.\,c\varepsilon\sin^{n-3}r\cos^{n-3}\varphi\right\}dr=$$

$$=\chi_n(r)\sin\varphi\,.\,\sin r\,d\varphi\,.\,dr\,.\,c\varepsilon\sin^{n-3}r\cos^{n-3}\varphi.$$

$$(n-2)\,U-\frac{dU}{dr}\sin r-(n-2)\,U\cos r=\chi_n(r)\sin r.$$

$$\frac{dU}{dr}-(n-2)\,U\,tg\,\tfrac{1}{2}r=-\chi_n(r).$$

$$U=\frac{1}{\cos^{2(n-2)}\frac{1}{2}r}\,.\int_r^{\pi}\cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2}r\,.\,\chi_n(r)\,dr,$$

een in het tegenpunt verdwijnende functie, die we $\equiv F_2(r)$ stellen.

We hebben dan voor een willekeurige flux:

$$\tfrac{1}{2}X=\overline{\nabla}^{2}\!\!/\int\frac{\overline{\nabla}^{1}\!\!/\,\tfrac{1}{2}X}{k_n}F_2(r)\,d\tau\quad\ldots\ldots\ldots\quad(II)$$

En een willekeurig vectorveld beschouwende als veroorzaakt, doordat zijn beide afgeleiden (de magneten en wervelstelsels) zich voortplanten door de ruimte tot een potentiaal, volgens een in het tegenpunt verdwijnende functie van den afstand, hebben we:

$$X=\nabla\left\{\int\frac{\overline{\nabla}^{2}\!\!/X}{k_n}F_1(r)\,d\tau+\int\frac{\overline{\nabla}^{1}\!\!/X}{k_n}F_2(r)\,d\tau\right\}.$$

G. *De Elliptische R_n.*

I. Ook voor de elliptische R_n is de afgeleide eener willekeurige lijnvectordistributie een integraal van elementair-wervelstelsels W_y en W_z, die resp. de eerste en tweede afgeleide zijn van een geïsoleerden lijnvector. Voor elementair-${}^{1}_{0}X$ zal dus moeten komen het veld van een divergentiedubbelpunt.

De SCHERING'sche elementairpotentiaal $\int_r^{1/2\pi}\frac{dr}{\sin^{n-1}r}\equiv v_n(r)$ is hier een meerwaardige functie (vgl. KLEIN, Vorlesungen über Nicht-Euklidische Geometrie), moet dus als zinloos worden beschouwd.

II. De eenzijdige elliptische R_n wordt door een vlakke R_{n-1}, tweemaal beschouwd met tegengestelde normaalrichting, als een tweezijdig enkelvoudig samenhangend R_n-segment door een tweezijdig

gesloten R_{n-1} omsloten. Passen we op de zoo omsloten R_n het theorema van GREEN toe voor een scalarfunctie φ, die nergens divergentie heeft, en een, die in twee willekeurige punten P_1 en P_2 gelijke en tegengestelde divergenties heeft en verder nergens (zulk een functie zal in het volgende blijken te bestaan), dan vinden we:

$$\varphi_{P_2} - \varphi_{P_1} = 0,$$

m. a. w. φ is een constante, daar de punten P_1 en P_2 willekeurig zijn gekozen.

Er is dus weer geen ${}^{1}_{0}X$ mogelijk, die nergens divergentie heeft, dus geen ${}^{1}X$, die nergens rotatie en nergens divergentie heeft, en hieruit volgt:

Een lijnvectordistributie in een elliptische R_n is door haar rotatie en haar divergentie eenduidig bepaald.

III. We gaan dus na:

1e. het veld E_1, met als tweede afgeleide twee gelijke en tegengestelde scalarwaarden vlak bij elkaar.

2e. het veld E_2, met als eerste afgeleide gelijkmatig gedistribueerde planivectoren in de punten van een ${}^{n-2}$bolletje, loodrecht op dat ${}^{n-2}$bolletje.

Op eindigen afstand van hun oorsprong zijn de velden E_1 en E_2 identiek gebouwd.

IV. Om de potentiaal van het veld E_1 te vinden, gaan we het een-tweeduidig afbeelden op de sferische R_n; de afbeelding zal dan als divergentie hebben twee dubbelpunten in tegenpunten, waar gelijknamige polen als tegenpunten correspondeeren; het zal dus zijn het met 2 vermenigvuldigde veld (d), afgeleid onder F § II:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^{n-1} r} \cdot \frac{\int_r^{1/2\pi} \sin^{n-1} r \, dr}{\frac{1}{2} S_{n-1}} \equiv \lambda_n(r) \cos\varphi.$$

In het veld, dat in de elliptische ruimte hiermee correspondeert, gaan alle krachtlijnen van de positieve naar de negatieve pool van het dubbelpunt; een gedeelte snijdt de pool-R_{n-1} van den oorsprong: deze krachtlijnen zijn in het meridiaanvlak unilateraal; de overige snijden haar niet: deze zijn in het meridiaanvlak bilateraal.

De beide grenskrachtlijnen, die samen een dubbelpunt vormen in de pool-R_{n-1}, hebben de vergelijking:

$$\sin^{n-1}\varphi \left\{ \sin^{n-1} r + (n-1) \cot r \int_r^{1/2\pi} \sin^{n-1} r \, dr \right\} = \pm 1.$$

De R_{n-1} van nulpotentiaal bestaat uit de pool-R_{n-1} en de aequator-R_{n-1} van het dubbelpunt; haar snijlijn met het meridiaanvlak heeft een dubbelpunt in het krachtlijnendubbelpunt. Alle potentiaalkrommen in het meridiaanvlak zijn bilateraal.

V. Voor het fictieve „veld van een enkel agenspunt" komt de potentiaal $\int \lambda_n(r)\, dr$. Rationeel is, te zorgen dat zij 0 wordt in de pool-R_{n-1}; we krijgen dan:

$$\int_r^{1/2\pi} \lambda_n(r)\, dr \equiv F_1(r),$$

en voor de willekeurige gradientendistributie geldt:

$$ {}^1_0X = \overline{\nabla^1} \int \frac{\overline{\nabla^2}\, {}^1_0X}{k_n} F_1(r)\, d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (I)$$

$F_1(r)$ was ook te vinden geweest uit de differentiaalvergelijking (H) van F § III, waaraan ze op dezelfde gronden als daar zijn aangevoerd, moet voldoen. Ook voor de elliptische R_n is:

$$\frac{dF_1}{dr} = c \,.\, \frac{\int \sin^{n-1} r\, dr}{\sin^{n-1} r}.$$

Maar hier moet in de pool-R_{n-1}, die symmetrisch ligt ten opzichte van het centrum van het veld, de kracht, dus $\int \sin^{n-1} r\, dr = 0$ zijn, zoodat we krijgen:

$$\frac{dF_1}{dr} = -\frac{c}{\sin^{n-1} r} \int_r^{1/2\pi} \sin^{n-1} r\, dr.$$

VI. Op de gewone wijze leiden we verder af de ${}^1_2X$, die planivectorpotentiaal is van het veld E_2.

$$dh = c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2} \varphi.$$

Kracht in r-richting:

$$(n-1) \cos\varphi \left\{ \frac{2}{(n-1)S_{n-1}} + \frac{2 \cot r}{S_{n-1}} \,.\, \frac{\int_r^{1/2\pi} \sin^{n-1} r\, dr}{\sin^{n-1} r} \right\} \equiv (n-1) \cos\varphi \,.\, \mu_n(r).$$

$$\Sigma = \int_0^{\varphi} (n-1) \cos \varphi \,.\, \mu_n (r) \,.\, c\varepsilon \sin^{n-2} r \sin^{n-2} \varphi \,.\, \sin r \, d\varphi =$$

$$= \mu_n (r) \,.\, c\varepsilon \sin^{n-1} r \sin^{n-1} \varphi.$$

$$H = \frac{\Sigma}{dh} = \mu_n (r) \sin r \sin \varphi \equiv \varkappa_n (r) \sin \varphi.$$

Waaruit volgt voor de kracht van een vlak wervelelement met eenheidssterkte in den oorsprong:

$$\varkappa_n (r) \sin \varphi,$$

gericht evenwijdig aan het ageerend wervelelement, en zich op diens vlak projecteerend volgens de raaklijn aan een concentrischen cirkel; φ is hier de hoek van den voerstraal met de R_{n-2} loodrecht op het wervelelement.

VII. Ook hier kan weer een planivectorpotentiaal van een wervelelement worden afgeleid, maar we kunnen niet spreken van een evenwijdig voortgeplantte stelling van het wervelelement, daar in de elliptische ruimte die stelling niet meer eenduidig bepaald is: na een omloop langs een rechte lijn is zij overgevoerd in den spiegelstand ten opzichte van het normaalvlak op de rechte lijn.

Maar we kunnen een eenduidig bepaalde vectorpotentiaal krijgen, door te nemen die van twee antipodische wervelelementen in de sferische R_n^s (in hun ²bol zijn de beide indicatrices dan tegengesteld gericht).

De vectorpotentiaal in een punt der elliptische R_n ligt dan in de ruimte door dat punt en het wervelelement; nemen we het vlak van het element als aequatorvlak in die ruimte, dan staat de planivectorpotentiaal V loodrecht op dat meridiaanvlak; zij bestaat uit:

1°. een ontbondene U_1 loodrecht op den voerstraal, volgens de formule:

$$\frac{U_1}{\cos \varphi} = \frac{1}{\cos^{2(n-2)} \frac{1}{2} r} \int_r^{\pi} \cos^{2(n-2)} \tfrac{1}{2} r \, \chi_n (r) \, dr +$$

$$+ \frac{1}{\sin^{2(n-2)} \frac{1}{2} r} \int_{\pi - r}^{\pi} \cos^{2(n-2)} \tfrac{1}{2} r \,.\, \chi_n (r) \, dr.$$

2°. een ontbondene U_2 door den voerstraal, volgens de formule:

$$\frac{U_2}{\sin\varphi} = \frac{1}{\cos^{2(n-2)}\frac{1}{2}r}\int_r^{\pi}\cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2}r\,\chi_n(r)\,dr -$$

$$-\frac{1}{\sin^{2(n-2)}\frac{1}{2}r}\int_{\pi-r}^{\pi}\cos^{2(n-2)}\tfrac{1}{2}r\,.\,\chi_n(r)\,dr.$$

Stellen we deze planivectorpotentiaal als functie van het wervelelement en de coördinaten ten opzichte van het wervelelement voor door G_2, dan geldt dus voor een willekeurige flux in de elliptische R_n:

$$\tfrac{1}{2}X = \overline{\nabla}^{2}\!\!\!/\int \frac{G_2\left\{\overline{\nabla}^{1}\!\!\!/\ \tfrac{1}{2}X, r, \varphi\right\}}{k_n}\,d\tau. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (II)$$

En een willekeurig vectorveld beschouwende als veroorzaakt, doordat zijn beide afgeleiden (de magneten en wervelstelsels) zich voortplanten door de ruimte tot een potentiaal, schrijven we:

$$X = \nabla\int \frac{\overline{\nabla}^{2}\!\!\!/\ X\,.\,F_1(r) + G_2(\overline{\nabla}^{1}\!\!\!/\ X, r, \varphi)}{k_n}\,d\tau.$$

VIII. In het bijzonder voor de elliptische R_3 zijn de uitkomsten: Potentiaal van een agensdubbelpunt:

$$\frac{\cos\varphi}{\sin^2 r}\cdot\frac{\int_r^{\frac{1}{2}\pi}\sin^2 r\,dr}{\frac{1}{2}S_3} = \frac{2\cos\varphi}{\pi}\cdot\left\{\frac{(\frac{1}{2}\pi - r)}{\sin^2 r} + \cot r\right\},$$

of als we $\frac{1}{2}\pi - r = \gamma$ stellen:

$$\frac{2\cos\varphi}{\pi}\cdot\left\{\frac{\gamma}{\sin^2 r} + \cot r\right\}.$$

Vergelijking der grenskrachtlijnen:

$$\sin^2\varphi\,(1 + \gamma\cot r) = \pm 1.$$

Potentiaal van een enkel agenspunt:

$$\frac{2}{\pi}\,.\,\gamma\,.\,\cot r.$$

Vectorpotentiaal van een elementairkringstroom:

$$\frac{2}{\pi}\sin\varphi\,.\,\frac{1+\gamma\cot r}{\sin r}.$$

Dus ook kracht van een stroomelement:

$$\frac{2}{\pi}\sin\varphi\,.\,\frac{1+\gamma\cot r}{\sin r}.$$

Lijnvectorpotentiaal van een stroomelement:

volgens de voerstraal: $\frac{\cos\varphi}{\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}r}-\frac{\pi}{\sin r}+\frac{\frac{1}{4}r^2}{\sin^2\frac{1}{2}r}\right\}$.

loodrecht op de voerstraal: $\frac{\sin\varphi}{\pi}\left\{\frac{\frac{1}{4}\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}r}+\frac{2r-\pi}{\sin r}-\frac{\frac{1}{4}r^2}{\sin^2\frac{1}{2}r}\right\}$.

IX. Voor het elliptische platte vlak krijgen we:

Potentiaal van een agensdubbelpunt:

$$\cos\varphi\cot r.$$

Vergelijking der grenskrachtlijnen:

$$\sin\varphi=\pm\sin r, \quad \text{of} \quad \varphi=\begin{cases} r \\ \pi-r \end{cases}.$$

Potentiaal van een enkel agenspunt:

$$-l\sin r.$$

Scalarwaarde der planivectorpotentiaal van een dubbelpunt van rotatie:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin r}.$$

Dus ook kracht van een rotatie-element:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin r}.$$

Planivectorpotentiaal van een rotatie-element:

$$l\cot\tfrac{1}{2}r.$$

We merken op, dat de dualiteit van beide potentialen en beide afgeleiden, die bij de sferische R_2 bestond, hier weer is verloren gegaan in de uitkomsten. De grond daarvan is, dat bij afbeelding op den bol een divergentie in het elliptisch plat vlak wordt twee gelijke divergenties in tegenpunten met gelijk teeken; een rotatie twee gelijke rotaties in tegenpunten met verschillend teeken; bij de laatste komt dus niet de analoge potentiaal, als bij de eerste; de laatste kan hier worden gevonden volgens de Scheringsche potentiaalformule.

Hiermee hangt direct samen, dat in het elliptische platte vlak het veld van een enkele rotatie (in tegenstelling met dat van een enkele divergentie) als zoodanig bestaansmogelijkheid heeft, dus als eenheid van veld kan worden genomen. Dat veld bestaat uit krachten rakend aan concentrische cirkels en groot $\frac{1}{\sin r}$.

NASCHRIFT. In de formule voor vectorvelden in hyperbolische ruimten:

$$Pot.\ X = \int \frac{\overset{2}{\nabla} X}{k_n} F_1(r)\, d\tau + \int \frac{\overset{1}{\nabla} X}{k_n} F_2(r)\, d\tau$$

volgt uit de afleiding voorloopig niet anders, dan dat onder $\overset{2}{\nabla} X$ en $\overset{1}{\nabla} X$ ook de bijdragen, die het oneindige er toe levert, moeten worden meegeteld. Uit de veldeigenschap volgt echter direct, dat de werking dier bijdragen in 't eindige wegvalt, zoodat we onder het integraalteeken alleen de $\overset{2}{\nabla} X$ en $\overset{1}{\nabla} X$ in 't eindige behoeven te lezen.

Immers de $\overset{1}{\nabla}$ in 't oneindige per oppervlakte-eenheid van den oneindig grooten bol is $<$ orde e^{-r}; het potentiaal-effect hiervan in 't eindige wordt $<$ orde $re^{-(n-2)r} \times e^{-r} = re^{-(n-1)r}$; het krachteffect dus $<$ orde $e^{-(n-1)r}$; het krachteffect van het geheele oneindig groote boloppervlak dus oneindig klein.

En de $\overset{2}{\nabla}$ in 't oneindige per oppervlakte-eenheid is $<$ orde $\frac{1}{r}$; zij geeft een potentiaal-effect in 't eindige $<$ orde $e^{-(n-1)r} . \frac{1}{r}$, dus een krachteffect $<$ orde $e^{-(n-1)r} . \frac{1}{r^2}$; het totale krachteffect, veroorzaakt door het oneindige, blijft dus $<$ orde $\frac{1}{r^2}$.

De redeneering gaat niet door voor het krachtveld der hyperbolische R_2 in de tweede opvatting (zie onder B § VIII), maar daar ligt in den aard dier opvatting zelf, dat de afgeleiden in 't oneindige uitdrukkelijk worden opgegeven, dus ook worden meegeteld.

Natuurkunde. — De Secretaris biedt aan Mededeeling N°. 95e uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer*".

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

Voor de Bibliotheek wordt aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM de dissertatie van den Heer G. H. LEOPOLD: „*Driephasenlijnen met minimum druk bij chloralaethylalcoholaat en zoutzuuraniline*".

De vergadering wordt gesloten.

(11 October, 1906).

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 27 October 1906.

Voorzitter: de Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 312.
Verslag van de Commissie over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum, p. 313.
J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge verduisteringen der wachters van Jupiter", p. 316.
W. H. JULIUS: „Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied", p. 317. (Met twee platen).
H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM: „Het gedrag der halogenen tegenover elkander", p. 334.
H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN: „Over het behandelde op de te Budapest gehouden vergadering der Internationale Graadmetingscommissie", p. 335.
A. J. P. VAN DEN BROEK: „Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren". (Aangeboden door de Heeren L. BOLK en C. WINKLER), p. 335.
W. A. VERSLUYS: „Tweede mededeeling over de Plückersche equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme". (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 342.
F. M. JAEGER: „Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen besit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt". (Aangeboden door de Heeren H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM en A. P. N. FRANCHIMONT), p. 345.
H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer", (Naschrift), p. 348.
H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: „Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer", p. 349. (Met één plaat).
Aanbieding eener verhandeling van den Heer P. H. SCHOUTE: „Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume" 2te Abhandlung, p. 360.
Aanbieding door den Heer J. M. VAN BEMMELEN eener verhandeling van den Heer H. G. JONKER: „Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland" (1734—1906), p. 360.
Aanbieding van boekgeschenken, p. 360.
Errata, p. 361.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Naar aanleiding hiervan deelt de Secretaris mede dat de Heer JULIUS benoemd is in de Commissie voor de ventilatie van de bovenzalen van het Rijksmuseum, daar de Heer KAMERLINGH ONNES heeft medegedeeld zijne benoeming niet te kunnen aanvaarden.

Ingekomen zijn:

1°. Missive van Z.Ex. den Minister van Binnenlandsche Zaken d.d. 12 October 1906 waarbij bericht wordt dat aan den Heer Ph. van Harreveld Jr., Docts. in de plant- en dierkunde te Groningen ook een rijkstoelage verleend is om met de inkomsten uit het Buitenzorg-fonds te dienen voor de voortzetting zijner studiën aan het Botanisch Station te Buitenzorg; benevens bericht van den Heer van Harreveld, dat hij in Maart 1907 naar Indië hoopt te vertrekken. Mededeeling hiervan is aan den Minister toegezonden.

2°. Bericht over de vergadering van het comité der Internationale Associatie der Akademiën gehouden te Weenen 30 Mei en 1 Juni 1906; benevens een circulaire van de Kön. Preuss. Akademie der Wissenschaften te Berlijn betreffende één der op die vergadering besproken punten: „De samenwerking tusschen de Internationale Associatie en de Internationale Vereeniging voor het onderzoek der zon."

De Voorzitter stelt voor dit punt in de volgende vergadering nader ter sprake te brengen. Aldus wordt besloten.

3°. Circulaire van den Nederlandschen Bond van Horlogemakers over „Eenheid van schroefdraad" en ter begeleiding van een „Note sur un projet tendant à l'unification des petites vis d'un diamètre inférieur à six millimètres. Unification des filetages par E. Zartiaux et Ch. Zetter", met verzoek opmerkingen of overwegingen over dat onderwerp te doen toekomen aan genoemden bond. Ter kennisneming van de leden beschikbaar gesteld.

4°. Missive van de Geologische Commissie, d.d. 10 October 1906. Naar aanleiding daarvan brengt de Secretaris in herinnering, dat volgens den wensch der Geologische Commissie, uitgesproken in haar schrijven van 13 Maart 1906 de Afdeeling tot Z.Exc. den Minister van Waterstaat het verzoek heeft gericht de omschrijving van het doel harer jaarlijksche toelage van *f* 1000 thans luidende: tot het houden van aanteekeningen van geologischen aard bij grondboringen en doorsnijdingen van den bodem van Nederland, te willen veranderen in: voor alles, wat dienen kan voor het geologisch onderzoek in Nederland en de kennis van onzen bodem kan vermeerderen. Bij haar schrijven van 25 April 1906 lichtte de Commissie haar meening nader toe door als voorbeeld o.a. aan te geven: de herkomst te bepalen van het diluviale materiaal door het verzamelen van monsters voor vergelijking in de landen, waarvan de gesteenten worden ondersteld afkomstig te zijn. Bij schrijven van 28 Juni 1906 deelde Z.Exc. aan de Akademie mede, dat geen termen bestonden het verzoek toe te staan, daar het subsidie alleen moest dienen: om gegevens te verzamelen, die nuttig zouden kunnen zijn voor de vervaardiging van

eene verbeterde geologische kaart. Naar de meening van den Minister nu: is het bepalen van de herkomst van het diluviale materiaal en hetgeen daarmede verband houdt voor de eventueele geologische kaarteering van geen belang, en schijnt (die bepaling) meer te mogen worden beschouwd als eene wetenschappelijke studie. In haar thans te behandelen missive van 10 October 1906 nu, wijst de Commissie er op: dat de door haar bedoelde vergelijking wel degelijk de eventueele geologische kaarteering geldt; dat zij met haar formuleering geenszins de bedoeling had gehad om de toelage ook voor algemeen wetenschappelijk geologisch onderzoek en studie te benutten, maar uitsluitend voor het onderzoek van al hetgeen aan de eventueele geologische kaarteering van Nederland kan ten goede komen. Voor de voorbereiding daarvan is de in haar schrijven van April 1906 bedoelde vergelijking onmisbaar.

Afschrift van het schrijven van de Geologische Commissie is aan Z.Exc. toegezonden.

Voorts bericht de Geologische Commissie dat zij gaarne bereid is tot samenwerking met den dienst der Rijksopsporing van Delfstoffen. Mededeeling daarvan is gedaan aan den Heer Ingenieur-Directeur van dien dienst. Deze antwoordde bij schrijven van 15 Oct. l.l. hetwelk aan de Geologische Commissie is toegezonden.

5°. Bericht van Prof. E. C. van Leersum betreffende een tentoonstelling van voorwerpen welke op de geschiedenis der natuur- en geneeskundige wetenschappen betrekking hebben. In handen gesteld van de Heeren Zeeman en Bolk.

Natuurkunde. — *Rapport over de inrichting en beproeving der bliksemafleiders op het Rijksmuseum te Amsterdam.*

Zijne Exc. de Minister van Binnenlandsche Zaken, heeft bij missive van 29 Juni 1906, naar aanleiding van een schrijven van den Hoofddirecteur van het Rijksmuseum de Wis- en Natuurkundige Afdeeling der Koninklijke Akademie van Wetenschappen uitgenoodigd een onderzoek in te stellen omtrent de vraag, of ten aanzien van de inrichting der op het Rijksmuseum aangebrachte bliksemafleiders en de beproeving daarvan, thans andere regels behooren te worden gesteld, dan die welke zijn aangegeven in de rapporten, uitgebracht in de vergaderingen der Akademie van 25 Juni 1887 en 28 Januari 1888. Door den Voorzitter der Afdeeling werd ons het door den Minister gewenschte onderzoek opgedragen.

Ten einde ons van die opdracht te kwijten hebben wij ons tot

den Hoofddirecteur van het Rijksmuseum en tot den Architect der Rijksmuseumgebouwen gewend met verzoek ons teekeningen en verdere gegevens te verstrekken waardoor wij ons een denkbeeld van den bestaanden toestand zouden kunnen vormen. Wij mochten van genoemde Heeren alle medewerking, die wij konden wenschen, ondervinden. Wij verzochten bepaaldelijk den Heer Architect ons mede te deelen of de toestand in overeenstemming is met de in het eerste der bovengenoemde rapporten vervatte voorstellen; welke veranderingen, waarmede de commissie bij hare overwegingen rekening zou moeten houden, in den loop der jaren in de gebouwen zijn aangebracht en welke voorzieningen zijn getroffen tegen het gevaar dat uit de in de gebouwen aanwezige metaalmassa's zou kunnen voortvloeien.

De Heer Cuypers, waarnemend Architect der Rijksmuseumgebouwen, deelde ons hierop mede dat de bestaande toestand der 12 bliksemafleiders geheel in overeenstemming is met het rapport uitgebracht in de Akademie-vergadering van 25 Juni 1887. Intusschen is daarna de toestand in zooverre gewijzigd dat bijgebouwd werden: de oefenschool, het fragmentengebouw en de Rembrandtzaal. Eene situatieteekening van genoemde gebouwen en van het Rijksmuseum werd tot onze beschikking gesteld. Zoowel op de oefenschool als op het fragmentengebouw is een bliksemafleider aangebracht op dezelfde wijze als voor de museumgebouwen was voorgeschreven, terwijl deze twee afleiders respectievelijk met de gas- of waterleiding in den grond verbonden en daaraan gesoldeerd werden.

De hoofddirecteur en de Heer Cuypers verschaften aan uwe commissie verder de gelegenheid om mondeling eenige punten nader te bespreken en verscheidene deelen van het gebouw in oogenschouw te nemen. Zoo bezagen wij het met lood bedekte dak der Rembrandtzaal en de bibliotheek en werd ons de wijze van verbinden tusschen de regenpijpen en het dak getoond; verder werd door ons de loop der regenpijpen op de binnenplaatsen en eveneens buiten aan het gebouw meer in bijzonderheden nagegaan.

Als resultaat van het door ons ingestelde onderzoek en van onze overwegingen meenen wij de volgende uitbreiding van het systeem der bliksemafleiders van de Rijksmuseumgebouwen te moeten voorstellen:

1°. Het looden dak der Rembrandtzaal te verbinden met de twee regenpijpen, die van het dak van het hoofdgebouw afkomen en het door een goeden afleider met den grond te verbinden.

Hiervoor is het wenschelijk aan de achterzijde een verticalen

afleider naar den grond aan te brengen en bovendien de verticale van het dak der zaal afvoerende regenpijpen te verbinden aan den zoo aanstonds te noemen metaalband.

2°. Rondom het gebouw een breeden, zinken, horizontalen band van 200 mM². (of koperen van 100 mM²) doorsnede aan te brengen, die verbonden wordt aan alle regenpijpen en aan alle afleiders en die zal kunnen worden bevestigd op een iets grootere hoogte boven den grond dan die, waarop de regenpijpen in de hardsteenen kanalen overgaan.

Deze band behoeft niet het geheele gebouw te omvatten, maar kan, waar noodig, bijv. bij den doorrit, zijn afgebroken, indien slechts op of nabij de plaatsen waar de band eindigt voor een verbinding met de aarde of met de waterleiding wordt gezorgd.

3°. De regenbuizen in de binnenplaatsen aan de daarbij gelegen condensatiebuizen te verbinden, welke laatste in goed geleidend verband met de inwendige waterleiding moeten worden gebracht. Een der genoemde regenbuizen, die op te grooten afstand van de condensatiebuizen ligt, kan door den muur heen met de waterleiding in den doorrit worden verbonden.

4°. Een paar der daarvoor gunstig gelegen afleiders van het hoofdgebouw in den grond te verbinden met de waterleiding, door daaraan een spruit te soldeeren en eveneens den afleider van de directeurswoning door een spruit van koperdraad met de waterleidingsbuizen in den tuingrond nabij de woning te vereenigen, gelijk reeds door den Heer Architect in zijne mededeeling aan ons werd voorgesteld.

5°. Het geheele metalen systeem van zuilen en gaanderijen in de bibliotheek, dat met het dak daarvan is verbonden ook aan het benedeneinde (voor zoover dit nog noodig is) met de ijzeren wenteltrap aldaar te vereenigen en op een of twee plaatsen met de waterleiding of met een grondplaat in verband te brengen.

6°. Een metalliek verband te leggen op enkele plaatsen tusschen de afleiders en de ijzeren kettingankers, welke volgens de mondelinge toelichting van den Heer Cuypers op de hoogte der verdiepingen horizontaal binnen in de muren van het hoofdgebouw verloopen en gesloten kringen vormen. Gelijk in het Rapport van 25 Juni 1887 werd opgemerkt, plaatst het uitgestrekte samenstel der ijzeren kappen verbonden met de afleiders het gebouw als onder een

goed geleidende, met de aarde geleidend verbonden kooi. Door de bovengenoemde verbindingen der afleiders met de regenpijpen, den aan te brengen horizontalen band en de kettingankers zal die kooi gecompleteerd worden, wat ons van groot belang schijnt, daar zulk een kooi ongetwijfeld het meest afdoend stelsel van bescherming tegen bliksemgevaar oplevert.

Ten gevolge der door ons voorgestelde wijzigingen zal dan ook het gevaar van afslaan van den bliksem op naburige metaalmassa's in het gebouw (buizen der centrale verwarming en de draadgeleidingen der electrische verlichting en van den telephoon), belangrijk verminderd worden.

De vraag in hoeverre het toch nog wenschelijk zal zijn die metaalmassa's te verbinden hangt in zoodanige mate af van de plaatselijke toestanden in het uitgestrekte gebouw dat wij meenen ons thans te moeten bepalen tot het voorstel, dat die verbinding zal worden tot stand gebracht, in zooverre nader overleg van uwe commissie met den Heer Architect daartoe aanleiding zal geven.

7°. Een volledigen afleider te plaatsen op het fragmentengebouw.

Wat de regels voor de beproeving der afleiders betreft, zoo komt het ons voor dat geen verandering behoeft te komen in die welke zijn vervat in het Rapport uitgebracht in de Akademievergadering van 28 Januari 1888. Alleen achten wij het wenschelijk, dat voortaan in het procesverbaal van beproeving vermeld wordt, *welke* der afleiders telkens zijn onderzocht. Ten slotte zij er op gewezen dat na de door ons gewenschte verbinding, bij het onderzoek der afleiders de waterleiding niet meer als hulpaardgeleiding zal kunnen worden gebezigd.

H. A. Lorentz.

H. Haga.

W. H. Julius.

P. Zeeman.

Sterrenkunde. — De Heer J. A. C. Oudemans doet eene mededeeling over: „*Onderlinge verduisteringen der wachters van Jupiter.*"

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

Natuurkunde. — De Heer JULIUS doet eene mededeeling over: „*Willekeurige lichtverdeeling in dispersiebanden. Gevolgtrekkingen op spectroscopisch en astrophysisch gebied.*"

(Medegedeeld in de vergadering van 29 September 1906).

Zoowel bij de proefondervindelijke spectroscopie als bij de toepassing harer uitkomsten op astrophysische vraagstukken is men gewoon, uit het uiterlijk van spectraallijnen gevolgtrekkingen af te leiden aangaande de temperatuur en de dichtheid van gassen in of om de lichtbron.

Deze gevolgtrekkingen moeten in vele gevallen geheel onjuist zijn, wanneer men den oorsprong der donkere lijnen uitsluitend in absorptie, die der lichte lijnen uitsluitend in selectieve emissie zoekt, en geen rekening houdt met het feit, dat de lichtverdeeling in het spectrum mede beheerscht wordt door anomale dispersie van de stralen in de absorbeerende stof.

Niet slechts bij uitzondering doet deze laatste invloed zich gelden. Van vele metaaldampen weet men reeds, dat zij anomale dispersie doen ondergaan aan de lichtsoorten die in de omgeving van een groot aantal hunner absorptielijnen thuis behooren [1]). In al die gevallen moet het uiterlijk der absorptielijnen door den bedoelden invloed in meer of minder sterke mate gewijzigd zijn, want homogeen is de doorstraalde dampmassa nooit.

Het is dus noodig, dat men de uitwerking der dispersie op spectraallijnen afzonderlijk onderzoekt; men moet trachten haar geheel af te scheiden van de zuivere emissie- en absorptieverschijnselen.

Een eerste poging om dit doel te bereiken vormden de vroeger beschreven proeven met een lange natriumvlam [2]), waarbij een bundel wit licht afwisselend langs verschillende wegen door die vlam gezonden werd. Wegens de ongelijkmatige verdeeling van den natriumdamp onderging, bij die relatieve verplaatsingen van lichtbundel en vlam, de loop der stralen van het anomaal gedispergeerde licht, veel sterkere veranderingen dan de loop der overige stralensoorten van het spectrum; absorptie en emissie veranderden daarbij betrekkelijk weinig. Het resultaat was, dat de lichtverdeeling in de omgeving

---

1) Na WOOD, LUMMER en PRINGSHEIM, EBERT, heeft zich vooral PUCCIANTI met onderzoekingen over anomale dispersie van verschillende metaaldampen bezig gehouden. In Nuovo Cimento. Serie V, Vol. IX, p. 303 (1905) beschrijft PUCCIANTI meer dan honderd lijnen die het verschijnsel vertoonen.

2) W. H. JULIUS, „Dispersiebanden in absorptiespectra." Versl. Natuurk. Afd. Dl. XIII, p. 26–32.

van D_1 en D_2 zeer sterk asymmetrisch gemaakt kon worden, hetgeen als gevolg van straalkromming gemakkelijk in alle bijzonderheden te verklaren was. Het bestaan van „dispersiebanden" was daarmee buiten twijfel gesteld.

Maar *volkomen* constant was het zuivere effect van emissie en absorptie bij deze proeven niet, en aangaande de dichtheid van den natriumdamp in de verschillende deelen der vlam kon men slechts gissingen maken. Bovendien was het dwarrelend opstijgen der heete gassen oorzaak, dat alle lichtstralen, ook die welke *geen* anomale dispersie ondergingen, merkbaar van den rechten weg afweken, zoodat de verschijnselen te veranderlijk waren om de werking der dispersie streng afgezonderd van die der emissie en absorptie te kunnen vertoonen.

Er moest dus gestreefd worden naar het verkrijgen van een zoo goed mogelijk homogene dampmassa en van een inrichting die veroorlooft, daarin dan naar willekeur plaatselijke verschillen in de dampdichtheid te weeg te brengen op zulk een wijze, dat de gemiddelde dichtheid er geen verandering van beteekenis door ondergaat. Het absorbeerend vermogen zou dan als constant mogen worden beschouwd. Tevens was het wenschelijk, den damp bij betrekkelijk lage temperatuur te onderzoeken, zoodat men geen rekening te houden had met zijn emissiespectrum.

In een reeks fraaie onderzoekingen omtrent het brekend vermogen en de fluorescentie van natriumdamp heeft R. W. WOOD[1]) den damp zich laten ontwikkelen in een luchtledige buis, die electrisch verhit werd. Door juiste regeling van de stroomsterkte bleek de dichtheid van den damp daarbij zeer gelijkmatig gehouden te kunnen worden. Van die ondervinding gebruik makende, heb ik voor het onderzoeken van dispersiebanden de volgende inrichting samengesteld.

Toestellen.

NN' (zie fig. 1) is een buis van nikkel, 60 cm. lang, 5,5 cm. diameter, 0,07 cm. wanddikte. Het middelste gedeelte daarvan, ter lengte van 30 cm., bevindt zich binnen een electrischen oven van HERAEUS (model: *E*, 3). Over de uiteinden zijn deksels geschoven, die met hun rand in twee op de buis gesoldeerde ringvormige gootjes komen en haar dus luchtdicht afsluiten wanneer men de gootjes aanvult met kit. Als de oven in werking is, houdt een voortdurende waterstroom, geleid door de beide mantels *M* en *M'*, de uit-

1) R. W. WOOD, Phil. Mag. [6], 3, p. 128; 6, p. 362.

einden van de buis koel. Elk der beide deksels bezit een rechthoekig venster van spiegelglas benevens, ter weerszijden daarvan en

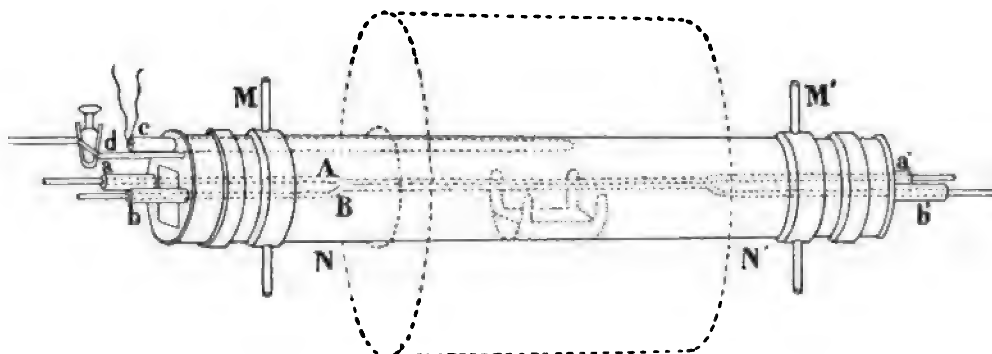


Fig. 1.

diametraal tegenover elkander geplaatst, twee openingen *a* en *b* (*b'* en *a'*), voorzien van korte stukjes messing-buis, waarvan het doel aanstonds duidelijk zal worden. Bovendien zijn in eén van de deksels (zie ook fig. 2) nog twee andere korte buizen *c* en *d* in openingen bevestigd; door *c* is de porceleinen buis van een pyrometer van LE CHATELIER luchtdicht naar binnen gevoerd, terwijl op *d* een glazen kraan met kwikafsluiting is vastgekit, die voert naar een manometer en een Geryk-luchtpomp. Zoodra het natrium (een zorgvuldig gereinigd stuk van ongeveer 7 gr.) in een van veerende ringen voorzien nikkelen bakje naar het midden van de buis geschoven was, had men deze laatste onmiddellijk luchtdicht gesloten en leeggepompt.

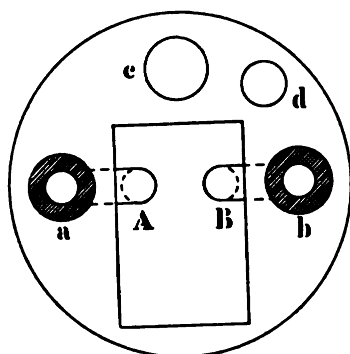


Fig. 2.

Thans blijft nog te beschrijven over de inrichting, waardoor binnen de dampmassa willekeurige ongelijkheden in de dichtheidsverdeeling werden te weeg gebracht. Zij bestaat uit twee nikkelen buizen *A* en *B* van 0,5 cm. diameter, gaande van *a* naar *a'* en van *b* naar *b'* en zóó gebogen, dat zij in het middelste, verhitte deel van de wijde buis over een lengte van 30 cm. op een onderlingen afstand van slechts 0,8 cm. nevens elkander loopen. In de vier openingen der deksels zijn *A* en *B* met behulp van caoutchouc verpakkingen volmaakt luchtdicht bevestigd. Deze verbindingswijze laat eenige vrijheid van beweging over, zoodat bij temperatuursverschillen tusschen de

wijde buis en de nauwe buizen geen vormverandering van deze laatste door spanningen behoeft te ontstaan. Het caoutchouc isoleert *A* en *B* tevens electrisch van *NN'*. De vier naar buiten uitstekende einden der buisjes worden door daaropgeschoven mantels met stroomend water (niet voorgesteld in de figuren) koel gehouden.

Laat men nu door *A* of *B* een electrischen stroom gaan, dan stijgt de temperatuur van dat buisje een weinig boven die van zijn omgeving; zendt men er een luchtstroom door, dan daalt de temperatuur beneden die van de omgeving. De stroomsterkten, en dus de temperatuursverschillen, zijn in beide gevallen gemakkelijk te regelen en geruimen tijd constant te houden.

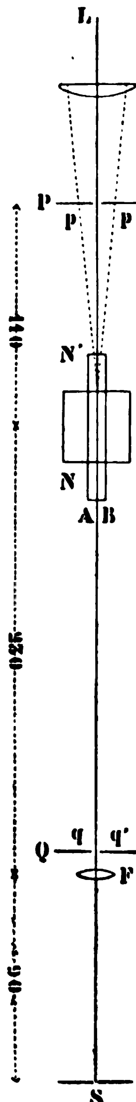


Fig. 3.

Fig 3 geeft een overzicht van de geheele opstelling. Het licht van de positieve kool *L* wordt door de lens *E* geconcentreerd op een scherm *Q* waarin zich een spleetvormige opening van regelbare breedte bevindt. De lens *F* vormt in het vlak der spleet *S* van den spectrograaf een scherp beeld van het diaphragma *P*. De optische as der beide lenzen gaat midden door de buis met natriumdamp *NN'*, juist tusschen de buisjes *A* en *B*.

Heeft nu de opening in het diaphragma *P* de gedaante van een vertikaal geplaatste nauwe spleet en valt het beeld daarvan precies op de spleet van den spectograaf, dan verschijnt in dezen met groote helderheid het doorloopende spectrum van het koolspitsenlicht. Wanneer de buis *NN'* niet verhit wordt, ziet men D_1 en D_2 als uiterst fijne, donkere lijntjes, die toegeschreven worden aan absorptie door het steeds in de omgeving der kolen aanwezige natrium. Opdat dit verschijnsel, als vergelijkingsspectrum, steeds in het gezichtsveld van den spectograaf aanwezig zou zijn, ook als de buis wèl verhit werd, was voor een gedeelte van de spleet *S* een klein totaal reflecteerend prisma geplaatst, waarheen met behulp van een eenvoudige combinatie van lenzen en spiegels een deel van den hoofdbundel geleid werd, buiten den electrischen oven om. Op elke genomen fotografie komt dus tevens het ongewijzigde spectrum van de lichtbron voor.

De gebezigde spectraalinrichting bestaat uit een vlak buigingsrooster van 10 cM. middellijn (verdeelde oppervlakte 8 bij 5 cM.) met 14436 lijnen op de inch en twee verzilverde spiegels van Zeiss; de collimatorspiegel

heeft een brandpuntsafstand van 150 cM., de andere van 250 cM. Meestal werd in het tweede spectrum gewerkt.

Bij de eerste verhitting van het natrium ontweek daaruit een vrij groote hoeveelheid gas (volgens WOOD waterstof), dat natuurlijk weggepompt werd. Nadat de toestel een paar malen in werking geweest was, bleef de spanning binnen de buis weken lang beneden 1 mM. kwik, ook tijdens de verhittingen, die bij de in dit opstel beschreven proeven nimmer hooger gingen dan tot 450°. De binnenwand van NN' en ook de buisjes A en B zijn na korten tijd met een laag neergeslagen natrium bedekt; daardoor wordt de gelijkmatigheid van de dampontwikkeling bij de latere verhittingen bevorderd. Merkwaardig is het, dat zich nagenoeg geen beslag van natrium afzet op de deelen der buis die buiten den oven uitsteken, zoodat ook de venstertjes volmaakt helder blijven. De dichtheid van verzadigden natriumdamp bij temperaturen tusschen 368° en 420° is proefondervindelijk bepaald door JEWETT [1]). Hij geeft de onderstaande tabel.

temperatuur	dichtheid
368°	0.00000009
373	0.00000020
376	0.00000035
380	0.00000043
385	0.00000103
387	0.00000135
390	0.00000160
395	0.00000270
400	0.00000350
406	0.00000480
408	0.00000543
412	0.00000590
418	0.00000714
420	0.00000750

[1]) F. B. JEWETT, A new Method of determining the Vapour-Density of Metallic Vapours, and an Experimental Application to the Cases of Sodium and Mercury. Phil. Mag. [6], 4, p. 546. (1902).

Deze dichtheden zijn van dezelfde orde van grootte als die van kwikdamp tusschen 70° en 120°. Bij 387° is de dichtheid van verzadigden natriumdamp ongeveer $\frac{1}{1000}$ van die der dampkringslucht bij 0° en 76 cM.

Waarnemingen.

Regelen wij nu de stoomsterkte in den oven zoo, dat het thermoelement een standvastige temperatuur aanwijst (bij vele onzer proeven 390°), dan is binnen de buis de dampdichtheid wel niet overal dezelfde, want de temperatuur neemt van het midden naar de uiteinden af, maar omdat de niveauvlakken van de temperatuur in hoofdzaak loodrecht op den lichtbundel staan, gaan alle lichtstralen toch nagenoeg rechtlijnig door de dampmassa. Het spectrum is dan ook slechts weinig veranderd; de beide *D*-lijnen zijn iets sterker geworden, hetgeen wij *voorloopig* aan de absorbeerende werking van den natriumdamp in de buis willen toeschrijven.

Thans blazen wij een zwakken luchtstroom door het buisje *A*, dat daardoor een weinig afgekoeld wordt, zoodat er natrium op neerslaat, waarbij in zijn omgeving de dampdichtheid vermindert. Spoedig zien wij de natriumlijnen aanmerkelijk breeder worden. Een gevolg van sterker absorptie kan dit niet zijn, immers de gemiddelde dampdichtheid is een weinig afgenomen. De oorzaak is, dat lichtstralen met zeer grooten brekingsindex nu naar q' (fig. 3) gebogen worden, lichtstralen met zeer kleinen index naar q; in het beeld van de spleet P, dat op S gevormd wordt, komen dus de lichtsoorten, die ter weerszijden van de *D*-lijnen thuis behooren, niet meer voor, terwijl dat beeld toch volmaakt scherp blijft, omdat de loop der stralen van alle overige lichtsoorten uit het spectrum zoo goed als geen verandering heeft ondergaan. Wanneer wij nu gelijktijdig de buis *B* door middel van een stroom van bijv. 20 amp. verhitten, waardoor het dichtheidsverval in de ruimte tusschen de buizen grooter wordt, dan neemt de breedte der lijnen nog duidelijk verder toe. De hoeveelheid stroomwarmte die daarbij in de buis ontwikkeld wordt, bedraagt ongeveer 1 calorie per secunde; zij wordt echter voor het grootste gedeelte door geleiding naar de afgekoelde einden der buis weggevoerd, zoodat de temperatuursverhooging slechts gering kan zijn.

Door het verzetten van een stroomsleutel en een kraan kan men plotseling *A* en *B* van rol doen verwisselen, zoodat *A* verhit, *B* afgekoeld wordt; de donkere banden krimpen dan in, gaan over in scherpe *D*-lijnen, om vervolgens weer uit te zetten totdat zij, na

verloop van een paar minuten, de oorspronkelijke breedte hebben herkregen.

Fijn en scherp zijn intusschen de lijnen in het overgangsstadium alleen dan, wanneer de temperatuur van den oven zeer constant is. Daalt zij of stijgt zij, dan blijkt de minimale breedte niet zoo gering te wezen. In dat geval zijn er echter stellig stroomingen in de dampmassa voorhanden, die de dichtheidsverdeeling minder gelijkmatig doen zijn. Het ligt nu voor de hand, de straalbreking in zulke toevallige ongelijkmatigheden ook als de voornaamste oorzaak te beschouwen, waardoor bij gelijke temperatuur van A en B de natriumlijnen toch somtijds eenige verbreeding kunnen vertoonen.

Dat spectraallijnen een zekere breedte bezitten, schrijft men gewoonlijk toe 1°. aan beweging van de licht-uitzendende moleculen in de gezichtslijn en 2°. aan veranderingen in de trillingsperiode van de electronen bij de botsingen der moleculen. Wij hebben thans te maken met een derde oorzaak: anomale dispersie in de absorbeerende middenstof. De geheele reeks van verschijnselen, die onze buis met natriumdamp te zien gaf, strekt tot steun aan de meening, dat de laatstgenoemde oorzaak in den regel als verreweg de voornaamste moet worden beschouwd. Het zal blijken, dat deze gevolgtrekking niet alleen voor donkere maar ook voor heldere spectraallijnen geldt.

Wanneer men de spleet in het diaphragma P naar den kant van p' sterk verwijdt, dan heeft dit geen invloed op het spectrum zoolang A en B op de temperatuur hunner omgeving zijn. De D-lijnen vertoonen zich als in α, Pl. I. Brengt men echter A onder, B boven die temperatuur, dan verbreeden de donkere D-lijnen zich slechts naar den kant van de kleinere golflengten, terwijl aan den kant der grootere golflengten de lichtsterkte zelfs toeneemt, omdat nu ook anomaal gebogen stralen uit het lichtveld p' door de spleet Q het punt S kunnen bereiken (zie β, Pl. I). Het spectrum β gaat over in γ wanneer men het temperatuursverschil tusschen A en B van teeken doet omkeeren, of ook wanneer men, met behoud van het oorspronkelijke temperatuursverschil, de spleet in P naar den kant van p sterk verwijdt. Een kleine verschuiving van het geheele diaphragma P (uitgaande van den toestand waarin het zich bij de opname β bevond), zóó dat S juist in de schaduw komt, doet het spectrum δ verschijnen, dat den indruk maakt van een emissiespectrum van natrium met eenigszins verschoven lijnen, hoewel het blijkbaar uitsluitend te danken is aan stralen uit het veld p', die anomale dispersie in den damp hebben ondergaan.

Stellen wij ons thans wederom het diaphragma P voor met een

nauwe spleet, geplaatst op de optische as. (Meestal werd gebruik gemaakt van een stuk glas, beplakt met bladtin, waarin een spleet was gesneden). Het spectrum vertoont dan breede banden als er dichtheidsverval is tusschen A en B. Snijdt men naast de spleet een opening in het bladtin, dan wordt aan een groep stralen van bepaalde breekbaarheid (en dus ook van bepaalde golflengten) gelegenheid gegeven, door Q naar S te komen, en er ontstaat in den donkeren band een lichte plek, wier vorm wel afhankelijk is van den vorm der opening in het bladtin, doch in geenen deele daaraan gelijk. Heeft bijv. de opening in het diaphragma de gedaante van fig. 4, dan verkrijgt men het spectrum ε. Bij vermindering van het dichtheidsverval krimpt die figuur samen, ζ; doet men het dichtheidsverval nu van teeken omkeeren en aangroeien, dan schrijdt de verandering voort door de stadiën α (verval juist gelijk nul) en η naar θ.

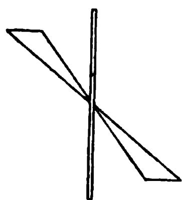


Fig. 4.

Het verband tusschen den vorm van de diaphragma-opening en dien van de lichte plekken in 't spectrum ware uit de gedaante der dispersiekromme gemakkelijk te voorspellen geweest. Houdt men de betrekking, die tusschen de twee figuren in een eenvoudig geval als het bovenstaande experimenteel gevonden is, voor oogen, dan is het niet moeilijk, voor iedere gewenschte lichtverdeeling in den dispersieband, den vorm van de daartoe noodige diaphragma-opening te construeeren. De bloem ι en haar tegenhanger $\varkappa$ vereischten het diaphragma, voorgesteld in fig. 5. Door omkeering van het verval gaat het beeld ι in $\varkappa$ over.

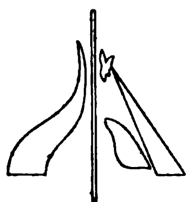


Fig. 5.

Zoo kan men dus ook verdubbelingen, omkeeringen, heldere of donkere vertakkingen van spectraallijnen geheel naar verkiezing in het aanzijn roepen, en zou men bijv. alle verschijnselen die op dit gebied in spectra van zonnevlekken, fakkels of protuberanties zijn waargenomen, getrouw kunnen nabootsen. Op plaat II zijn nog een aantal willekeurige lichtverdeelingen samengebracht. Zij zijn alle ontstaan in natriumdamp van gemiddeld 390°; α' is weer het spectrum bij gelijke temperatuur van de buizen A en B. In ν ziet men op den donkeren dispersieband D_2 een heldere dubbellijn, die doet denken aan het spectrum der calciumflocculi van Hale. D_1 vertoont in hetzelfde negatief eveneens een fijne dubbellijn, maar die is in de reproductie niet meer te zien. De spectra φ, χ, ψ bootsen het ontstaan van een zonnevlek- en protuberantiespectrum na; φ namelijk verbeeldt het spectrum van den rustigen zonnerand bij radiaal ge-

plaatste spleet; in χ verschijnt een protuberantie en een vlek met omkeeringsverschijnselen; ψ vertoont dit alles in versterkte mate. Doet men nu het dichtheidsverval van teeken wisselen, dan krimpt eerst het beeld weer samen tot φ, om zich vervolgens uit te zetten tot ω, in zekeren zin het spiegelbeeld van ψ. Van het merkwaardig schouwspel dezer geleidelijke, geheel regelbare veranderingen geven de fotografieën slechts een gebrekkigen indruk.

De betrekking tusschen straalkromming en dichtheidsverval.

De vraag dringt zich op, of het nu wel *waarschijnlijk* is, dat omstandigheden als die, welke bij onze proeven verwezenlijkt waren, zich ook voordoen hetzij in de natnur, hetzij bij spectroscopische onderzoekingen, met geheel andere bedoelingen ondernomen.

Merken wij in de eerste plaats op, dat zonderling gevormde diaphragma-openingen niet absoluut noodig zijn om verschijnselen als de boven beschrevene te doen ontstaan. Had onze lichtbron een standvastige, bijv. cirkelvormige gedaante gehad; waren daarentegen richting en grootte van het dichtheidsverval in onze buis niet zoo gelijkmatig geweest, doch zeer verschillend op verschillende plaatsen van het door de lens F afgebeelde veld; dan zouden de D-lijnen eveneens allerlei uitwassen hebben vertoond, nu bepaald door de configuratie der dichtheidsverdeeling.

In de tweede plaats willen wij trachten, ons eenig denkbeeld aangaande de quantitatieve verhoudingen te vormen.

De kromtestraal ρ van de baan der meest afgeweken lichtsoorten, die op onze fotografieën voorkomen, is gemakkelijk te schatten uit den afstand d van het diaphragma P tot het midden van den oven, den afstand σ van de verst verwijderde diaphragma-openingen tot de optische as, en de lengte l van de ruimte waarin straalkromming optreedt. Immers

$$\rho : l = d : \sigma.$$

Voor $\sigma = 1$ cm., $d = 110$ cm., $l = 27$ cm. geeft dit $\rho = 3000$ cm. De gemiddelde dichtheid Δ van den natriumdamp was daarbij ongeveer $\frac{1}{1000}$ van de dichtheid der dampkringslucht.

Zoeken wij, hoe ρ afhangt van het dichtheidsverval.

Steeds is:

$$\rho = \frac{n}{n'}, \qquad (1)$$

wanneer n den plaatselijken brekingsindex van de middenstof voor

de beschouwde lichtsoort voorstelt, en $n' = \frac{dn}{ds}$ de verandering is van dien index per cm. in de richting naar het krommingsmiddelpunt. Bij benadering geldt, voor een bepaalde lichtsoort,

$$\frac{n-1}{\Delta} = \text{constante} = R$$

$$n = R\Delta + 1$$

$$n' = \frac{dn}{ds} = R\frac{d\Delta}{ds}$$

Hieruit volgt:

$$\varrho = \frac{R\Delta + 1}{R\frac{d\Delta}{ds}};$$

maar omdat bij ijle gassen n weinig van de eenheid verschilt, ook zelfs voor de door ons beschouwde anomaal gedispergeerde lichtsoorten, mag men $R\Delta$ tegenover 1 verwaarloozen en dus schrijven

$$\varrho = \frac{1}{R\frac{d\Delta}{ds}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Voor elke lichtsoort is derhalve ϱ omgekeerd evenredig met het verval der dichtheid van den damp in de richting, loodrecht op die der voortplanting.

Een schatting van de grootte van het dichtheidsverval, dat bij onze proeven tusschen A en B ontstond, kan langs twee wegen verkregen worden. Men kan die namelijk afleiden uit het opgewekte temperatuursverschil, of wel uit de formule (2).

Het temperatuursverschil tusschen A en B ware thermo-electrisch vrij gemakkelijk te bepalen geweest; ik had echter tot nu toe geen gelegenheid, de inrichting daarvoor aan te brengen. Trouwens, het verband tusschen de dichtheidsverdeeling in de doorstraalde ruimte en de temperaturen van A en B kan ook niet zoo heel eenvoudig zijn, daar wij niet met twee evenwijdige platte vlakken te doen hebben, maar met buizen waaraan bovendien een aantal droppels vloeibaar natrium hangen.

De tweede weg levert direct een gemiddelde waarde van $\frac{d\Delta}{ds}$ voor de doorstraalde ruimte. Zij eischt de kennis van $R = \frac{n-1}{\Delta}$ voor een stralensoort, voor welke in onze proeven ook ϱ bepaald is.

Nu geeft Wood (Phil. Mag. [6], 8, p. 319) een tabel voor de

waarden van n voor lichtsoorten uit de naaste omgeving der D-lijnen. Deze opgaven hebben intusschen betrekking op verzadigden natriumdamp van 644°; maar wij kunnen er de waarden van n voor damp van 390° uit afleiden met behulp van de tabel, die hij l.c. op blz. 317 geeft.

Immers bij verhitting van 389° tot 508° wordt de brekende kracht n—1 van den damp (gemeten door het aantal passeerende interferentie-franjes van heliumlicht $\lambda = 5875$) $\frac{98}{9} = 11$ maal grooter, bij verdere verhitting van 508° tot 644° wederom $\frac{50}{4} = 12{,}5$ maal grooter (nu blijkens interferentiemeting met licht van de kwiklijn $\lambda = 5461$), dus van 390° tot 644° neemt de brekende kracht toe in reden van 1 tot $11 \times 12{,}5 = 137$.

Daar nu voor stralen, op 0,4 Angstr. eenh. van de D-lijnen gelegen[1]), blijkens Wood's tabel op p. 319, als gemiddelde van 3 aldaar gegeven waarden $n-1 = \pm\, 0.36$ is, zou men bij natriumdamp van 390° voor dezelfde lichtsoort moeten hebben

$$n-1 = \frac{0.36}{137} = 0.0026.$$

De dichtheid Δ bij 390° is volgens Jewett 0.0000016, dus

$$R = \frac{n-1}{\Delta} = \frac{0.0026}{0.0000016} = 1600.$$

Uit formule (2) volgt dan

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{R\varrho} = \frac{1}{1600 \times 3000} = 0{,}0000002.$$

Dispersiebanden in de spectra van aardsche lichtbronnen.

Het is zeer waarschijnlijk, dat bij het verdampen van metalen in den electrischen lichtboog nabij de koolspitsen herhaaldelijk waarden van het dichtheidsverval worden aangetroffen, meer dan duizend malen grooter dan die van het zwakke verval in onze buis met ijlen natriumdamp[2]).

[1]) Het spectrum ε op onze plaat doet zien, dat de uiteinden der pieken vrij wel beantwoorden aan licht van de bedoelde golflengten; immers zij naderen de D-lijnen tot op een afstand, die stellig niet meer dan $\frac{1}{15}$ van den onderlingen afstand der D-lijnen bedraagt. Voor deze lichtsoorten was de diaphragma-opening 1 c.m. van de optische as verwijderd.

[2]) Stelt men bijv. de dampdichtheid van het metaal in den krater, waar het kookt, op 0,001, de dampdichtheid buiten den boog, 1 cm. van den krater verwijderd, op 0,00001, dan heeft men reeds een gemiddeld verval dat 5000 maal zoo groot is als het verval dat bij onze proeven gebezigd werd.

De kromtestraal zal in die gevallen ook meer dan duizend malen kleiner zijn dan 30 meter, en dus een paar centimeters of zelfs minder kunnen bedragen. Een korte weg door de dampmassa is dan reeds voldoende om sommige lichtstralen zeer merkbaar van richting te doen veranderen.

Wordt nu van de koolspitsen een beeld ontworpen op de spleet van een spectroscoop, dan is dit een *zuiver* beeld alleen voor zoover het gevormd wordt door stralen die in de lichtboog weinig gebroken zijn, maar de stralen die anomale dispersie ondergaan, werken daartoe niet mee. Licht van laatstgenoemden aard, uit den krater afkomstig, kan ontbreken in het beeld van den krater, en daarentegen de spleet binnendringen tusschen de beelden der koolspitsen in. Zoo moet dus, bij de gewone spectroscopische waarnemingen, niet alleen verbreeding van absorptie-lijnen, maar evenzeer verbreeding van emissielijnen vaak voor een belangrijk deel aan anomale dispersie worden toegeschreven.

Houdt men dit in het oog, dan zullen vele tot nu toe raadselachtige verschijnselen een ongedwongen verklaring vinden. Zoo bijv. het feit dat LIVEING en DEWAR [1]) de natriumlijnen sterk verbreed zagen telkens wanneer, na het bijbrengen van nieuw materiaal, heftige dampontwikkeling plaats vond, doch dat de lijnen smaller werden als de massa tot rust kwam, hoewel daarbij de dampdichtheid niet verminderde. Werd door het inpersen van stikstof in de dampruimte de drukking geleidelijk verhoogd, dan bleven de lijnen scherp; maar werd plotseling de drukking opgeheven, dan verbreedden zich de lijnen. Dit alles wordt duidelijk zoodra men in de lijnen dispersiebanden heeft herkend, die breed moeten zijn wanneer de dichtheid van den absorbeerenden damp ongelijkmatig is, doch smal, zelfs bij dichten damp, wanneer deze slechts gelijkmatig in de ruimte verdeeld is.

Een tweede voorbeeld. Volgens de onderzoekingen van KAYSER en RUNGE zijn de lijnen, behoorende tot de tweede nevenserie in de spectra van magnesium, calcium, cadmium, zink, kwik, steeds wazig uitloopend naar den kant van het rood en scherp begrensd naar violet, terwijl lijnen, behoorende tot de eerste nevenserie of tot andere seriën, somtijds duidelijk meer verbreed zijn naar den violetten kant. Met betrekking tot het magnesiumspectrum zeggen zij: [2]) „Auffallend ist bei mehreren Linien, die wir nach Roth verbreitert gefunden haben, dass sie im Rowland'schen Atlas ganz scharf sind, und dann

1) LIVEING and DEWAR, On the reversal of the lines of metallic vapours, Proc. Roy. Soc. 27, p. 132—136: 28, p. 367—372 (1878—1879).

2) KAYSER und RUNGE, Über die Spektren der Elemente, IV, S. 13.

stets etwas kleinere Wellenlänge haben. So haben wir 4703,33, ROWLAND 4703,17; wir 5528,75, ROWLAND 5528,62. Unschärfe nach Roth verleitet ja leicht der Linie grössere Wellenlänge zuzuschreiben; so gross kann aber der Fehler nicht sein, denn die ROWLAND'sche Ablesung liegt ganz ausserhalb des Randes unserer Linie. Wir wissen daher nicht, woher diese Differenz rührt." KAYSER heeft later [1]) een verklaring voor dit feit gegeven, berustende op een combinatie van omkeering met asymmetrische verbreeding; maar men komt, naar het mij toeschijnt, tot een meer waarschijnlijke oplossing door de verbreede serielijnen als dispersiebanden op te vatten.

Nemen wij namelijk aan dat van de sterkst lichtende positieve koolspits naar het midden van de lichtboog de dichtheid van de deeltjes, aan welke de tweede nevenserie eigen is, afneemt; dan zullen stralen, uit den krater komende, en wier golflengte een weinig grooter is dan die der bedoelde serielijnen, krom zijn en hun concaven kant naar de koolspits wenden. Hun oorsprong wordt ten onrechte gedacht in het verlengde van hun eindrichting, dus zij *schijnen* te komen uit den boog en men meent emissielicht van den damp te zien van verschillende golflengten, die alle grooter zijn dan de juiste golflengten der serielijnen. De waargenomen, verplaatste lijnen der tweede nevenserie zijn dus vergelijkbaar met de schijnbare emissielijnen van het spectrum *d* op onze plaat I.

Het is alsof, in het aangehaalde geval, het licht dezer serielijnen *uitsluitend* aan anomale dispersie was toe te schrijven. Vermoedelijk echter zal in de meeste gevallen de eigenlijke emissie wèl in merkbare mate bijdragen tot de vorming der lijn; de scherpe kant der lijn moet zich dan precies ter plaatse van de kenmerkende golflengte vertoonen.

Hoe is het nu echter te verklaren dat lijnen van andere seriën onscherp zijn naar den tegenovergestelden kant? Ook dit verschijnsel kunnen wij als een gevolg van anomale dispersie uitleggen, indien wij aannemen, dat van de emissiecentra dier andere seriën de optische dichtheid *toeneemt* wanneer wij ons van de positieve koolspits verwijderen. In dat geval toch zouden de uit den krater afkomstige lichtstralen, die hun concaven kant naar de koolspits wenden en dus uit den boog schijnen te komen, kleinere golflengten bezitten dan de serielijnen, d.w.z. de serielijnen vertoonen zich verbreed naar violet. De gemaakte onderstelling is niet onwaarschijnlijk. Immers de positieve en de negatieve atoom-ionen, die volgens de theorie van STARK in den lichtboog ontstaan door den stoot van negatieve electron-

[1]) KAYSER. Handbuch der Spektroskopie II, S. 366,

ionen, bewegen zich onder den invloed der electrische spanning in tegengestelde richtingen; het dichtheidsverval zal dus voor de beide soorten ook van teeken verschillen. Seriën, wier lijnen naar rood onscherp zijn en seriën, wier lijnen naar violet uitvloeien, zouden dan volgens deze beschouwing toekomen aan atoom-ionen van tegengesteld teeken — een conclusie, die in elk geval waard is, aan nader onderzoek onderworpen te worden.

De gegeven voorbeelden mogen voldoende zijn om aan te toonen dat het noodig is, stelselmatig te onderzoeken in hoeverre de reeds bekende spectraalverschijnselen door anomale dispersie veroorzaakt kunnen zijn. Een aantal gevallen waarin de steeds veronachtzaamde straalkromming ongetwijfeld den toestand beheerscht heeft, vindt men in het handboek van KAYSER, II, p. 292—298, 304, 306, 348—351, 359—361, 366.

Dispersiebanden in de spectra van hemellichamen.

Daar nagenoeg elke bijzonderheid in het uiterlijk van spectraallijnen door anomale dispersie kan worden verklaard, mits men slechts het bestaan van de vereischte dichtheidsverdeelingen mag aannemen, moeten wij bij toepassing op astrophysische verschijnselen ons afvragen: kunnen de waarden van het dichtheidsverval voor de verschillende absorbeerende gassen op de hemellichamen werkelijk van dien aard zijn, dat de lichtstralen daarin voldoende gekromd worden om een zóó duidelijk merkbaren invloed op de lichtverdeeling in het spectrum uit te oefenen?

In vroegere mededeelingen heb ik aangetoond [1]), dat men zich bijv. de zon kan voorstellen als een gasvormig lichaam, waarin de bestanddeelen innig gemengd zijn, want dat alle lichtverschijnselen die den indruk geven alsof de stoffen op de zon gescheiden voorkomen, in zulk een gasmengsel kunnen worden teweeg gebracht door anomale dispersie. Thans willen wij trachten te bewijzen dat dit niet alleen het geval zijn *kan,* maar dat het, met het oog op de meest waarschijnlijke dichtheidsverdeeling, zoo zijn *moet.*

Stellen wij de dichtheid van onze atmosfeer aan de oppervlakte der aarde gelijk 0.001293. Op 1050 cm. hoogte is zij $\frac{1}{760}$ van dit bedrag kleiner, dus het vertikale dichtheidsverval bedraagt

$$\frac{0.001293}{1050 \times 760} = 16 \times 10^{-10}.$$

[1]) Versl. Natuurk. Afd. VIII, p. 510—523; XI, p. 126—135, 650—663; XII, p. 300—334; XIII, p. 26—32, 138—145, 359—363.

Het horizontale verval in de omgeving van depressies is veel geringer; zelfs bij stormen is het nog maar ongeveer $\frac{1}{1000}$ van de genoemde waarde [1]). Over kleine afstanden kan natuurlijk het dichtheidsverval in de atmosfeer wel eens grooter zijn, door plaatselijke verwarming of andere oorzaken.

Dergelijke overwegingen, mutatis mutandis toegepast op de zon, kunnen ons echter niet tot een betrouwbare schatting leiden van de daar voorkomende dichtheidsgradiënten. Een voorname oorzaak, waardoor dit voorshands onmogelijk is, ligt in onze onbekendheid met de grootte van den invloed, dien de *stralingsdruk* uitoefent op de stofverdeeling in de zon. Was er geen stralingsdruk, dan zou men mogen vooropstellen (zooals steeds geschiedt) dat ter hoogte van de fotosfeer de zwaartekracht 28 maal zoo groot was als op aarde; maar zij wordt tegengewerkt door den stralingsdruk in een mate, afhankelijk van de grootte der deeltjes; zij kan daardoor zelfs voor sommige deeltjes geheel opgeheven worden. Het radiale dichtheidsverval moet dus in ieder geval veel kleiner zijn dan men, op grond van graviteitswerking alléén, geneigd mocht zijn te berekenen.

Wij bezitten intusschen een ander middel om het radiale dichtheidsverval ter plaatse van de fotosfeer, althans wat orde van grootte betreft, te bepalen. Volgens de theorie van A. SCHMIDT is de zoogenaamde fotosfeer niet anders dan een kritische sfeer, wier straal gelijk is aan den kromtestraal van lichtstralen, die in een punt van haar oppervlakte horizontaal loopen. Die kromtestraal is dus $\varrho = 7 \times 10^{10}$ c.m., welke waarde wij kunnen invoeren in de uitdrukking voor het dichtheidsverval:

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{R\varrho}$$

Het refractie-aequivalent R voor stralen, die geen anomale dispersie ondergaan, is nu wel is waar uiteenloopend bij verschillende stoffen; maar in een benaderingsrekening mogen wij wel stellen $R = 0{,}5$. Dan wordt ter hoogte van de kritische sfeer:

$$\frac{d\Delta}{ds} = \frac{1}{0.5 \times 7 \times 10^{10}} = 0.29 \times 10^{-10},$$

(d. i. 50 maal kleiner dan het dichtheidsverval in onzen dampkring). Alle argumenten, die SCHMIDT's verklaring van den zonnerand steunen, spreken tevens ten gunste van deze schatting van het radiale dichtheidsverval in het gasmengsel.

Beschouwen wij thans stralen, die wèl anomale dispersie ondergaan. Opdat bijv. licht, behoorende tot de naaste omgeving der

[1]) ARRHENIUS. Lehrbuch der kosmischen Physik, S. 676.

natriumlijnen, zal schijnen te komen van punten, die enkele secunden boogs buiten den zonnerand liggen, behoeft de kromtestraal van zulke anomaal gebroken stralen slechts weinig kleiner te zijn dan 7×10^{10} c.m. Stellen wij bijv.

$$\varrho' = 6 \times 10^{10} \text{ c.m.}$$

Nemen wij verder aan, dat van de beschouwde lichtsoort de golflengte 0.4 Ångstr. eenheden grooter is dan die van D_1, dan is daarvoor, zooals men uit de waarnemingen van WOOD en van JEWETT kan afleiden (zie blz. 327), $R' = 1600$; voor het dichtheidsverval van den natriumdamp wordt dus gevonden:

$$\frac{d\Delta'}{ds} = \frac{1}{R'\varrho'} = \frac{1}{1600 \times 6 \times 10^{10}} = 0.0001 \times 10^{-10},$$

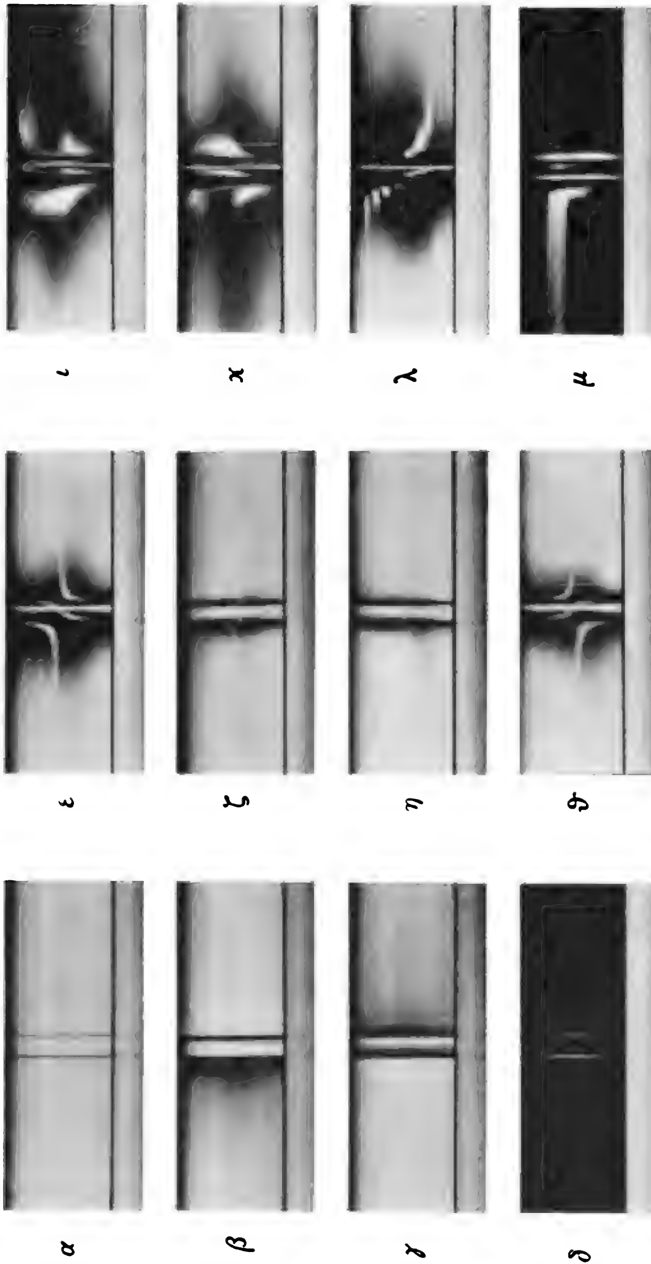
een grootheid, 2900 maal kleiner dan het dichtheidsverval van het gasmengsel.

Indien dus slechts $\frac{1}{3000}$ van het gasmengsel uit natriumdamp bestaat, zal reeds ten gevolge van het radiale dichtheidsverval de kritische sfeer omgeven schijnen door een „chromosfeer" van licht, dat bedriegelijk veel op natriumlicht gelijkt. De bedoelde lichtsoort heeft, om zoo te zeggen, zijn eigen kritische sfeer, die grooter is dan de kritische sfeer van het niet anomaal gebroken licht. Was het gehalte aan natrium grooter, dan zou de „natriumchromosfeer" dikker wezen.

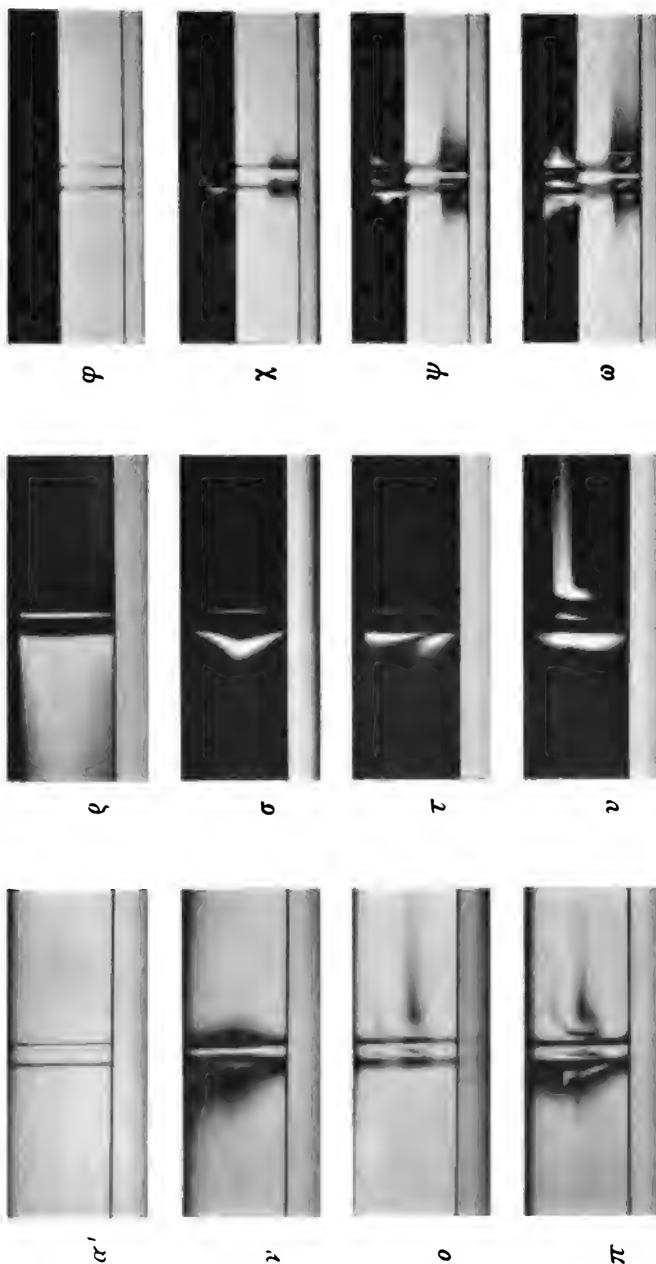
Uit de grootte der chromosfeer- en flashsikkels, die bij een totale zonsverduistering worden waargenomen met de prismacamera, is men gewoon te besluiten tot de *hoogte*, waarop de verschillende dampen in de zonne-atmosfeer voorkomen. Dit is volgens onze beschouwingen een onjuiste gevolgtrekking. Men zal uit die waarnemingen daarentegen iets kunnen afleiden aangaande de *verhouding waarin deze stoffen in het gasmengsel vertegenwoordigd zijn*, wanneer men namelijk eerst in het laboratorium de dispersiekrommen der metaaldampen bij bekende dichtheden onderzocht zal hebben.

Tot nu toe spraken wij alleen van het normale, radiale dichtheidsverval. Door strooming en werveling ontstaan echter onregelmatigheden in de dichtheidsverdeeling met gradiënten van verschillende richting en grootte. En daar op de zon de resultante van zwaartekracht en stralingsdruk betrekkelijk klein is, kunnen aldaar, eerder dan op aarde, de onregelmatige dichtheidsgradiënten, wat hun grootte betreft, den radialen gradiënt nabijkomen of zelfs hier en daar overtreffen.

De straalkromming in die ongelijkmatigheden moet grillig gevormde natrium-protuberanties doen verschijnen, wier grootte mede afhan-



Heliotypie, Van Leer, Amsterdam.



Heliotypie, Van Leer, Amsterdam.

kelijk is van het gehalte aan natriumdamp in het gasmengsel.

Zoo bewijzen de groote waterstof- en calciumprotuberanties, dat er betrekkelijk veel waterstof en calciumdamp in de buitenste deelen der zon voorkomt; maar wellicht zou zelfs een gehalte van enkele procenten reeds voldoende zijn om van de verschijnselen rekenschap te geven. [1])

Als wij terecht hebben ondersteld dat niet-radiaal gerichte dichtheids-gradiënten in de zon veelvuldig voorkomen, en aldaar den algemeenen radialen gradiënt veel sterker storen dan zulks op aarde het geval is, moeten niet alleen stralen uit het randgebied, maar evenzeer stralen uit de overige deelen der zonneschijf merkbaar van den rechten weg afwijken. In hoofdzaak betreft dit natuurlijk de lichtsoorten die anomale dispersie ondergaan. *Elke absorptielijn van het zonnespectrum moet dus gehuld zijn in een dispersieband.*

Wel is waar vertoonen zich absorptielijnen van elementen, die slechts in uiterst verdunden toestand in het gasmengsel voorkomen, als nagenoeg scherpe lijnen, omdat voor die stoffen alle dichtheidsgradiënten veel kleiner zijn dan voor hoofdbestanddeelen, en dus de straalkromming van licht uit de omgeving dezer lijnen onmerkbaar wordt. Ook kunnen van elementen die wèl sterk vertegenwoordigd zijn, sommige lijnen zich toch scherp vertoonen, omdat niet alle lijnen van eenzelfde element, bij gegeven dichtheid, in gelijke mate anomale dispersie veroorzaken. Misschien zelfs zijn er absorptielijnen die onder geen omstandigheden tot dat verschijnsel aanleiding geven — hetgeen trouwens uit het oogpunt der lichttheorie minder waarschijnlijk mag worden geacht.

Hoe dit ook zij, de genoemde beperkingen brengen geen wijziging in de hoofdconclusie: dat onze blik op het zonnespectrum veranderd is. Wij zijn genoodzaakt, in de Fraunhofersche lijnen niet uitsluitend, met Kirchhoff, absorptielijnen, maar hoofdzakelijk dispersiebanden (of dispersielijnen) te zien. En dat ook op de lichtverdeeling in de sterrespectra de straalbreking een overwegenden invloed heeft, kan evenmin betwijfeld worden.

Wij moeten ons gewennen aan het denkbeeld dat in de nabijheid der hemellichamen de lichtstralen in het algemeen krom zijn, en dat dientengevolge in de gansche hemelruimte *ongelijkmatige stralingsvelden* [2]), verschillend van bouw voor de verschillende lichtsoorten, elkander doordringen.

[1]) Dit resultaat is vereenigbaar met een hypothese van Schmidt (Physikal. Zeitschr. 4, S. 282 und 341), volgens welke het hoofdbestanddeel van de zonne atmosfeer een zeer licht, nog onbekend gas zou zijn.

[2]) „Das ungleichmässige Strahlungsfeld und die Dispersionsbanden." Physikal. Zeitschr. 6, S. 239—248 (1905).

Scheikunde. — De heer BAKHUIS ROOZEBOOM doet eene mededeeling over: *„Het gedrag der halogenen tegenover elkander.”*

Hield de phasenleer in hare eerste periode zich meer bijzonder bezig met de beantwoording der vraag, of twee of meer stoffen in vasten toestand aanleiding geven tot chemische verbindingen of mengkristallen of wel onveranderd naast elkaar voorkomen, in den lateren tijd is zij begonnen uit de gedaante der smeltlijnen van de vaste mengsels gevolgtrekkingen af te leiden zoowel voor de natuur dier vaste als der vloeibare mengsels waarin zij overgaan, namelijk of en in hoeverre daarin ook verbindingen voorkomen.

Eveneens is dezelfde vraag te beantwoorden ten opzichte van vloeistof en damp uit de evenwichtslijnen voor die beide phasen, d. i. kooklijnen of dampdruklijnen.

Nu de 3 stelsels der meest bekende halogenen onderzocht zijn, laat zich hun onderling gedrag overzien.

Ten aanzien van het chloor en iodium was door STORTENBEKER reeds in 1888 bewezen dat geen andere verbindingen in vasten toestand voorkomen dan ICl_3 en ICl. Ook maakte hij reeds waarschijnlijk dat ICl bij smelting voor een zeer groot deel zonder dissociatie vloeibaar wordt, terwijl daarentegen ICl_3 bij smelting bijna geheel dissocieert in $ICl + Cl_2$.

Mej. KARSTEN vulde dit onderzoek nu aan door de bepaling der kooklijnen. Hieruit bleek dat de vloeistof- en de damplijn in de nabijheid der samenstelling ICl zoo uiterst dicht elkaar naderen, [1]) dat daaruit besloten moet worden, dat eveneens in den damp de dissociatie van ICl uiterst gering is, terwijl reeds bekend was dat die bij ICl_3 zeer groot is.

Uit het onderzoek van MEERUM TERWOGT in 1904 [2]) is nu verder gebleken dat Bromium en Jodium slecht ééne verbinding BrI vormen, welke in vasten toestand zoowel met Br als I mengkristallen vormt, en wegens de gedaante der dampdruk- en kooklijnen belangrijk in vloeistof- en damptoestand gedissocieerd is.

Eindelijk bleek nu uit een onderzoek van Mej. KARSTEN dat Chloor en Bromium enkel mengkristallen leveren bij afkoeling en wel eene aaneengesloten reeks, terwijl in overeenstemming hiermee uit de gedaante der kooklijn geenerlei aanwijzing voor het bestaan van verbinding in vloeistof of damp kon worden afgeleid.

Wij komen dus tot het besluit, dat ICl_3 eene zwakke en ICl eene

[1]) Nog dichter dan schematisch geteekend is in Fig. 7 bl. 505 dezer Verslagen Deel XIV.

[2]) Deze Verslagen XII. 361.

sterke verbinding is, IBr eene zwakke verbinding en dat tusschen Cl en Br geene verbinding bestaat. Het verbindingsstreven is dus het grootst bij de verst verwijderde elementen, en grooter bij Br+I dan bij Br+Cl.

Uit de onderzoekingen van MOISSAN en andere volgt, dat het Fluor de zelfs in damptoestand bestendige verbinding IF_5 levert, met Bromium BrF_3, met Chloor geene. Ook dit is met bovenstaand resultaat in harmonie.

Daar evenwel de verbindingen met Fluor niet van uit het standpunt der phasenleer bestudeerd zijn, bestaat hier nog geen voldoende zekerheid over hun aantal, noch over de bestendigheid van alle.

Graadmeting. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN geeft een kort verslag van het behandelde op de te Budapest gehouden vergadering van de Internationale Graadmetingscommissie.

Anatomie. — De Heer BOLK biedt eene mededeeling aan van den Heer A. J. P. V. D. BROEK: *„Over de verhouding der geslachtsgangen tot de geslachtsklier bij buideldieren.”*

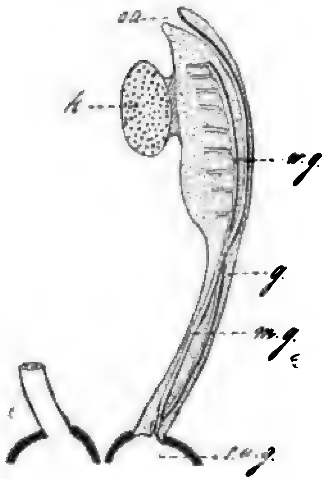
(Mede aangeboden door den Heer C. WINKLER).

In de volgende mededeeling zullen in het kort de veranderingen worden beschreven, die de kraniale einden der geslachtsgangen bij buideldieren gedurende de ontwikkeling ondergaan en hunne verhoudingen ten opzichte der geslachtsklier. In meer dan één opzicht wijkt het ontogenetische ontwikkelingsproces in dit gebied van datgene af hetwelk men bij andere zoogdieren waarneemt.

Het is voornamelijk een reeks van buideljongen van Dasyurus viverrinus in opeenvolgende ontwikkelingsstadiën waaraan de waarnemingen zijn ontleend. De preparaten van andere onderzochte vormen (Didelphys, Sminthopsis crassicaudata, Phascologale pincillata, Trichosurus vulpecula, Macropus ruficollis) stemmen echter volkomen overeen met de verhoudingen, bij Dasyurus aangetroffen.

Bij onze beschrijving gaan wij uit van een stadium, schematisch in Figuur 1 weergegeven, dat nog voor beide geslachten geldt. (Dasyurus, Didelphys, Macropus). De geslachtsklier (Figuur 1 *k*) ligt aan de mediale zijde der oernier en is met deze door een smallere weefselstrook ('t latere mesorchium of mesovarium) (Fig. 1 *m*) verbonden. De geslachtsgangen zijn in hunne geheele lengte ontwikkeld. De Wolff'sche gang (w. g.) verbindt zich in de oernier met transversale oernierkanaaltjes, doch bezit nog geen verbinding, op welke wijze ook, met de geslachtsklieren. De Müller'sche gang (Figuur 1 m. g.) begint met een ostium abdominale (o. a.) en ver-

loopt, voor zoover het 't gebied van de oernier geldt, aan de laterale zijde van den Wolff'schen gang.



Verhouding van geslachtsgangen en geslachtsklier in een indifferent stadium.

k. Kiemklier.
o.a. Ostium abdominale tubae.
g. Geslachtsstreng.
w.g. Wolff'sche gang.
m.g. Müller'sche gang.
s.u.g. Sinus uro-genitalis.

Fig. 1.

Vervolgen wij eerst de omvormingen die in het vrouwelijk geslacht optreden. De eerste verandering is eene reductie in het kraniale gedeelte van de oernier. Hierbij is niets waar te nemen dat op eene omvorming van oernierkanaaltjes door vernieuwing van het epitheel wijst. De Wolff'sche gang groeit intusschen kraniaal uit, blijft dicht bij den Müller'schen gang gelegen en begeeft zich dan, in een boogvormig verloop door het mesovarium heengaande, naar het ovarium, dringt in hetzelve in en eindigt er blind. (Figuur 2 w. g.). De toestand, die hierdoor ontstaat, heb ik in Figuur 2 weergegeven. (Dasyurus 40 m. m.).

Thans eerst begint de reductie van den Wolff'schen gang. Deze geschiedt zoodanig, dat het middengedeelte verdwijnt; zoowel aan het kraniale als aan het kaudale einde blijft een rest van den gang bestaan.

Het kraniale rudiment van den Wolff'schen gang wordt dan gevonden als een aan beide einden blind eindigend kanaaltje, dat in het ovarium begint en tot in het mesovarium te vervolgen is. Fig. 3 geeft dit kanaaltje, zooals ik het bij meerdere dieren vond, (Dasyurus, Sminthopsis) weer. (Fig. 3 w. g.)

In hoeverre deze rest van den Wolff'schen gang verband heeft met de kanaaltjes, die ik vroeger beschreef en afbeeldde in 't mesovarium van een volwassen Petrogale penicillata, blijve hier buiten bespreking[1]).

Bij het mannelijk geslacht vertoont de Wolff'sche gang in de

[1]) v. d. Broek, Untersuchungen über die weiblichen Geschlechtsorgane der Beuteltiere. Petrus Camper III.

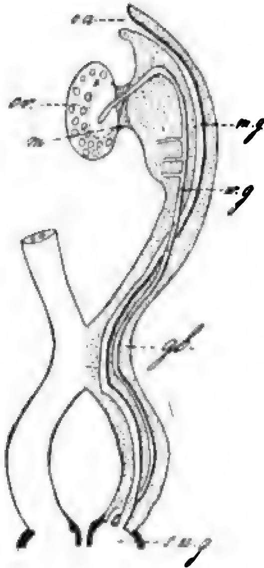


Fig. 2.

Verhouding van de geslachtsgangen tot het ovarium.

ov. Ovarium.
m. Mesovarium.
o. a. Ostium abdominale tubae.
m. g. Müller'sche gang.
w. g. Wolff'sche gang.
gb. Dwarsverbinding der beide geslachtsstrengen.
s. u. g. Sinus uro-genitalis.

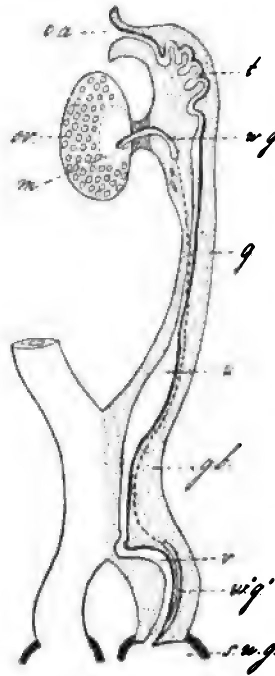


Fig. 3.

Verhouding van de geslachtsgangen tot het ovarium.

ov. Ovarium.
m. Mesovarium.
o. a. Ostium abdominale tubae.
t. Tuba Falloppii.
u. Uterus.
v. Vagina.
w.g.w'.g'. Resten v. d. Wolff'schen gang.
g. Geslachtsstreng.
gb. Dwarsverbinding der beide geslachtsstrengen.
s. u. g. Sinus uro-genitalis.

ontwikkeling van zijn kraniale einde, zeer veel overeenstemming met dien bij het vrouwelijk geslacht. (Fig. 4 en 5).

Tijdens de reductie van de oernier groeit 't kraniale einde van den Wolff'schen gang uit en verloopt boogvormig door het mesorchium in den testikel. (Fig. 4 w. g.). Hier komt op éene enkele plaats (Dasyurus) eene verbinding tot stand met de, zich nog in het stadium van celstrengen bevindende, toekomstige zaadbuisjes.

De oernierkanaaltjes verdwijnen bijna geheel en al, zoodat op een bepaald stadium (Dasyurus viverrinus 53 m.m.) de sterk in de lengte gegroeide Wolff'sche gang gekronkeld door de weefselmassa ver-

loopt, die wij als epididymis moeten beschouwen, zonder dat van kanaaltjes in den vorm der coni vasculosi, iets aanwezig is.

Intusschen is de Müller'sche gang grootendeels gereduceerd. Het

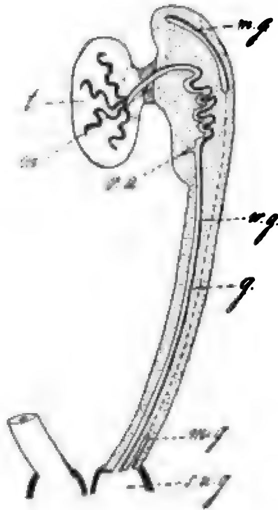


Fig. 4.
Verhouding van de geslachtsgangen tot den testikel.

t. Testikel.
m. Mesorchium.
m.g. Rest van den Müller'schen gang.
w.g. Wolff'sche gang (vas deferens).
g. Geslachtsstreng.
s.u.g. Sinus uro-genitalis.
v.a. Vas aberrans.

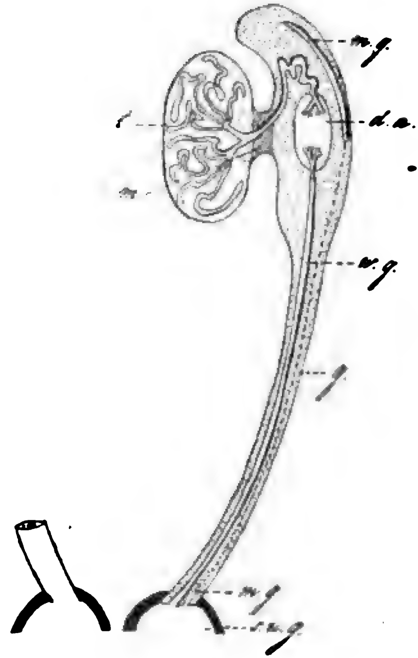


Fig. 5.
Verhouding van de geslachtsgangen tot den testikel

t. Testikel.
m. Mesorchium.
m.g. Rest van den Müller'schen gang.
d.a. Kliergedeelte in den epididymis.
w.g. Wolff'sche gang (vas deferens).
g. Geslachtsstreng.
s u.g. Sinus uro-genitalis.

kraniale einde is blijven bestaan als een al of niet met een ostium abdominale aanvangende gangrest, die in 't epididymisweefsel kaudaal een blind einde heeft.

De hierop volgende veranderingen bestaan daarin, dat de zaadbuisjes een lumen verkrijgen en zich op één of twee (Didelphys) plaatsen verbinden met den in den testikel ingegroeiden Wolff'schen gang. In den epididymis is intusschen in het verloop van den Wolff'schen gang (Vas epididymidis) eene massa van celstrengen opgetreden (Fig. 5 d. a.), waaruit zich de kanaaltjes der epididymis zullen ontwikkelen.

Van den Müller'schen gang is een rest gebleven in het weefsel

van den epidydimis, resten van dezen gang in den vorm van hydatiden heb ik niet waargenomen. Ook in de literatuur vind ik ze niet vermeld.

Bij de geslachtsklier van het volwassen dier vond ik de verbinding van testikel en epididymis gevormd door een mesorchium waarin blijkbaar slechts een enkel kanaal de communicatie tusschen de beide deelen vormde. (Didelphys Halmaturus). Waarschijnlijk geldt ook hetzelfde voor Hypsiprymnus waar, volgens DISSELHORST [1]), de epididymis eene spoelvormige aanzwelling in het verloop van het vas deferens is.

Omtrent den mikroskopischen bouw van testikel en epididymis vind ik bij DISSELHORST de mededeeling dat deze overeenkomt met die van andere dieren. Waar hierop oogenblikkelijk volgt: „die Spermatogenese war in vollem Gange", schijnt het mij dat deze mededeeling meer betrekking heeft op den bouw der kanaalepitheliën dan wel op den aard der verbinding van testikel en epididymis.

Eene vergelijking met wat wij bij andere zoogdieren aantreffen, leert ons het volgende.

In het vrouwelijk geslacht komt nu en dan (althans bij den mensch) eene uitgroeiing tot stand van het kraniale einde van den Wolff'schen gang, die dan leidt tot het, door ROTH [2]) het eerst beschreven en door MIHALKOVICS [3]) als gedeelte van den Wolff'schen gang herkende, tubo-parovariaalkanaal. Waar echter bij Marsupialiers de Wolff'sche gang tot in de geslachtsklier indringt, blijft het tubo-parovariaalkanaal van den mensch tusschen de beide bladen van het Ligamentum latum.

Van het mannelijk geslacht geldt het volgende.

Een rete testis, hetzij men dit heeft op te vatten als eerst later opgetreden, op de tubuli seminiferi gelijkende kanaaltjes (COERT)[4]), of als homologa van de mergstrengen van 't ovarium (MIHALKOVICS), of als ingegroeide oernierkanaaltjes (KOLLMANN) [5]), wordt bij de buideldieren niet aangetroffen. Ontstaat gedurende de verdere ontwikkeling een op 't rete testis gelijkend netwerk in den Marsupialier testikel,

---

[1]) R. DISSELHORST. Die männlichen Geschlechtsorgane der Monotremen und einiger Marsupialen.

SEMON's Zoölogische Forschungsreisen in Australiën und dem Malayischen Archipel. 1904. p. 121.

[2]) Geciteerd naar MIHALKOVICS.

[3]) MIHALKOVICS, Untersuchungen über die Entwickelungsgeschichte der Uro-genitalorgane der Cranioten.

Internat. Zeitschrift für Anatomie und Histologie. Bd. 2.

[4]) COERT, Over de ontwikkeling der geslachtsklier bij de zoogdieren. Diss. Leiden 1898.

[5]) KOLLMANN, Lehrbuch der Entwickelungsgeschichte des Menschen.

dan moet dit als een geheel en al secundair optredend gedeelte worden beschouwd.

De verbinding van testikel en epididymis komt niet tot stand door een aantal tot vasa efferentia vervormde oernierkanaaltjes doch door een enkel, als gedeelte van den Wolff'schen gang te beschouwen kanaal. Naast de mannelijke dieren kunnen voor de opvatting, dat het verbindende kanaal werkelijk de Wolff'sche gang is, de ontwikkelingsverschijnselen in het vrouwelijk geslacht worden aangevoerd. Alle oernierkanaaltjes gaan bij de buideldieren te gronde, tot op minimale resten na (vasa aberrantia). In de weefselmassa, die de zoogenaamde epididymis dezer dieren voorstelt, ontstaat bij buideldieren secundair een groot aantal buisjes, die later als epididymiskanaaltjes waarschijnlijk dezelfde functie bezitten als de coni vasculosi in den epididymis der overige zoogdieren.

Ter verklaring van de oorzaak der van de monodelphe zoogdieren afwijkende verhoudingen der geslachtsgangen ten opzichte van de geslachtsklier bij buideldieren schijnen mij de volgende overwegingen niet van belang ontbloot.

Omtrent de omvormingen, die de oernier ondergaat, door hare verbinding met den testis, welke verbinding de latere vasa efferentia testis leveren, lezen we in de uitgebreide onderzoekingen van Coert [1]) 't volgende: „In het proximale gedeelte van 't Wolff'sche lichaam waar de Malpighi'sche lichaampjes met 't reteblasteem verbonden zijn, ziet men de glomeruli met het binnenste kapselepithelium allengs verdwijnen, waarna de buitenste kapselwanden de blinde uiteinden der oernierkanaaltjes vormen. Ook het epithelium der oernierkanaaltjes begint er anders uit te zien. Tweeërlei processen komen hier naast elkaar voor: een massa epitheliumcellen worden in het lumen uitgestooten en gaan te gronde, terwijl aan den anderen kant vele nieuwe cellen worden aangemaakt (mitosen). Daarbij nemen de cellen een ander voorkomen aan, zoowel wat de kern als het protoplasma betreft. Het gevolg is, dat de oernierbuisjes ten slotte met een, wat vroeger niet het geval was, over de geheele uitgestrektheid gelijkvormig epithelium zijn bekleed, opgebouwd uit cylindercellen, de kernen regelmatig aan den basis gerangschikt. Of de verbinding dezer buisjes met den Wolff'schen gang gedurende die veranderingen steeds ongewijzigd bestaan blijft of wellicht wordt opgeheven en later op een ander punt weer opnieuw tot stand komt, heb ik niet kunnen waarnemen."

Deze waarnemingen wijzen er m. i. op dat men de vasa efferentia

---

[1]) l.c. pag. 96.

testis niet heeft op te vatten als eenvoudige oernierkanaaltjes, doch als nieuw gevormde kanalen, die geheel of grootendeels den weg gebruiken, hen door de oernierkanaaltjes gegeven. En dat zij dezen weg kunnen gebruiken vindt zijn oorzaak daarin dat, volgens FELIX en BÜHLER [1]) van een functioneeren van de oernier bij monodelphe zoogdieren, zelfs bij 't varken, waar ze zoo sterk ontwikkeld is, hoogstwaarschijnlijk geen sprake is.

Niet aldus bij de didelphe zoogdieren. Hier functioneert zooals bekend, de oernier niet alleen embryonaal, doch nog gedurende de eerste periode van het individueele leven. Eene scheiding der oernier in twee deelen zooals die bij reptiliën wordt aangetroffen komt daarbij niet tot stand.

De verbinding van de geslachtsklier, speciaal van den testikel, met haar uitvoergang, den Wolff'schen gang kon nu, zoo kan men veronderstellen, in het stadium, waarop bij andere dieren deze verbinding pleegt op te treden, bij de buideldieren niet met behulp van oernierkanaaltjes tot stand komen omdat deze nog hunne excretorische functie hadden te vervullen.

In de plaats hiervan zou dan de verbinding op die wijze tot stand komen dat de Wolff'sche gang kraniaalwaarts uitgroeide en zelf de verbinding tusschen de klier en haar uitvoerbuis tot stand bracht.

Men zou dan eindelijk de kanalen, die geheel secundair en onafhankelijk van oernierkanalen in het weefsel van den epididymis optreden, op gelijke wijze kunnen verklaren, n.l. als de kanalen die dezelfde beteekenis hebben als de coni vasculosi, maar nu, om dezelfde reden, niet ontstaan op den bodem van oernierkanaaltjes, doch zoowel plaatselijk als tijdelijk daarvan gescheiden.

Eene andere beschouwingswijze zou deze zijn, dat het in de kiemklier inwoekerend kanaaltje niet zijn zoude de Wolff'sche gang, doch het meest kraniale oernierkanaaltje, zoodat met andere woorden het zoogenaamde sexueele deel van de oernier bij de buideldieren gereduceerd zou zijn. Ik geloof niet dat deze zienswijze juist is, ten eerste omdat er geen grens tusschen beide kanalen waar te nemen is, en ten tweede omdat bij de reductie der oernier, zooals boven is gezegd, bij de buideldieren, zoover mijne preparaten reiken, niets waar te nemen is van verschillen tusschen de oernierkanaaltjes onderling, wat bij eene omvorming van oernierkanaaltje tot verbindende gang toch wel het geval zou moeten zijn.

---

[1]) FÉLIX und BÜHLER, Die Entwickelung der Harn und Geschlechtsorgane in HERTWIG's Handbuch der vergleichenden und experimentellen Entwickelungsgeschichte der Wirbeltiere.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt eene mededeeling aan namens Dr. W. A. VERSLUYS: *„Tweede mededeeling over de Plückersche Equivalenten van een cyclisch punt eener ruimtekromme."*

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

§ 1. Indien de oorsprong der coördinaten een cyclisch punt (n, r, m) eener ruimtekromme C is dan kunnen de coördinaten van een punt van C, gelegen in de nabijheid van den oorsprong, op een tak gaande door den oorsprong, voorgesteld worden als volgt:

$$x = a\, t^n,$$
$$y = b_0\, t^{n+r} + b_1\, t^{n+r+1} + b_2\, t^{n+r+2} + \text{enz.},$$
$$z = c_0\, t^{n+r+m} + c_1\, t^{n+r+m+1} + c_2\, t^{n+r+m+2} + \text{enz.}$$

Zij q_1 de grootste gemeene deeler van n en r, q_2 die van r en m, q_3 die van m en $n+r$ en q_4 die van n en $r+m$.

Indien $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = 1$, dan hangen de Plückersche equivalenten alleen af van n, r en m. In een vorige mededeeling [1]) gaf ik de Plückersche equivalenten voor dit bijzondere geval [2]).

§ 2. Indien de 4, G. G. Deelers q niet allen één zijn dan hangen de Plückersche équivalenten van het cyclische punt (n, r, m) af van de waarden der coëfficienten b en c, even als, in 't algemeen, voor een cyclisch punt eener vlaktekromme gegeven door de ontwikkelingen:

$$x = t^n,$$
$$y = t^{n+m} + d_1\, t^{n+m+1} + d_2\, t^{n+m+2} + \text{enz.},$$

het al of niet nul zijn van de coëfficienten d invloed heeft op het aantal knooppunten en dubbelraaklijnen equivalent met het cyclisch punt (n, m) [3]).

Indien de coëfficienten c en b niet nul zijn en er tusschen deze coëfficienten geen bijzondere betrekkingen bestaan en als bovendien n, r en m grooter zijn dan één, dan is het cyclisch punt (n, r, m) equivalent met

$n - 1$ stationnaire punten β en met

$\{(n-1)(n+r-3) + q_1 - 1\} : 2$ knooppunten H.

---

[1]) Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. te Amsterdam, 25 Nov. 1905.

[2]) De afleiding dezer equivalenten is, onder meer, te vinden in mijn verhandeling: *„Points sing. des courbes gauches données par les équations:* $x = t^n$, $y = t^{n+r}$, $z = t^{n+r+m}$," opgenomen in *„Archives du Musée Teyler"*, série II, t. X, 1906.

[3]) A. BRILL und M. NOETHER. Die Entwicklung der Theorie der algebraischen functionen, p. 400. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, III, 1892—93.

Het osculatievlak der kromme C in het cyclisch punt (n, r, m) is equivalent met

$$m - 1 \text{ stationnaire vlakken } \alpha \text{ en met}$$
$$\{(m-1)(r+m-3)+q_3-1\}:2 \text{ dubbelvlakken } G.$$

De raaklijn der kromme C in het cyclisch punt (n, r, m) is equivalent met

$$r - 1 \text{ stationnaire raaklijnen } \theta, \text{ met}$$
$$\{(r-1)(n+r-3)+q_1-1\}:2 \text{ dubbelraaklijnen } \omega \text{ en met}$$

$\{(r-1)(r+m-3)+q_3-1\}:2$ dubbelbeschrijvenden ω' van het ontwikkelbaar regelvlak O dat gevormd wordt door de raaklijnen van de kromme C.

§ 3. Het cyclisch punt (n, r, m) van de kromme C is een $n+r$-voudig punt op het ontwikkelbaar regelvlak O waarvan C is de keerkromme.

Het cyclisch punt (n, r, m) telt voor

$$(n+r-2)(n+r+m)$$

snijpunten van de keerkromme C met het tweede pooloppervlak van O voor een willekeurig punt.

Door het cyclisch punt (n, r, m) van de keerkromme C gaan

$$\{n(n+2r+m-4)+q_3-q_2\}:2$$

takken van de op het ontwikkelbaar regelvlak O gelegen knoopkromme.

Al deze nodale takken raken in het cyclisch punt (n, r, m) aan de raaklijn van de keerkromme C (de x-as).

Zij hebben met deze gemeenschappelijke raaklijn in het raakpunt

$$\{(n+r)(n+2r+m-4)+q_4-q_2\}:2$$

punten gemeen.

De door het cyclisch punt (n, r, m) gaande nodale takken hebben alle in dit punt tot osculatievlak het osculatievlak $z=0$ der keerkromme C.

Deze nodale takken hebben met hun osculatievlak $z=0$ in het cyclisch punt (n, r, m)

$$\{(n+r+m)(n+2r+m-4)+q_1-q_2\}:2$$

punten gemeen.

§ 4. Het voorbeeld van een gewoon stationnair vlak α, waarvan het raakpunt een cyclisch punt $(1, 1, 2)$ is, toont aan, dat er door een cyclisch punt takken der knoopkromme kunnen gaan welke in dit punt niet aan de keerkromme raken.

Deze snijdende nodale takken komen slechts voor indien $q_2 > 1$. Is $r > 1$ dan moeten de coëfficienten b en c aan bijzondere voorwaarden voldoen. Is $r = 1$ dan gaan door het cyclisch punt (n, r, m) der keerkromme, of $q_2 : 2$, of $(q_2 - 1) : 2$ dezer nodale snijdende takken. Alle snijdende nodale takken bezitten een gemeenschappelijke raaklijn gelegen in het vlak $z = 0$, zoowel voor $r = 1$ als voor $r > 1$.

§ 5. Het voorbeeld van een gewoon stationnair punt β (2, 1, 1) toont aan, dat door een cyclisch punt van de keerkromme, nodale takken kunnen gaan, welke dezelfde raaklijn maar niet hetzelfde osculatievlak bezitten als de keerkromme. Deze bijzondere nodale takken komen slechts voor indien $q_4 > 1$. Is $q_4 > 1$ en $m = 1$ dan komen deze bijzondere nodale takken steeds voor. Is $q_4 > 1$ en ook $m > 1$ dan moeten de coëfficienten b en c aan bijzondere voorwaarden voldoen. Deze bijzondere nodale takken hebben in het cyclisch punt (n, r, m) een gemeenschappelijk osculatievlak (verschillend van het vlak $z = 0$).

§ 6. De raaklijn aan C in het cyclisch punt (n, r, m) is een r-voudige beschrijvende g op het ontwikkelbaar regelvlak O. De r bladen van het oppervlak O welke door de beschrijvende g gaan raken alle aan het osculatievlak $z = 0$ van C in het punt (n, r, m).

De beschrijvende g ontmoet nog in $\varrho - (n + 2r + m)$ punten R een blad van het oppervlak O, als O is van den graad ϱ.

In ieder punt R ontmoet g r takken van de knoopkromme. Deze r takken vormen, indien $m > r$ een singulariteit $(r, r, m - r)$ en het osculatievlak van deze nodale takken is het raakvlak van O langs g.

Indien $m < r$ vormen deze r nodale takken een singulariteit $(r, m, r - m)$ en het osculatievlak dezer r nodale takken is het raakvlak van O langs de g in R snijdende beschrijvende.

Indien $r = m$ vormen deze r nodale takken een singulariteit $(r, r, 1)$.

§ 7. In 't algemeen zal de singuliere beschrijvende g alleen nodale takken ontmoeten in het cyclisch punt (n, r, m) en in de punten R. Indien $q_2 > 1$ dan kan het gebeuren dat g nog ontmoet nodale takken, die ontstaan, doordat eenige der r bladen, die elkaar volgens g raken, elkaar doordringen. Deze nodale takken ontmoeten g in het zelfde punt Q. Is $q_2 > 1$ en $n = 1$ dan bestaat er altijd een zoodanig ontmoetingspunt Q. Is $q_2 > 1$ en $n > 1$ dan moeten de coëfficienten b en c aan bijzondere voorwaarden voldoen, willen de bladen die door g gaan elkaar doordringen.

Scheikunde. — De Heer BAKHUIS ROOZEBOOM biedt namens den Heer F. M. JAEGER eene mededeeling aan: *„Over eene stof, welke vijf verschillende vloeistoffasen bezit, waarvan er minstens drie stabiel zijn met betrekking tot de isotrope smelt"*.

(Mede aangeboden door den Heer FRANCHIMONT.)

§ 1. De verbinding, welke de hoogst merkwaardige verschijnselen vertoont, die hier beschreven worden, is het *cholesteryl-cinnamylaat:* $C_{27} H_{45}. O_2 C. CH : CH. C_6 H_5$.

Ik heb dit lichaam bereid, door samensmelten van gelijke hoeveelheden zuiver cholesterine en cinnamylchloride in een kolfje, dat circa twee uren lang in een oliebad op 190° C. verhit werd. Het is van 't grootste belang, de temperatuur niet hooger op te voeren, en de verhitting zoo kort mogelijk te laten plaats hebben, aangezien de zich nu toch al geleidelijk donker kleurende smelt, anders in plaats van 't gewenschte derivaat, eene bruine, in oplossing groen fluoresceerende hars levert.

Men lost de vastgeworden reaktie-massa in kokenden aether op, voegt bij de bruine vloeistof beenderkool, en kookt gedurende een uur aan een terugvloeikoeler. Vervolgens wordt bij de afgefiltreerde vloeistof, zóóveel op 40° C. verwarmde absolute alkohol gevoegd, tot er eene troebeling ontstaat. Dan laat men alles eenige uren staan, waardoor zich, bijna witte, kleine glinsterende blaadjes van den ester afzetten. Men zuigt deze af, wascht na met weinig aether en alkohol, en kristalliseert 't produkt meermalen uit kokend aethylacetaat om, waarbij men telkenmale 't grootste deel der opgeloste stof, door toevoeging van alkohol kan precipiteeren.

De zuivere, volkomen kleurlooze, schoon gekristalliseerde verbinding vertoont onder het mikroskoop geen heterogene bestandeelen.

§ 2. De volgende proefnemingen werden op de gebruikelijke wijze verricht; de stof bevond zich in kleine, dunwandige reageerbuisjes, terwijl de thermometer in de vloeistof geplaatst was, en de gesmolten massa het kwikreservoir geheel en al omhulde. De temperatuur van het olie-bad, werd, onder roeren, gradueel opgevoerd, en thans het volgende waargenomen:

Bij 151° C. [1]) ongeveer begint de vaste massa week te worden,

[1]) BONDZYNSKI en HUMNICKI beschrijven in Z. f. physiol. Chemie, 22, 396, (1896), een cinnamylaat, dat in oplosbaarheid, enz. met het mijne overeenkomt, doch met eene smelttemperatuur van 149° C. Deze is blijkbaar identisch met mijne 1e overgangstemperatuur.

terwijl zich aan de randen hier en daar schitterende kleuren gaan vertoonen, voornamelijk groen en violet, bij doorvallend licht de komplementaire kleuren rood en geel. Bij 157° ongeveer is de massa dik-vloeibaar en sterk dubbelbrekend; de grondtoon der fase is oranjerood, terwijl bij 't roeren met den thermometer overal de vloeibare kristallen zich aaneenrijen tot schitterend mei-groene slieren. Later heb ik door konstruktie der afkoelingskromme, de temperatuur *t*, waarbij de stof vast wordt op 155°8 C. scherp bepaald; de knik in de kurve is duidelijk, aangezien het warmte-effekt relatief groot is, en de onderkoeling werd tegengegaan doer enting met een vast deeltje van den ester.

De kleur der vloeibare fase wordt nu bij verdere verwarming weinig veranderd; daarentegen wordt hare konsistentie geleidelijk meer en meer dun-vloeibaar. Bij 199°5 C. is ze bijna kleurloos, en men zou meenen, dat ze nu wel dadelijk helder zal worden.

Doch dan wordt bij die temperatuur de massa opeens emaillewit en snel dik-vloeibaar, terwijl ze nog sterk dubbelbrekend blijft. Men neemt nu duidelijk eene ontmenging waar in twee vloeistoflagen, die hier beide anisotroop zijn. De interferentiekleuren zijn thans geheel verdwenen. Daarop wordt bij langzame verwarming, de vloeistof-fase bij 201.°3 C. isotroop, en volkomen helder. De isotrope smelt is kleurloos.

Bij afkoeling treden de volgende verschijnselen op: Bij 200° C. ongeveer wordt de isotrope vloestof troebel, bij 198° C. bereikt de dubbelbrekende massa hare grootste viskositeit; bij 196° C. is ze al weer dunner vloeibaar geworden, doch nù wordt ze, bij 190° C. ongeveer, weer dikker van konsistentie, terwijl ook het geheele aanzien der fase zeer opvallend verandert, ofschoon ze dubbelbrekend blijft. Daarna schijnt ze gradueel in de groen en rood gekleurde, dubbelbrekende vloeistoffase van straks over te gaan, welke, als men door enting de onderkoeling tegengaat, bij 155°.8 C. stolt.

Wanneer men de vaste stof onder het kristallisatie-mikroskoop van LEHMANN smelt, dan kan men, even vóór 't vastworden, nòg eene vloeistoffase waarnemen, welke ik voor verschillend moet houden van de als 't eerst optredende, zoo even beschrevene fase. Zij schijnt labiel te zijn met betrekking tot de vaste stof, en toont veel overeenkomst, met den grauwen zoom, welke men bij het caprinaat waarneemt.

Evenzoo meen ik te moeten besluiten, dat de *alleen* bij afkoeling optredende vloeistoffase ($t = \pm 190°$) *labiel* is ten opzichte der drie anderen, zoodat er hier *drie stabiele* en *twee labiele* vloeibare fasen zouden kunnen optreden. Zeer merkwaardig is 't, dat de

overgangen van de twee stabiele anisotrope fasen in de tusschengelegene labielere, bij voorzichtig werken geheel en al kontinu schijnen; de viskositeit schijnt gradueel in die der stabiele fasen over te gaan. Opmerkelijk is ook de onmogelijkheid, om de overgangstemperaturen bij stijgende òf bij dalende temperatuur van het buitenbad exact hetzelfde te vinden. Steeds slingeren de verkregen waarden voor de begin-, en eindtemperatuur van elk fase-trajekt binnen enge grenzen. Hetzelfde is 't geval, als men de vaste stof opsmeltend, het punt wil bepalen, waarbij de eerste weekheid der massa gaat optreden: ook dáár slingert men bij de temperatuur-vaststelling binnen intervallen als b.v. 147°—156° C. Het geheele verloop der afkoeling van isotroop-vloeibaar tot vast, gelijkt hier in hooge mate op een proces, waarbij tusschen de verschillende stadiën een kontinuë overgang bestaat. Vooral is 't, alsof de twee labiele fasen ieder uit eene geheele reeks van labiele toestanden zijn saamgesteld, die achtereenvolgens optreden om den band te vormen, eenerzijds tusschen vast en vloeibaar-anisotroop, anderzijds tusschen anisotroop-, en isotroop-vloeibaar. Het geheel toont veel overeenkomst met eene gradueele dissociatie en associatie tusschen minder of meerder samengestelde molekuul-komplexen. Het is zeer wel mogelijk, dat de overgangen vast-vloeibaar, in stede van *plotseling*, juist *kontinu* verloopen, waarbij eene ononderbroken serie van labiele, en bij de meeste stoffen niet realiseerbare tusschentoestanden wordt doorloopen, onder welke tusschentoestanden dan enkele somtijds vast te houden zijn bij diè stoffen, welke als deze cholesteryl-esters, het fenomeen der dubbelbrekende vloeistoftoestanden plegen te vertoonen. Een en ander dringt zich aan den onderzoeker van zelf als waarschijnlijk op, vooral nu toch bewezen werd, dat bij mijne overige cholesteryl-esters, zelfs bij het caprinaat, *beide* of één der beide anisotrope vloeistoffasen steeds labiel en alleen bij onderkoeling realiseerbaar waren; ja, dat zelfs enkele hunner, zooals cholesteryl-isobutyraat, niet in zuiveren toestand, maar alleen door sommige bijmengselen, de hun toekomende labiele anisotrope vloeistoffasen vermogen te vertoonen. Met het denkbeeld eener gradueele dissociatie van samengestelde molekuul-komplexen in meer eenvoudige, is ook 't feit in overeenstemming, dat men de anisotroop-vloeibare fasen nog nooit heeft zien optreden, *na* de isotrope: steeds is deze het slotverschijnsel, wat dan daarin moet gezocht worden, dat eene dissociatie van dezen aard immer met stijgende temperatuur pleegt toe te nemen.

Dat ook bij afkoeling tusschen vast en anisotroop-vloeibaar niet alles zoo bruusk gaat, als het groote kalorische effekt zou doen vermoeden, blijkt bij het cholesteryl-cinnamylaat daaruit, dat na stolling hier en daar tusschen de vaste massa, vooral aan de wanden der

smeltbuisjes, de interferentiekleuren, welke voor den overgang der fasen in elkaar karakteristiek zijn, nog zeer langen tijd, soms vele uren achtereen zichtbaar blijven, om dàn eerst langzaam te verdwijnen. Ook bij sterke vergrooting kan men in deze kleurige deelen geen goedbegrensde kristalletjes ontdekken: 't geheel maakt meer den indruk van een dubbelbrekend, regelloos netwerk, van vast geworden vloeistofdruppeltjes, zooals zich ook de vloeibare kristallen zelve bij sterke vergrooting aan 't oog voordoen. [1])

Van zelf dringt zich hier de gedachte dan ook op, om in deze nog zoo raadselachtige verschijnselen te zien: de min of meer labiele, en gedeeltelijk gerealiseerde tusschenstadiën bij een kontinuën overgang vloeibaar ⇆ vast. Het door LEHMANN geopperde denkbeeld, dat er een onderscheid tusschen de molekuulsoorten in de verschillende aggregaattoestanden zou aanwezig zijn, wordt dan bij deze beschouwingen geadopteerd met dit verschil, dat zulk eene verscheidenheid van associatie der molekulen alleszins vereenigbaar wordt geacht met het verschijnsel van de *kontinuïteit* tusschen de hier te sprake komende aggregatie-toestanden.

§ 3. Ten slotte wil ik nog opmerken, dat het cholesteryl-cinnamylaat bij veelvuldige herhaling dezer smeltproeven, al spoedig eene geringe, en allengs stijgende ontleding ondergaat, welke zich in geelkleuring der stof, en in kleine veranderingen der karakteristieke temperatuurgrenzen openbaart.

Zaandam, 26 Oct 1906.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling N°. 95[a] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „*Over het meten van zeer lage temperaturen. IX. Vergelijking van een thermo-element constantaan-staal met den waterstofthermometer.*" (Naschrift).

(Deze mededeeling zal later worden opgenomen).

---

[1]) Een nòg veel duidelijker geval van dezen overgang is thans door mij gevonden bij 't *cholesteryl-pelargonaat,* waarover ik binnen kort eene mededeeling zal doen.

Natuurkunde. — De Secretaris biedt aan Mededeeling N°. 95[e] uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden: H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK: *„Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstofthermometer".*

(Aangeboden in de vergadering van 29 September 1905).

§ 1. *Inleiding.*

Terwijl van de uitkomsten van bepalingen van lage temperaturen, verricht met den in Med. N°. 27 (Juni 1896) beschreven en in Med. N°. 60 (Juni 1900) nader behandelden waterstofthermometer, reeds herhaaldelijk gebruik is gemaakt, zijn omtrent die bepalingen zelve nog geen nadere bijzonderheden medegedeeld. Wij geven die thans in aansluiting aan eene in 1905 en 1906 verrichte reeks van waarnemingen. Deze hebben gediend voor de in Med. N°s 95[a] en 95[c] beschreven onderzoekingen en verder voor bepalingen van isothermen van waterstof bij lage temperaturen, over welke eene volgende Mededeeling zal handelen. Zij strekken zich uit over het geheele thans toegankelijke gebied der lagere temperaturen, daar zij ook metingen in vloeibare waterstof omvatten. Alle in vroegere jaren noodig gebleken voorzorgen zijn er bij genomen. De temperatuur van het bad, waarin de thermometer gedompeld werd, kon bij alle temperaturen tot op 0°.01 standvastig gehouden worden. Zoo was te verwachten, dat de bij het inrichten der thermometers beoogde nauwkeurigheid en vertrouwbaarheid vrijwel bereikt zou worden [1]). In hoeverre dit inderdaad het geval is, laten de volgende gegevens beoordeelen.

§ 2. *Inrichting van den thermometer.*

Aan Med. N°. 60 is weinig toe te voegen. De staalcapillair, welke thermometerbol en manometer verbindt, werd tegen knikken beveiligd door een staaldraad er langs aan te brengen, welke aan de uiteinden is gesoldeerd aan koperen kapjes, die op de staalstukken *c* en *e* (Pl. II, Med. N°. 27) aan het eind der capillair kunnen worden geschoven. De afmetingen van het thermometerreservoir van Med. N°. 60 (80 c.M^3.) leverden bij onze metingen geen bezwaar op, daar het bad in de cryostaten (zie Med. N°s. 83, 94[c], 94[d] en 94[f]), behalve voor den thermometer en andere meettoestellen, ruimte genoeg aanbood voor den roertoestel, die zoo afdoende werkte, dat althans met

[1]) Een uitgewerkt voorbeeld van de bepaling van zeer lage temperaturen met den waterstofthermometer ontbrak tot nog toe in de literatuur. In het volgende is zulk een voorbeeld bevat.

het thermoelement[1]) een ongelijkmatigheid van temperatuur niet was aan te toonen[2]). De doorsnede van de glascapillair, die den steel van den thermometer vormt, was 0.0788 m.M². Met het oog op de temperatuurcorrectie (zie § 4, slot) is het wenschelijk dat zij klein is. Zoowel door berekening als door waarneming[3]) blijkt, dat het drukevenwicht van schadelijke ruimte en reservoir bij deze afmeting van de capillair[4]) nog zeer snel bereikt wordt, veel sneller dan het evenwicht van het kwik in de beide beenen van den manometer, wat o. a. bevestigd wordt door de snelheid, met welke de thermometer schommelingen in de temperatuur van het bad volgt[5]).

De bepaling van den druk, onder welke het gas staat, kan, wanneer het de bepaling van zeer lage temperaturen geldt, vereenvoudigd en bespoedigd worden door naar het voorbeeld van Chappuis[6]) de manometerbuis tevens als barometerbuis te doen dienen. De wijziging tot dit doel in de inrichting volgens Med. N°. 60 Pl. VI aangebracht, wordt aangegeven door Pl. I, welke een deel van Pl. VI bij Med. N°. 60 dient te vervangen. De thermometer (a, b, c, d, e, h, k) is door een caoutchoucslang en T-stuk l_0 verbonden eenerzijds met den manometer l_1, aan welken men (zie Pl. VI Med. N°. 60) bij m_1 het reservoir op standvastige temperatuur en bij m_2 den barometer aansluit, anderzijds met de barometerbuis (n_0, n_1 (luchtvanger), n_2). De druk kan nu, behalve door den manometer en den bij m_2 aangesloten barometer, ook onmiddellijk door het niveauverschil van het kwik in n_2 en in g afgelezen worden. Bij de in deze Med. behandelde bepalingen is van dit hulpmiddel nog geen partij getrokken.

§ 3. *De waterstof.*

De vulling is op tweeërlei wijze geschied:

---

[1]) Een weerstandsthermometer is gevoeliger (vergelijk Med. Nos. 95ᵉ en 95ᶜ). Zoodra een van doelmatige afmeting gereed is, zal daarmede de proef worden herhaald.

[2]) Travers, Senter en Jaquerod, (Phil. Trans. Series A, Vol. 200, Part. II, § 6) bij wier metingen het houden van den thermometer op een standvastige temperatuur meer bezwaren opleverde, moesten aan een kleiner reservoir de voorkeur geven.

[3]) Berekening leert, dat voor het tot stand komen van een drukvereffening van 1 c.M. tot 0.01 m.M., het door de capillair stroomende gas 0.1 sec. noodig heeft, het kwik in den manometer 4 sec. Proefneming geeft voor dezen tijd 25 sec. Dit grootere bedrag zal aan den invloed van de vernauwing bij de glazen kraan k moeten worden toegeschreven.

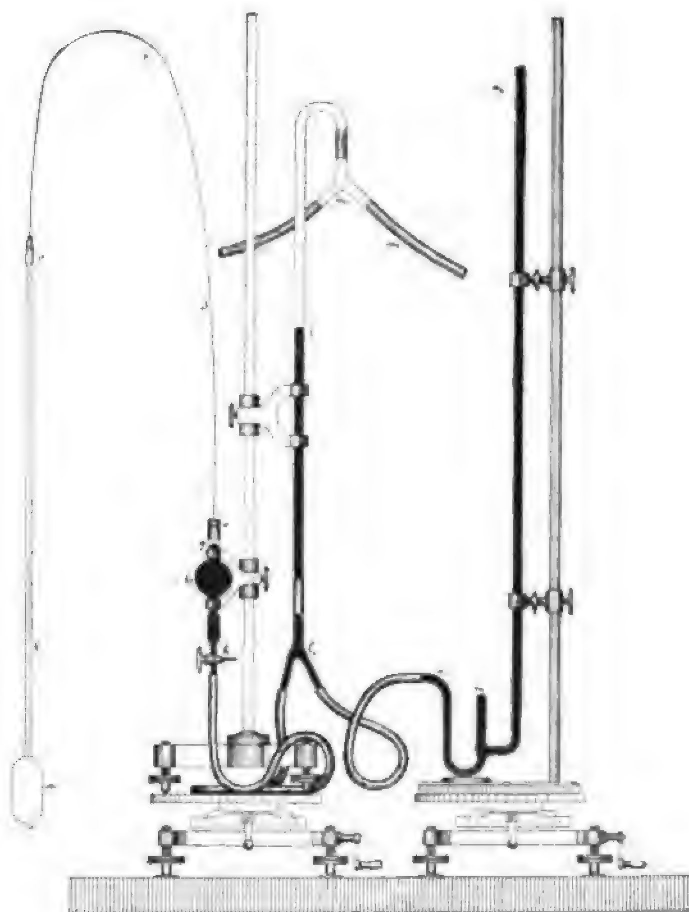
[4]) Zorgvuldig moet gewaakt worden tegen vernauwingen.

[5]) Aan het uitpompen van het reservoir met de kwikluchtpomp bij het vullen moet echter veel tijd besteed worden, daar het evenwicht van reservoir en pomp veel langzamer tot stand komt, dan dat tusschen schadelijke ruimte en reservoir.

[6]) Travaux et Mémoires, Tome VI.

H. KAMERLINGH ONNES en C. BRAAK. Over het meten van zeer lage temperaturen. XIII. Bepalingen met den waterstof-thermometer.

Plaat I.



a. Met waterstof bereid in den toestel van Med. N°. 27 voorzien van de verbeteringen, die in Med. N°. 94^e (Juni 1905) § 2 zijn beschreven. Terwijl vooraf onderzocht was of alle verbindingen van den toestel volkomen sloten, werd om elke verontreiniging van het gas uit te sluiten ten overvloede nog in den ontwikkelaar steeds overdruk onderhouden. Het verdrijven van de oorspronkelijk in den toestel aanwezige lucht werd voortgezet tot zij hoogstens nog tot 0.000001 in het gas kon aanwezig zijn.

b. Met waterstof volgens Med. N°. 94^f (Juni 1906) XIV bereid. Om deze meer afdoende bereidingswijze toe te kunnen passen, moet men over vloeibare waterstof beschikken.[1]) In § 7 wordt de gelijkwaardigheid van de eerste methode met de laatste, voor metingen tot — 217°, aangetoond. Of uit de toepassing der eerste handelwijze bij metingen in vloeibare waterstof systematische fouten kunnen voortvloeien door de afscheiding van verontreinigingen, minder vluchtig dan waterstof, moet nog worden nagegaan.[2])

§ 4. *De metingen.*

Het nulpunt van den thermometer wordt bepaald voor en na elke serie van waarnemingen. Zoowel voor het nulpunt als voor iedere temperatuurbepaling wordt een gemiddelde afgeleid uit 3 à 4 waarnemingen. Elk dezer waarnemingen bestaat uit een aflezing van den barometer, voorafgegaan en gevolgd door een aflezing van den manometer. De thermometers, die de temperatuur aangeven van het kwik, van de schaal en van het gas in de schadelijke ruimte, worden aan het begin en het einde van elke waarneming afgelezen. De temperatuur van het vertrek wordt zoo standvastig en gelijkmatig mogelijk gehouden.

De temperatuur van het thermometer-reservoir wordt gelijk gesteld aan die van het bad. Dit is bij de cryostaten beschreven in Med. N°. 94^d en Med. N°. 94^f en de handelwijze aldaar vermeld, geoorloofd.

Het constant houden der temperatuur in het bad geschiedt door middel van den weerstands-thermometer, vermeld in Med. N°. 95^c. Om het overzicht der waarnemingen gemakkelijker te maken, werd steeds zoo nauwkeurig mogelijk op denzelfden weerstand ingesteld

---

[1]) De waterstof in het vacuumglaasje *B* (zie Med. N°. 94^f XIV, fig. 4) bleek zoo langzaam te verdampen, dat een tijdsverloop van 2 uur beschikbaar bleef voor het omspoelen en weer uitpompen van den thermometer, te voren langen tijd (verg. noot 5 bij § 2), gedeeltelijk onder verhitting, luchtledig gehouden.

[2]) Bij een vroegere serie waarnemingen, werden afwijkingen gevonden, welke in onderling verband aantoonen, dat de waterstof met lucht verontreinigd moet zijn geweest.

en door middel van seinen de druk in den cryostaat zoo geregeld, dat in den zeer gevoeligen galvanometer de spiegel slechts geringe schommelingen om zijn evenwichtstand maakte. Voorzoover dit noodig bleek werd van deze schommelingen een correctiekromme ontworpen (zie Pl. III Med. N°. 83). In den regel waren echter deze afwijkingen zoo gering, dat ze niet in aanmerking kwamen.

Wat de capillaire glazen steel van den thermometer betreft, zoo bevindt zich een deel op de temperatuur van het vloeistofbad. De lengte van dit deel wordt afgeleid uit de aanwijzingen van een vlotter [1]) in den cryostaat, die in de teekeningen is weggelaten, om deze niet onduidelijk te maken. Om de temperatuurverdeeling in het overige deel van de capillair binnen den cryostaat te leeren kennen, zijn afzonderlijke bepalingen verricht en wel werd *a*. met behulp van een naast de capillair geplaatsten weerstandsthermometer, (zie Med. N°. 83 Pl. II [2]), *b*. met behulp van een thermo-element, waarvan de contactplaats op verschillende hoogte in den cryostaat werd gebracht, de temperatuurverdeeling in den cryostaat nagegaan voor het geval dat vloeibare lucht, vloeibaar ethyleen of vloeibare waterstof als bad gebruikt werd, en eindelijk *c*. uit deze waargenomen verdeeling de verdeeling bij andere temperaturen van het bad afgeleid. Dit mag voldoende geacht worden, daar het volume, waarvan de temperatuur bepaald wordt, slechts $\frac{1}{3000}$ van het reservoir bedraagt en een fout van 50° in de gemiddelde temperatuur van de capillair eerst overeenkomt met 0°.01 in de temperatuur van het bad terwijl blijkens de overeenstemming der waarnemingen sub *a* en *b* eene fout van meer dan 20° is uitgesloten.

§ 5. *Berekening der temperaturen.*

De berekening van het nulpunt geschiedt door den waargenomen druk van het gas terug te brengen tot dien onder bepaalde omstandigheden, dezelfde als in Med. N°. 60 zijn aangenomen. Stel dat nu is:

V_0 het volume van het reservoir bij 0°.

u_1 het volume van dat gedeelte van de glascapillair, dat op de temperatuur t van het reservoir is. Hiertoe is gerekend het zich in het vloeistofbad bevindende gedeelte, vermeerderd met 2 cm. van het zich er onmiddellijk boven bevindende deel.

u_2' en u_2'' de volumina der deelen van het stuk van de glascapillair buiten het bad op temperaturen t_2' en t_2''.

---

[1]) Bij de bepalingen in vloeibare waterstof werd geen vlotter gebruikt. De stand van den vloeistof in het bad werd afgeleid uit het volume van het verdampte gas.

[2]) Het benedenste deel ζ_{11} tot ζ_{12} met dichte windingen is 9 cm., het deel met verder van elkaar verwijderde windingen (ongeveer 20 cm.) reikt tot boven in den cryostaat.

u_3 het volume van het zich buiten het bad bevindende deel van de glascapillair en van de staalcapillair met de temperatuur t_3.

u_4 het volume bij de stalen punt van den volumenometer.

β_1 en β_2 de verandering van het volume V_0 veroorzaakt door den druk van het gas.

Zoo H_T de waargenomen druk is, en H_0 en u dezelfde beteekenis hebben als in Med. N°. 60, wordt de temperatuur gevonden uit de formule:

$$H_T\left[\frac{V_0(1+k_1t+k_2t^2)+\beta_1+u_1}{1+at}+\frac{u_2'}{1+at_2'}+\frac{u_2''}{1+at_2''}+\frac{u_3}{1+at_3}+\frac{u_4}{1+at_4}\right]=$$
$$=H_0\left[V_0+\beta_2+u_1+u_2'+u_2''+\frac{u}{1+15a}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

De volumeverandering van den glazen steel door temperatuursverandering komt niet in aanmerking, evenmin die van u. Die van het thermometerreservoir is berekend door middel van een kwadratische formule, waarvan de coëfficienten k_1 en k_2 de volgende waarden hebben: $k_1 = 23.43 \times 10^{-6}$, $k_2 = 0.0272 \times 10^{-6}$ [1]).

Stel de som der laatste 4 termen tusschen de haakjes van het eerste lid $= \Sigma \frac{u}{1+at}$ en het standvastige tweede lid

$$H_0\left[V_0+\beta_2+u_1+u_2'+u_2''+\frac{u}{1+15a}\right]=A, \quad . \quad . \quad (2)$$

dan volgt uit het bovenstaande voor de temperatuur:

$$t=\frac{V_0+\beta_1+u_1-\frac{A}{H_T}+\Sigma\frac{u}{1+at}+V_0k_2t^2}{\left\{\frac{A}{H_T}-\Sigma\frac{u}{1+at}\right\}a-V_0k_1}. \quad . \quad . \quad (3)$$

Laat men den term met t^2 weg dan vindt men een benaderde waarde voor de temperatuur. Nu kan t opnieuw worden berekend, terwijl in den term met t^2 deze waarde wordt gesubstitueerd. Deze benaderde rekenwijze is volkomen voldoende.

§ 6. *Overzicht van eene bepaling.*

De waarnemingen, welke in deze § worden medegedeeld, leverden de temperatuur behoorende bij de electromotorische kracht van het thermoelement bepaald in Tabel IV en V van Med. N°. 95^a en be-

---

1) Deze waarden zijn ontleend aan Med. N°. 95^b. Ze hebben betrekking op de bepalingen in 1903 omtrent de uitzetting van glas verricht. Berekent men de temperaturen door middel van de in dezelfde Med. uit de waarnemingen van 1905 afgeleide kwadratische en kubische formule, dan vindt men slechts geringe afwijkingen, die bij — 100° respectievelijk — 0°.014 en — 0°.016 bedragen, bij — 200° en lager steeds beneden 0°.01 blijven.

hoorende bij den weerstand gemeten bij de waarneming opgenomen in Tabel I van Med. N°. 95[c].

De tabellen I en II zijn analoog aan die van Med. N°. 60, slechts is aan de eerste een kolom K toegevoegd, waarin zijn opgeteekend de aflezingen op de kathetometerschaal. Deze worden steeds bij iedere meting bepaald om, in verband met de bekende collimatieverschillen der kijkers, zoo noodig als contrôle te dienen voor de aflezingen door middel van de standaardschaal.

TABEL I.

BEPALING IN EEN BAD VAN VLOEIBARE WATERSTOF (ONGEVEER — 253°). AFLEZINGEN.

5 Mei '06 3.10—3.30		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*K*
Spits		14.75	7.9	974	20.17	9.1				
				975	17.86	8.1				
Manometer	onderste top	23.00	9.0	297	22.02	9.3	15.5	15.5	15.4	
	meniscus rand	26.01	9.0	298	19.90	10.3		15.6	15.1	21.926
							15.5	14.3		
	bovenste top	15.10	7.9	974	20.17	9.1				
	meniscus rand	18.43	7.9	975	17.86	8.1	15.5			89.294
Barometer	onderste top	21.03	8.7	297	22.02	9.3	15.5			
	meniscus rand	22.70	8.6	298	19.90	10.3	15.5			
	bovenste top	25.82	9.6	1058	28.07	11.3	15.7			103.279
	meniscus rand	27.98	10.0	1059	25.43	11.0	15.7			
Manometer	onderste top	22.98	9.3	297	22.02	9.3	15.4	15.5	15.4	
	meniscus rand	25.99	9.3	298	19.90	10.3		15.4	15.2	
							15.3	14.3		
	bovenste top	15.06	7.9	974	20.17	9.1				
	meniscus rand	18.42	8.0	975	17.86	8.1	15.5			
Spits		14.76	8.0	974	20.17	9.1				
				975	17.86	8.1				

TABEL II.

BEPALING IN EEN BAD VAN VLOEIBARE WATERSTOF (ONGEVEER — 253°). GECORRIGEERDE EN OMGEREKENDE GEGEVENS DER WAARNEMING.

		A'	B'	C'	D'	E	F
Manometer	onderste meniscus	296.55	296.70	14.8	14.9		
	hoogte	1.39		14.9	14.8		
	bovenste meniscus	976.21	976.37	14.9	13.8	81.53	0.14
	hoogte	1.46					
Barometer	onderste meniscus	297.46	297.48	14.8			
	hoogte	0.77					
	bovenste meniscus	1058.87	1058.90	15.0			
	hoogte	0.83					

De correctie voor het verschil in niveau van barometer en manometer werd aangebracht (zie ook Med. N°. 60). Zoo vindt men H_T, den druk van het gas in den thermometer.

Uit de aanwijzing van den vlotter vindt men de waarde van u_1. u_2' en u_2'' worden gekozen, zoodanig, dat de toestand zich zoo nauw mogelijk aansluit aan dien, waarbij de temperatuursverdeeling in den cryostaat is bepaald. Men verkrijgt nu de volgende tabel, waarin H_0 de nulpuntsdruk is.

TABEL III.

BEPALING IN EEN BAD VAN VLOEIBARE WATERSTOF (ONGEVEER —253°). GEGEVENS VOOR DE BEREKENING.

$u_1 = 0.0105$ cm³	
$u_2' = 0.0125$ »	$t'_2 = -162°$
$u_2'' = 0.0140$ »	$t''_2 = 0°$
$u_3 = 0.6990$ »	$t_3 = 14°.5$
$u_4 = 0.2320$ »	$t_4 = 14°.9$
$H_T = 81.53$ m.m.	
$V_0 = 82.265$ cm³	
$\beta_1 = -0.0041$ »	
$H_0 = 1091.88$ mm.	

Uit de gegevens volgt met de formule voor de benaderde waarde van de temperatuur, waarbij voor α werd aangenomen de waarde 0,0036627 van Med. N°. 60 [1]):

$$t = -252^\circ.964$$

en na aanbrenging der correctie voor den kwadratischen term:

$$t = -252^\circ.964 + 0^\circ.035 = -252^\circ.93.$$

§ 7. *Nauwkeurigheid der temperatuurbepalingen.*

Ten einde te komen tot een oordeel over de fout der waarnemingen met den waterstofthermometer, bepalen wij de afwijkingen der waterstoftemperaturen bij verschillende waarnemingen gevonden bij een zelfden weerstand, voor kleine verschillen gereduceerd.

De middelbare fout van een enkele bepaling, afgeleid uit de verschillen der onmiddellijk opeenvolgende thermometeraflezingen is gemiddeld ± 0°.0074, waaruit wij afleiden voor de middelbare fout van een temperatuur 0°.0043, aannemende dat gemiddeld 3 waarnemingen gediend hebben om een temperatuur te bepalen. Bij eenzelfde bepaling werden in den regel geen grootere afwijkingen tusschen de afzonderlijke aflezingen gevonden dan 0°.02. Slechts eenmaal, 27 Oct. '05 (vergelijk Med. N°. 95^c Tab. I), kwam een verschil van 0°.04 voor. Ook bij de laagste temperaturen komen slechts kleine afwijkingen voor. Zoo gaven op 5 Mei '06 twee der waarnemingen in de nabijheid van het kookpunt van waterstof (vergelijk Med. 95^a Tab. VI, waarneming N°. 30 en Med. N°. 95^c Tab. I)

$3^u20'$	— 252°.926
$3^u58'$	— 252°.929

de beide andere bij een anderen weerstand:

$2^u35'$	— 252°.875
$3^u\ 7'$	— 252°.866 [2])

Bepalingen van eenzelfde temperatuur op verschillende dagen, met dezelfde vulling van den thermometer, gaven de volgende resultaten: (vergelijk Med. N°. 95^a Tab. VI en N°. 95^c Tab. I) [3])

[1]) Uit de door CHAPPUIS gevonden waarden van α bij verschillende drukken, en D. BERTHOLOT's berekeningen volgt door extrapolatie van uit CHAPPUIS' waarde voor $p = 1000$ m M. $\alpha = 0.00366262$ voor $p = 1090$ m.M., van uit TRAVERS' waarde van α voor 700 m.M. met dezelfde gegevens $\alpha = 0.00366288$ voor $p = 1090$ m.M.

[2]) Bij deze beide temperaturen werd niet naar de aanwijzingen van den weerstandsthermometer geregeld, maar werd enkel de druk in den cryostaat constant gehouden. Dat desniettegenstaande de aflezingen van den thermometer zoo weinig verschillen, is het gevolg van de groote zuiverheid van de vloeibare waterstof in het bad.

[3]) De hier voor 30 Juni '06 medegedeelde temperatuur verschilt iets van de in Tab. I van Med. N°. 95^c vermelde, ofschoon beide op denzelfden weerstand betrekking hebben. Dit verschil vloeit daaruit voort, dat in Med. N°. 95^c de uitkomst van een enkele aflezing is gebruikt, en hier het gemiddelde van meerdere is gegeven.

7 Juli '05	— 139°.867
26 Oct. '05	— 139°.873
6 Juli '05	— 217°.416
3 Mrt. '06	— 217°.424
30 Juni '06	— 182°.730
6 Juli '06	— 182°.728

Voor de afwijking der bepalingen op één dag van het gemiddelde der bepalingen op de beide dagen volgt respectievelijk:

0°.003, 0°.004 en 0°001 dus gemiddeld 0°,0027,

hetgeen zeer goed overeenstemt met de middelbare fout hierboven voor een enkele bepaling afgeleid [1]), waaruit tevens blijkt, dat verschillende systematische fouten uitgesloten zijn. Hierdoor wordt tevens de onderstelling van welke wij uitgingen, gerechtvaardigd, dat de fout in den weerstandsthermometer kan worden verwaarloosd.

Bepalingen bij verschillende vullingen geven goede overeenstemming.

De bepalingen op 6 Juli '05 en 3 Mrt, '06 met den met electrolytische waterstof gevulden thermometer (zie § 3) en die op 30 Juni '06 met den met gedistilleerden waterstof gevulden thermometer verricht, geven:

gemiddelde van 6 Juli '05 en 3 Mrt. '06 — 217°.420

30 Juni '06	$5^u50'$	— 217°.327	gemiddeld — 217°.345.
	$6^u\ 5'$	— 217°.362	
	$6^u25'$	— 217°.347	

Brengt men de laatste temperatuur terug tot denzelfden weerstand als de eerste dan vindt men — 217°.400, het verschil dezer waarden is derhalve 0°.020, waaruit, daar slechts één bepaling werd gedaan, moet worden besloten, dat tot — 217° ook wat de vulling betreft systematische fouten vrijwel zijn uitgesloten.

§ 8. *Uitkomst.*

Uit het voorgaande blijkt, dat met onzen waterstofthermometer temperatuurbepalingen, ook bij de laagste temperaturen, tot op $\frac{1°}{50}$ nauwkeurig met de noodige voorzorgen zonder bezwaar te verwezenlijken zijn. Al is het niet zeker, dat de in de laatste serie bepaalde temperaturen in vloeibare waterstof deze nauwkeurigheid bereiken, aangezien zich daar een systematische fout door de vulling kan doen

[1]) Deze geeft namelijk voor de waarschijnlijke fout 0°.0029, dus geen merkbaar verschil met het bovenstaande.

gelden, die bij −217° nog niet optreedt, zoo ligt het wel voor de hand te onderstellen, dat met den met gedistilleerde waterstof gevulden thermometer althans ook deze temperaturen met denzelfden graad van nauwkeurigheid kunnen worden bepaald.

§ 9. *Dampspanning van vloeibare waterstof bij het smeltpunt.*

Door den druk boven het bad van vloeibare waterstof voldoende te verlagen werd de temperatuur bereikt, waarbij de waterstof in het bad vast wordt. Deze temperatuur geeft de grens aan, beneden welke nauwkeurige bepalingen op de in deze Mededeeling behandelde wijze niet mogelijk zijn.

Zij was nauwkeurig te bepalen door een plotselinge verandering in het geluid, dat de kleppen van den roerder in het bad te weeg brengen. (Zie Med. N°. 94^b, XII § 3).

Uit de aanwijzing van den weerstandsthermometer, bleek dat het gas in den waterstofthermometer zich gedeeltelijk had afgezet. De druk in den waterstofthermometer geeft derhalve de dampspanning van vloeibare waterstof bij het smeltpunt. Hiervoor werd gevonden:

$$H_{Sm} = 53.82 \text{ m.m.}$$ [1]).

§ 10. *Reductie op de absolute schaal.*

Over het overbrengen van de aflezingen van den waterstofthermometer op de absolute schaal door middel van de resultaten van isothermbepalingen zal in een volgende Mededeeling worden gehandeld.

§ 11. *Veranderingen van den nulpuntsdruk van den thermometer.*

Omtrent den druk in den thermometer bij de nulpuntsbepalingen kan worden opgemerkt, dat deze langzaam afneemt. Deze verandering is het sterkst, wanneer de thermometer pas in elkaar is gezet en wordt met den tijd geringer. Dit blijkt duidelijk, wanneer men vergelijkt de uitkomsten van de bepalingen verricht telkens aan het begin van een nieuwe waarnemingsperiode, dus nadat de thermometer ongebruikt eenigen tijd onder overdruk heeft gestaan.

Zoo werd den 5den Juli '05, kort na het in elkaar zetten van den thermometer gevonden:

$$H_0 = 1093.10 \text{ mm.}$$

terwijl aan het begin van de beide volgende waarnemingsperioden werd gevonden:

---

1) Travers, Senter en Jaquerod (loc. cit., p. 170) vinden hiervoor een waarde liggende tusschen 49 en 50 mm. Het groote verschil moet waarschijnlijk worden toegeschreven aan de mindere nauwkeurigheid dezer laatste bepalingen.

op 13 Oct. '05 $H_0 = 1092.11$ mm.
op 26 Febr. '06 $H_0 = 1091.93$ mm.

De bepalingen voor en na elke waarnemingsperiode geven onderling geringe verschillen. In den regel daalt de druk een weinig zooals bij de tweede der bovengenoemde waarnemingsperioden (7 Maart '06, $H_0 = 1091.83$ mm.), soms is er een geringe stijging zooals bij de eerste waarnemingsperiode (2 Nov. '05, $H_0 = 1092.23$ mm.) na waarnemingen onder lagen druk. Vóór en na de laatste waarnemingsreeks, toen kort na het vullen van den thermometer met gedistilleerde waterstof bepalingen bij —183° en —217° werden verricht was dit verschil bijzonder groot. De nulpuntsdruk na de metingen was toen 0.23 mm. hooger dan daarvoor.

Uit oudere waarnemingen met een anderen thermometer verricht, blijkt een overeenkomstig gedrag.

Zoo werd op 19 Nov. '02 gevonden:

$$H_0 = 1056.04 \text{ mm.}$$

terwijl de druk op 8 Juni '04 was

$$H_0 = 1055.43 \text{ mm.}$$

om gedurende verdere metingen tot 7 Juli '04 een waarde te behouden, die binnen de grenzen der waarnemingsfouten hieraan gelijk bleef.

CHAPPUIS[1]) vond een dergelijke afname n.l. 0.1 mm. in de drie maanden bij een nulpuntsdruk van 1 M. kwik.

Eindelijk is ook bij den luchtmanometer eene afname van het normaalvolume door KUENEN en ROBSON en door Dr. KEESOM (zie Med. N°. 88 § 3) waargenomen. Het zelfde verschijnsel werd onlangs vastgesteld bij den met waterstof gevulden hulpmanometer in Med. N°. 78 vermeld, bij een nieuwe vergelijking met den open standaardmanometer. Deze vergelijking zal in een volgende Mededeeling ter sprake komen.

Uit het bereiken van een eindtoestand bij den thermometer volgt wel, dat het bestaan van een lek uitgesloten is.

Het meest voor de hand ligt de nulpuntsveranderingen toe te schrijven aan een absorptie, die zich langzaam naar den druk regelt. Wat de absorptie van het gas in het kwik, de adsorptie er van aan den wand en de uitwisseling van het gas met een dun laagje tusschen den wand en het kwik betreft, deze kunnen, al zijn zij niet volstrekt nul, buiten beschouwing blijven. Want bij de manometers,

---

[1]) Nouvelles études sur les thermomètres à gaz, Travaux et Mémoires. T. XIII p. 32.

waar geen andere dan deze werkingen zich kunnen openbaren, wordt de druk van het gas soms gedurende geruimen tijd zeer hoog opgevoerd en zijn de veranderingen van het normaalvolume desniettegenstaande veel geringer dan bij de thermometers.

Veeleer zal daarom gedacht moeten worden aan eene langzame oplossing in en verdamping uit de kitlaag, die tusschen de stalen dopjes is aangebracht.

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt ter uitgave in de Werken eene verhandeling aan, getiteld: *„Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume"*, 2te Abhandlung.

Aardkunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt namens den Heer VAN BEMMELEN eene verhandeling aan van den Heer H. G. JONKER, getiteld: *„Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland"* (1734—1906).

De Voorzitter stelt deze verhandeling in handen van de Heeren J. M. VAN BEMMELEN, K. MARTIN en G. A. F. MOLENGRAAFF om daarover in de volgende vergadering advies uit te brengen.

Voor de Boekerij wordt aangeboden door den Heer KAMERLINGH ONNES namens den Heer W. VAN BEMMELEN: *„Erdmagnetische Pulsationen"*, (Sonderabdruck aus dem HANN-Band der Meteorologischen Zeitschrift 1906); en door den Heer BOLK: *„Das Cerebellum der Säugetiere. Eine vergleichend-anatomische Untersuchung."*

De vergadering wordt gesloten.

(7 November, 1906).

ERRATA.

In het verslag der vergadering van 30 Juni 1906 leze men:

p. 114, r. 10 v. b.: K_{ha} (K_d op Pl. II) in plaats van K_{pa},
r. 20 v. b.: achter „is": „geweest" en achter „gas": „en deze plotseling eruit schieten".
r. 3 v. o.: „wand V_{321}" in plaats van „cylinderwand", achter „gummiwand": V_{42}.
p. 126, r. 3 v. b.: X § 1 in plaats van § 1,
r. 4 v. b.:
r. 8 v. o.: Med. N°. 94^d in plaats van Med. N°. 94^a.
p. 127, r. 6 v. o.:
p. 131, r. 16 v. o.: Pl. VI in plaats van Pl. IV.
p. 132, r. 14 v. o.: vóór „volgt": „bij —180° C." en 10^{-18} mM. in plaats van 10^{-19} mM.
p. 142, r. 1, 2, 3 v. o. behooren te staan boven aan de bladzijde.
p. 146, r. 8 v. o.: in kolom III [—182.604] in plaats van —182.640 en [—182.828] in plaats van —182.828.
p. 147, r, 21 v. b.: —88° in plaats van —81°.
p. 148, r. 4 v. o.: moet „(10 microvolt)" vervallen.
p. 149, r. 17 v. b.: —0.024019 in plaats van +0.024019.
p. 150, r. 16 v. b.: [—182.604] in plaats van —182.604.
r. 17 v. b.: [—182.750] „ „ „ [—182.750.
r. 18 v. b.: [182.828] „ „ „ —182.828,
r. 16, 17 en 18 v. b. in kolom III tot VIII àlle getallen te verhoogen met 10.
p. 151, § 13: zie de uitvoeriger omschrijving in de Proceedings.
p. 155, r. 4 en 3 v. o.: „en het reservoir A" in plaats van „in dezen stand"
r. 2 en 1 v. o.: „waarna het kwik weer in A werd toegelaten en de toestel weder in het waterbad gebracht werd." in plaats van „en omgedraaid" enz.
p. 158, r. 15 v. o.: —86,2 in plaats van 86,2.
p. 160, r. 16 v. o.: achter „temperatuur": 0
r. 14 v. o.: „temperatuurbepalingen" in plaats van „de metingen"
p. 161, r. 18 v. o.: „glascylindertje" in plaats van „gascylindertje".
p. 162, r. 13 v. b.: achter „§ 10": „en zijn"
r. 15 en 14 v. o.: „Maar ook eene kubische formule blijkt, zelfs wanneer men de waterstoftemperaturen buiten beschouwing laat, onbruikbaar te zijn."

p. 163, tabel I, in plaats van de vier waarden voor $W—R_{Al}$: — 0.061, + 0.082, — 0.110, — 0.082.

p. 164, r. 8 v. b.: $\frac{10^6}{T^3}$ en $\frac{10^6}{(273.09)^3}$ in plaats van $\frac{10^3}{T^3}$ en $\frac{10^3}{(273.09)^3}$.

r. 9 v. b.: „zal worden" in plaats van „wordt"

p. 165, r. 12 v. o.: „fout" in plaats van „afwijking,"

r. 11 v. o.: „van de formule" is te schrappen,

r. 7 v. o.: „0.010" in plaats van „0.10"; aan dezen regel is toe te voegen: „terwijl die in de bepaling van den weerstand niet in aanmerking komt. In hoeverre het grootere bedrag der verschillen tusschen de waarnemingen en de formule ligt aan half systematische fouten of aan de formule, kan nog niet worden uitgemaakt."

p. 166, r. 4 v. o.: achter „als": „bij het onderzoek in,"

p. 168, boven is uitgevallen de zin: „Voor den weerstand van den gouddraad zouden wij om in overeenstemming te zijn met DEWAR bij het kookpunt van waterstof hebben moeten vinden 1,708 Ω in plaats van 2,364 Ω."

r. 7 v. o.: „fout" in plaats van „afwijking"

r. 6 v. o.: achter „waarneming": „naar de vergelijking"

KONINKLIJKE AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN TE AMSTERDAM.

VERSLAG VAN DE GEWONE VERGADERING DER WIS- EN NATUURKUNDIGE AFDEELING van Zaterdag 24 November 1906.

Voorzitter: de Heer D. J. KORTEWEG.
Secretaris: de Heer J. D. VAN DER WAALS.

INHOUD.

Ingekomen stukken, p. 364.

Verslag van de Heeren VAN BEMMELEN, MARTIN en MOLENGRAAFF over eene verhandeling van den Heer H. G. JONKER, getiteld: „Lijst van geschriften welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland" (1734—1906), p. 364.

H. KAMERLINGH ONNES en C. A. CROMMELIN: „Over de vergelijking van het thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer", (Naschrift), p. 365.

MAX WEBER: „De vischfauna van Nieuw-Guinea", p. 368.

H. J. ZWIERS: „Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet HOLMES en over de storingen in haar elliptische beweging" IV. (Aangeboden door de Heeren H. G. en E. F. VAN DE SANDE BAKHUYZEN), p. 372.

N. H. COHEN: „Over het lupeol". (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. F. HOLLEMAN), p. 383.

N. H. COHEN: „α- en β-amyrine uit break". (Aangeboden door de Heeren P. VAN ROMBURGH en A. F. HOLLEMAN), p. 388.

F. M. JAEGER: „Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 389.

F. M. JAEGER: „Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere vloeistoftoestanden kunnen vertoonen". (Aangeboden door de Heeren A. P. N. FRANCHIMONT en H. W. BAKHUIS ROOZEBOOM), p. 401.

W. KAPTEYN: „Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, tweede orde", p. 410.

F. SCHUH: „Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels" 1e gedeelte. (Aangeboden door de Heeren P. H. SCHOUTE en D. J. KORTEWEG), p. 412.

J. C. KLUYVER: „Eenige formules aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n", p. 423.

E. E. MOGENDORFF: „Over eene nieuwe empirische spectraalformule". (Aangeboden door de Heeren P. ZEEMAN en J. D. VAN DER WAALS), p. 429.

J. A. C. OUDEMANS: „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908. 2de Afdeeling: Verduisteringen", p. 439. (Met twee platen).

H. KAMERLINGH ONNES: „Bijdrage tot de kennis van het ψ-vlak van VAN DER WAALS: XIII. Een gas dat in een vloeistof zinkt", p. 454.

Aanbieding eener verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: "On congenital ataxia in a cat", p. 455.

Aanbieding van boekgeschenken, p. 455.

Errata, p. 456.

Het Proces-Verbaal der vorige vergadering wordt gelezen en goedgekeurd.

Naar aanleiding van de notulen deelde de Heer KORTEWEG mede dat de behandeling der circulaire van de Akademie van Wetenschappen te Berlijn, betreffende samenwerking van de Internationale Associatie met de Internationale Vereeniging voor het onderzoek der zon, wegens afwezigheid van den Voorzitter tot eene volgende vergadering uitgesteld is.

Ingekomen is:

1°. Bericht van de Heeren H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN, KLUYVER en ZEEMAN, dat zij verhinderd zijn de vergadering bij te wonen.

2°. Bericht van de Geologische Commissie, dat zij gaarne de grondmonsters enz. welke verzameld zijn door het Instituut voor de Rijksopsporing van Delfstoffen, in ontvangst zal nemen. Hiervan is aan den Ingenieur-Directeur der Rijksopsporing bericht gezonden.

Aardkunde. — De Heer MOLENGRAAFF brengt het volgende Rapport uit omtrent de verhandeling van Dr. H. G. JONKER, getiteld: *„Lijst van Geschriften, welke handelen over of van belang zijn voor de Geologie van Nederland,* 1734—1906."

Dr. JONKER heeft in zijn bovengenoemde verhandeling getracht in historische volgorde een overzicht te geven van alle geschriften, die handelen over de geologie van Nederland of voor de studie daarvan belangrijk zijn, voor zoover die zijn verschenen van het jaar 1734 tot heden. Hij heeft daarbij gestreefd naar volledigheid en nauwkeurigheid en, voor zoover het mogelijk is dat na te gaan, komt het ons voor, dat beiden door hem op zeer voldoende wijze zijn bereikt. Hij beperkt de opsomming niet tot die geschriften, die betrekking hebben op streken, binnen de grenzen van Nederland gelegen, maar heeft ook alle werken opgenomen, waarin melding wordt gemaakt van de geologische gesteldheid van terreinen, buiten die grenzen gelegen, voor zoover zij bij de studie der geologie van Nederland kunnen te pas komen. Terecht zijn ook niet-geologische geschriften van allerlei aard opgenomen, waarin opmerkingen worden gemaakt of feiten worden vermeld, die eenig licht verspreiden omtrent of betrekking hebben op de samenstelling van den Nederlandschen bodem.

Het stuk bevat 1300 nommers, terwijl aan het slot een lijst is gegeven, waarin wordt opgegeven, in welke openbare bibliotheken de verschillende nommers aanwezig zijn. Het geheel mag een zorgvuldig, ijverig werk worden genoemd, dat van het grootste nut zal

blijken te zijn, voor ieder, die zich in het vervolg met de studie der geologie van Nederland zal bezighouden.

Om die reden hebben wij de eer U voor te stellen de verhandeling van den heer Dr. H. G. JONKER op te nemen in de geschriften der Koninklijke Akademie van Wetenschappen.

G. A. F. MOLENGRAAFF.
Den Haag, 20 Nov. 1906. K. MARTIN.
J. M. VAN BEMMELEN.

De conclusie van het verslag wordt goedgekeurd.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan mede namens den Heer C. A. CROMMELIN een „*Naschrift bij Med. N°. 95^a uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden, over de vergelijking van het thermoelement constantaan-staal met den waterstofthermometer.*"

(Medegedeeld in de vergadering van 27 October 1906).

§ 14. *Nadere voorstelling der waarnemingen door eene formule met vijf termen.*

In § 12 zijn blijkens noot 1 de berekeningen verricht met niet geheel juiste waarden van de temperatuur bij —182° en evenzoo waren de middelbare fouten afgeleid uit de aanname van die minder juiste waarden.[1])

Gebruikt men de juiste waarden van die temperaturen voor de berekeningen van de afwijkingen $W-R_1$, $W-R_2$, $W-R_3$, $W-R_4$ in Tabel VIII, zoo worden de middelbare fouten

voor formule (BI) ± 3.0
(BII) ± 3.4
(BIII) ± 2.8 (2.5 zonder — 217°)
(BIV) ± 2.1

in plaats van

(BI) ± 2.8
(BII) ± 3.2
(BIII) ± 2.6 (2.1 zonder — 217°)
(BIV) ± 1.8

welke ook zouden verkregen zijn als de waarnemingen bij — 182° uitgesloten werden.

1) De correctie bedroeg in temperatuur 0°,081 of in electromotorische kracht 17 microvolt.

Er moest nu nog nagegaan worden of eene herhaling van de vereffening deze middelbare fouten kon verkleinen. Dit bleek duidelijk voor (BI), (BII), (BIII) niet in merkbare mate mogelijk. Voor (BIV) bleek het mogelijk de fouten gelijkmatiger te verdeelen. Echter werd daardoor de kwadraatsom slechts van 2657 tot 2614 teruggebracht.

In plaats van de coëfficienten a_4, b_4, c_4, e_4 en f_4 (zie § 12) komen dan

$$a'_4 = +4.32513 \qquad e'_4 = +0.023276$$
$$b'_4 = +0.409153 \qquad f'_4 = -0.0025269$$
$$c'_4 = +0.0015563$$

De afwijkingen worden als $W - R'_4$ gegeven in Tabel IX.

§ 15. *Voorstelling der waarnemingen door een formule met vier termen.*

Wij hebben de in noot 2 van § 11 aangekondigde berekening van eene formule van den vorm

$$E = a\left(\frac{t}{100}\right) + b\left(\frac{t}{100}\right)^2 + c\left(\frac{t}{100}\right)^3 + e\left(\frac{t}{100}\right)^4 \quad . \quad . \quad . \quad (C)$$

volgens de methode van E. F. v. d. Sande Bakhuyzen, die weder veel gemak bleek op te leveren, thans ook geheel uitgevoerd.

Gevonden worden vier oplossingen (C) en wel (CI), (CII), (CIII) aansluitende tot — 253°, terwijl bij (CIV) alleen op aansluiting tot — 217° gelet is.

De coëfficienten zijn de volgende:

	1	2	3	4
a	+ 4.30192	+ 4.30571	+ 4.30398	+ 4.33031
b	+ 0.357902	+ 0.366351	+ 0.363681	+ 0.421271
c	— 0.0250934	— 0.0192565	— 0.020071	+ 0.018683
e	+ 0.0257462	+ 0.0270158	+ 0.0270044	+ 0.035268

De afwijkingen zijn onder $W - R_{CI}$, $W - R_{CII}$, $W - R_{CIII}$, $W - R_{CIV}$ in Tabel IX opgegeven.

Evenals bij de 5-termige formule bleek ook nu weder de afwijking bij — 182° grooter dan de anderen.

Bij berekening 3 werd getracht de fouten gelijkmatiger te verdeelen, doch hun kwadraatsom bleek nu grooter te zijn geworden.

De middelbare fouten zijn, bij (CI), (CII), (CIII) de waarnemingen tot — 253°, bij (CIV) slechts tot — 217° meenemende, voor

(*C* I) ± 3.0
(*C* II). ± 2.9
(*C* III) ± 3.0
(*C* IV) ± 2.3

Sluit men — 182° uit dan worden deze

(*C* I) ± 2.7
(*C* II) ± 2.6
(*C* IV) ± 1.8

De middelbare fouten van (*C* I), (*C* II), (*C* III) moeten vergeleken worden met die van (*B* I) en (*B* III), die van (*C* IV) met die van (*B* IV).

Deze vergelijking leert, dat de viertermige formule voor de voorstelling der waarnemingen nagenoeg gelijkwaardig geacht kan worden met de vijftermige en dat dus (de opmerking is in overeenstemming met noot 2 van § 13) van de calibratie tot — 217° het geringste aantal temperaturen waarbij waarnemingen noodig zijn, *vier* bedraagt. Dat drie niet voldoende zijn werd reeds in § 11 aangetoond. Dit blijkt ook duidelijk, als men de middelbare fout opmaakt, die voor de drietermige formule tot ± 7.6 stijgt.

TABEL IX.

AFWIJKINGEN VAN DE CALIBRATIE-FORMULES VAN HET THERMO-ELEMENT CONSTANTAAN-STAAL.

I	II	III	IV	V	VI	VII
N⁰.	t	$W-R_4'$	$W-R_{CI}$	$W-R_{CII}$	$W-R_{CIII}$	$W-R_{CIV}$
22	— 29°.82	— 12	+ 20	+ 15	+ 18	— 19
24 en 20	— 58.75	+ 16	+ 30	+ 26	+ 29	+ 4
21 en 23	— 88.15	+ 14	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1
1 en 17	— 103.70	— 6	— 29	— 28	— 30	— 20
16 en 18	— 139.86	+ 1	— 26	— 24	— 31	— 17
19	— 158.83	— 10	— 10	— 10	— 18	— 10
3, 11 en 5	[— 182.73]	+ 26	+ 46	+ 44	+ 35	+ 34
4, 28 en 6	— 195.19	+ 2	+ 23	+ 21	+ 12	+ 11
12, 27 en 7	— 204.70	— 20	— 9	— 11	— 19	— 18
26, 14, 13 en 8	— 212.85	+ 24	+ 21	+ 21	+ 13	+ 21
29, 15 en 25	— 217.55	— 15	— 30	— 29	— 37	— 23
30	— 252.93	+ 280	0	+ 20	+ 20	+ 150
31	— 259.24	+ 485	+ 115	+ 141	+ 143	+ 313

Dierkunde. — De Heer Weber doet eene mededeeling over: „*De vischfauna van Nieuw-Guinea.*"

In het jaar 1877 verscheen van de hand van P. Bleeker „Quatrième mémoire sur la faune ichthyologique de la Nouvelle-Guinée," die 341 soorten optelt. Het zijn uitsluitend marine en brakwater-visschen, die hier genoemd worden en het bewijs leveren — wat trouwens niet anders te verwachten was —, dat de litorale vischfauna van Nieuw-Guinea deel uitmaakt van de groote indo-pacifische fauna, die zich uitstrekt van de Oostkust van Afrika tot aan de Westpacifische eilanden.

Dit werd andermaal bevestigd door soortgelijke lijsten, die W. Macleay in 1876 en in 1882 bekend maakte en die op de Zuidkust van Britsch Nieuw-Guinea en de Torresstraat betrekking hadden. Ook zij beantwoorden niet aan den wensch van Bleeker, dat men er zich op moge toeleggen ook kennis te krijgen van de riviervisschen van Nieuw-Guinea. Aan dien wensch werd voor een deel voldaan door mededeeling omtrent visschen gevangen in de Strickland-, Goldie-, Paumomu-rivier en een aantal beken, alle gelegen in het zuid-oostelijke of Britsche gedeelte van het eiland: mededeelingen te danken aan W. Macleay, E. P. Ramsay, I. Douglas-Ogilby, A. Perugia, G. Boulenger. Het aantal dier visschen bedraagt 25. Zoolang echter het Duitsche en Nederlandsche gedeelte van Nieuw-Guinea aangaande dit gedeelte der fauna onbekend bleef, waren zij niet in staat ons een beeld te geven van den aard der vischfauna van dit groote eiland. Dit is te meer te betreuren als men bedenkt, dat zoetwatervisschen een uitstekend hulpmiddel zijn voor de beantwoording van zoögeographische vragen. Wil men hiervan gebruik maken, zoo heeft men evenwel het volgende in het oog te houden.

Treft men in streken, die thans door zee gescheiden zijn, eendere of nauwverwante zoetwatervisschen aan voor die de zee eene onoverkomelijke barrière is, zoo is men tot het besluit gerechtigd, dat die streken vroeger in directen of indirecten samenhang stonden. Er zijn echter onder de riviervisschen kategoriën, die tot zoodanige bewijsvoering niet gebruikt kunnen worden of slechts met groote omzichtigheid. Naast trekvisschen zijn hier die visschen te noemen, die tevens in brak-, des desnoods ook in zeewater kunnen voorkomen.

De zoog. wet van E. von Martens zegt, dat van de polen naar den equator het aantal brakwaterdieren toeneemt. Dat geldt ook voor de visschen, in het bizonder voor die van den indo-australischen Archipel en in zeer opmerkelijke mate voor die van de eilanden beoosten Borneo en Java. Dank zij hunne vroegere landverbinding

met het vasteland van Azië zijn de groote Soenda-eilanden eene vischfauna deelachtig geworden, waarvan de qualitatief en quantitatief belangrijkste elementen geen gelegenheid hadden zich verder oostwaarts te verspreiden. De oostelijke eilanden-wereld bood dus in haar rivieren een door visschen nagenoeg onbewoond terrein aan, waarvan allengs gebruik gemaakt werd door visschen, die in zee- of brakwater t'huis behoorende, voldoende elasticiteit bezaten, om ook in zoetwater te kunnen aarden. De concurrentie met de voor het leven in zoetwater beter ingerichte aziatische vormen (Cyprinidae, Mastacembelidae, Ophiocephalidae, Labyrinthici etc.) ontbrak, alles ten voordeele der immigranten van uit zee. De riviervisschen van Celebes pleiten voor deze opvatting even als hetgeen men weet van Ternate, Ambon, Halmahera enz.

Het gelijke verschijnsel doet zich voor in de zoete wateren van Australië. Zij herbergen echter daarnaast autochthone vormen, deels van hoogen ouderdom, deels jongere vormen, die voor een deel oorspronkelijk zeker marine immigranten waren, maar zich geheel aan het leven in zoet water hebben aangepast en het character van echte zoetwatervisschen hebben aangenomen.

De fauna van Australië verheugt zich tegenwoordig in een algemeene en warme belangstelling — er zijn er immers die zelfs meenen, dat de wieg van den mensch hier zou gestaan hebben — daarbij speelt eene belangrijke rol de duur der isolatie van Australië van andere deelen der aarde. Een gewichtige schakel in dien keten van overwegingen vormt Nieuw-Guinea.

Het is daarom een heugelijk feit, dat de Nederl. Nieuw-Guinea-expeditie van 1903 onder leiding van Prof. A. A. Wichmann, naast andere schatten ook eene uitgebreide verzameling visschen uit verschillende meren en talrijke rivieren en beekjes meêbracht, die ons een goed inzicht geeft in den aard der zoetwater-fauna van het noorden van het eiland. Het was een aanwinst, dat ik bij de studie dezer verzameling gebruik kon maken van hetgeen Dr. F. W. R. Koch, de medicus der expeditie van het Kon. Aardrijkskundig Genootschap naar Zuid-Nieuw-Guinea, in het brakke water van den mond der Meraukerivier had bijeengebracht.

Uit het resultaat van die studie, dat elders gepubliceerd zal worden, mogen enkele meer algemeene uitkomsten vermeld worden.

Alle visschen bijeentellende, die thans uit meren, beken en rivieren van Nieuw-Guinea bekend zijn, krijgt men een cijfer van 90 soorten. Hiervan werden slechts ongeveer 31 uitsluitend in zoetwater aangetroffen.

Bij nader onderzoek blijkt, dat op een aantal uitzonderingen na

deze soorten of van elders ook uit brak- en zeewater bekend zijn; of dat ten minste de naaste verwanten althans ook in brakwater kunnen voorkomen. Op treffende wijze vertoont dus Nieuw-Guinea het verschijnsel, dat immigratie van uit zee of uit het brakke water een buitengewone rol gespeeld heeft en wellicht nog speelt, bij de bevolking zijner rivieren.

Herinneren wij ons andermaal ons punt van uitgang: dat de marine vischfauna van Nieuw-Guinea deel uitmaakt van de groote indopacifische en meer in het bizonder van de marine vischfauna van den indo-australischen archipel. Dit voor oogen houdende zou men tot het besluit kunnen komen, dat uit de vischfauna der rivieren van Nieuw-Guinea niet veel te leeren valt, ten aanzien van de geschiedenis van dat eiland. Zoodanig besluit ware onjuist. Het blijkt toch, dat juist die visschen, die charakteristiek zijn voor de zoete wateren van Nieuw-Guinea voor één deel:

1. bij genera behooren, die men buitendien slechts van Australië kent (Pseudomugil, Rhombatractus, Melanotaenia, Eumeda);

2. voor een ander deel bij genera, die ten nauwste verwant zijn aan uitsluitend autralische genera. Zoo is Lambertia nauw verbonden met Eumeda; Glossolepis met Rhombatractus, terwijl de 3 nieuwe Apogon-soorten van Noord-Nieuw-Guinea zich aansluiten bij australische. Eindelijk vormen de van Nieuw-Guinea bekende Hemipimelodussoorten een eigen groep, die afwijkt van die uit den naburigen Indischen Archipel.

Al wat dus aan de zoetwater-fauna van Nieuw-Guinea een van den Indischen Archipel afwijkenden stempel geeft, is tevens characteristiek voor Australië. Twaalf van haar soorten (behoorende bij Pseudomugil, Rhombatractus, Melanotaenia, Glossolepis) behooren bij de familie of onderfamilie der Melanotaeniidae, die slechts uit Australië en Nieuw-Guinea bekend is.

Ik aarzel dan ook niet te beweren, dat de riviervisschen van Nieuw-Guinea uit 2 groepen bestaan fluviomarine, die indo-australisch of als men wil indo-pacifisch zijn en evengoed b.v. op Ambon of Celebes konden worden aangetroffen. In deze kategorie valt ook Rhiacichthys (Platyptera) novae-guineae Blgr., door Pratt in bergstroomen 4000 voet hoog in de Owen Stanley Range ontdekt. Boulenger noemt de ontdekking van een visch van het Genus Rhiacichthys, „so admirably adapted to life in mountain torrents” eene zeer belangrijke. Hij geeft op, dat de nauwverwante Rh. asper C. V. van Bantam, Celebes en Luzon bekend is. Allicht komt men hierdoor onder den indruk, dat men het bij Rh. novae-guineae met een visch te doen heeft, die geheel buiten deze kategorie valt en wiens naaste familielid

aan zoet water in streken, die meer bij het aziatische faunagebied behooren, gebonden is. Rh. asper, die maar weinig verschilt van Rh. novaeguineae is echter bovendien door BLEEKER van Sumatra en, wat veel belangrijker is, door GÜNTHER van de Wanderer Bay op het eiland Guadalcanar, Salomo-Eilanden, evenwel in „fresh water" opgegeven. In elk geval dus dicht bij zee. Dat geldt ook voor een vroegere mededeeling van mij, dat hij op Ambon werd aangetroffen, meer nog van het exemplaar, dat ik bij Balangnipa, in den benedenloop van den Tangka, kort voor de uitmonding in den golf van Boni, ving. Hier was het water reeds brak en stroomde langzaam. Rhiacichthys heeft dus een zeer wijde verspreiding, schuwt in elk geval brakwater niet, waarmede het voorkomen in Nieuw-Guinea in beteekenis verliest.

Een tweede groep: het charakteristieke element der fauna vormende, is tevens australisch. Deze laatste groep eischt verdere verklaring, wat haar oorsprong aangaat.

De hedendaagsche toestand, waarbij de Torresstraat Australië van Nieuw-Guinea scheidt, vormt door die straat een onoverkomelijke barrière, juist voor die groep, die ik charakteristiek noemde. Want al mogen ook enkele soorten van Rhombatractus en Melanotaenia tot den riviermond afzakken en zelfs zwak brakwater kunnen verduren, van de ongeveer 24 soorten kent men geen enkele uit zee. De barrière kan dus niet teniet gedaan worden door de groep van eilanden in de Torres-straat. Zij zijn daarvoor te arm aan zoetwater, te zeer koraaleilanden, daargelaten, dat zij onderling en vooral van Nieuw-Guinea en van Australië gescheiden zijn, door breede zeearmen met een hoog zoutgehalte en sterke getijstroomen. Het gelijktijdig voorkomen dier charakteristieke vormen én in Nieuw-Guinea én in Australië eischt dus het vroeger bestaan van eene vastere en uitgebreide verbinding. Die verbinding moet zoo ver van het heden verwijderd zijn, dat b.v. de representanten der straks genoemde Melanotaeniiden tijd hadden zich soortelijk te scheiden, wat feitelijk gebeurd is, want van de 12 Melanotaeniiden, die men thans reeds van Nieuw-Guinea kent en van de ongeveer 12, die uit het tropische en subtropische Australië beschreven zijn, is er geen een gemeenzaam, alhoewel enkele soorten slechts zeer geringe verschillen vertoonen. Lang geleden (naar geologische tijdrekening) kan het dus alweer niet zijn, dat de boven geeischte verbinding tusschen Nieuw-Guinea en Australië bestond. Taxatie van dien termijn ligt voorloopig op het gebied der hypothese. Als daarbij zoogeographisch, meer in het bizonder ichthyologisch sentiment een woord mag meespreken, zou ik het tijdstip dier landverbinding niet verder

willen zoeken, dan in het plioceen en hare verbreking in het pleistoceen, waarvoor wellicht ook andere zoologische overwegingen pleiten.

Op verre na is hiermede niet het laatste woord in deze materie gesproken. Wij mogen de hoop koesteren, dat de nieuwe expeditie naar Zuid-Nieuw-Guinea onder leiding van Mr. H. A. LORENTZ, die juist groote rivieren wil bevaren, nieuw licht zal verspreiden.

Sterrekunde. — De Heer H. G. VAN DE SANDE BAKHUYZEN biedt eene mededeeling aan van den Heer H. J. ZWIERS: „*Onderzoekingen over de baan van de periodische komeet Holmes en over de storingen in haar elliptische beweging.* IV."

(Mede aangeboden door den Heer E. F. VAN DE SANDE BAKHUIJZEN).

In de zitting dezer Akademie van 27 Januari 1906 werd mededeeling gedaan van mijn voorloopige onderzoekingen omtrent de storingen, die de komeet Holmes gedurende haar onzichtbaarheid van Januari 1900 tot Januari 1906 zou ondergaan, en tevens van een uitvoerige efemeride voor haar schijnbare plaatsen van 1 Mei tot 31 December 1906. Ook ditmaal heeft deze vooruitberekening weer tot haar ontdekking mogen leiden. Het vermoeden, dat er wegens den grooten afstand tot de aarde, en daaruit voortvloeiende lichtzwakte, in de eerste maanden weinig kans zou zijn voor haar waarneming, is door de uitkomst bevestigd. Eerst den 30sten Augustus van dit jaar ontving de Sterrewacht te Leiden het telegrafisch bericht, dat de komeet zich vertoonde op een fotografische opname, die prof. MAX WOLF op de sterrewacht te Koenigstuhl bij Heidelberg in den nacht van 28 op 29 Augustus genomen had van de streek van den hemel, waar zij zich volgens de berekening bevinden moest. De ruw uitgemeten plaats

$$\alpha = 61^\circ\ 51' \qquad \delta = +\ 42^\circ\ 28'$$

voor $13^h\,52^m1$ plaatselijken tijd bleek in behoorlijke overeenstemming met de berekening.

Nog tweemaal daarna, op 25 September en op 10 October, heeft men te Koenigstuhl de plaats der komeet fotografisch bepaald, en telkens had prof. WOLF de vriendelijkheid, mij onmiddellijk mededeeling te doen van de plaatsen, zooals die na nauwkeurige uitmeting van de clichés verkregen waren. Ofschoon WOLF omtrent

de September-waarneming verklaarde [1]), dat de helderheid voldoende toegenomen was om de komeet ook in groote kijkers zichtbaar te doen zijn, is tot heden toe geen enkele visueele waarneming te mijner kennis gekomen. De drie Heidelberger platen vormen dus op het oogenblik het eenige materiaal, dat ter toetsing van de vroeger gegeven elementen en efemeride dienen kan. Ik deel hun uitkomsten hier mee, zóó als ik het genoegen had, ze van prof. WOLF te ontvangen.

1°. „Den Kometen Holmes habe ich auf der Platte von 28 August rechtwinklig an die 4 Sterne

A.G. Bonn 3456, 3462, 3472, 3493

angeschlossen, und die Messungen nach der Turner'schen Methode reduziert. Ich finde für 1906.0:

$$\alpha = 4^h\ 7^m\ 34^s84 \qquad \delta = +\ 42°\ 30'\ 59''9$$

für die Aufnahmezeit: 1906 Aug. 28, $13^h\ 52^m1$ Kgst. Das äusserst schwache zentrale Kernchen wurde dabei eingestellt. Die Messung und Rechnung bezieht sich auf die mittleren Orte der 4 Sterne für 1906; sonst ist gar nichts angebracht."

(Schrijven van 5 September 1906).

2°. „Ich habe Ihren Kometen nochmals am 25 aufgenommen und finde ihn entschieden etwas heller. Den Ort nach Turner mit 3 Sternen (A.G. Bonn 3710, 3760, 3778) fand ich

1906 Sept. 25: $12^h\ 46^m0$ M.Z. Kgst.

$$\alpha_{1906.0} = 4^h\ 32^m\ 10^s02 \qquad \delta_{1906.0} = +\ 47°\ 34'\ 54''6$$

Ich habe auch den letzten Ort (von 28 Augustus) mit nur 3 Sternen nochmals gerechnet (weil ein Stern sehr ungünstig war) und fand für 1906 August 28: $13^h\ 52^m1$ Kgst.:

$$\alpha_{1906.0} = 4^h\ 7^m\ 35^s00 \qquad \delta_{1906.0} = +\ 42°\ 30'\ 58''3$$

Ich bin nicht sicher, ob diese Bestimmung aus 3 Sternen besser ist als die erst mitgeteilte." (Schrijven van 29 September 1906).

3°. „Herr Dr. KOPFF hat gestern den Ort einer Aufnahme vom 10 Okt. 1906 des Kometen Holmes ausgemessen .....

1906 Okt. 10: $9^h\ 1^m0$ Kgst.

$$\alpha_{1906.0} = 4^h\ 34^m\ 48^s94 \qquad \delta_{1906.0} = +\ 49°\ 54'\ 59''2$$

Sterne: A.G. Bonn 3759, 3768, 3777 ..... Der Komet war

[1]) *Astron. Nachr.*, N°. 4123, S. 302.

diesmal schon recht schwach wahrnehmbar, schwächer als im September. Die Messung ist deshalb auch wohl etwas unsicherer."

(Schrijven van 13 October 1906).

Wat de waarneming op 28 Augustus betreft, heb ik aan de aansluiting op 3 sterren de voorkeur gegeven.

Voor de herleiding op schijnbare plaats heb ik, evenals vroeger bij de efemeride, gebruik gemaakt van de constanten van den Nautical Almanac, waarbij de kortperiodische termen weggelaten zijn. De zonneparallaxis op 8"80 aannemende, vind ik voor de sterrewacht te Heidelberg de volgende constanten:

$$\lambda = - 0^h 34^m 54^s 8$$
$$tg\,\varphi' = 0.06404$$
$$A = 9.58267$$
$$D = 0.82425$$

waarmee de parallactische correctie's van de komeet gerekend zijn. De volgende tabel geeft een overzicht van de herleide waarnemingen.

TABEL I.

N⁰.	Herl. op sch. pl.		Parallaxis		Schijnbare geoc. plaats	
	Δα	Δδ	Δα	Δδ	α	δ
	s	"	s	"	h m s	° ' "
1	+ 1.888	—8.55	— 0.191	+1.24	4 7 36.697	+42 30 50.99
2	+ 2.929	—8.57	— 0.217	+0.92	4 32 12.732	+47 34 46.95
3	+ 3.593	—7.51	— 0.298	+2.35	4 34 52.235	+49 54 54.04

Voor de vergelijking met de efemeride heb ik gebruik gemaakt van mijn oorspronkelijke berekeningen, die zoowel in α als in δ één decimaal meer bevatten dan de in druk verschenen waarden. De berekende plaatsen en hun vergelijking met de bovenstaande waarnemingen zijn in de volgende tabel opgenomen.

TABEL II.

Plaatselijke tijd	Aberratie-tijd.	Berek. schijnbare plaats		Waarn.—Berek.	
		α	δ	α	δ
	d	h m s	° ' "	s	"
Aug. 28.553602	0.013211	4 7 29.753	+42 30 24.28	+6.94	+26.7
Sept. 25.507699	.012005	4 32 4.255	+47 34 29.94	+8.48	+17.0
Oct. 10.351449	.011462	4 34 43.017	+49 54 43.02	+9.22	+11.0

Tegelijk met de efemeride heb ik vroeger een tabel meegedeeld van de veranderingen, die de rechte klimming en declinatie ondergaan zouden, als men den doorgangstijd door het perihelium in de eene of andere richting 4 dagen wijzigt. Vergelijkt men de bovenstaande waarden *W—B* met de getallen dier tabel, dan ziet men, dat door een iets vervroegden doorgangstijd de overeenstemming van Waarn. en Berek. althans in α vrijwel te bereiken zal zijn. De afwijkingen in δ leenen zich minder hiertoe; de veranderingen toch, die δ bij een vervroeging van *T* ondergaat, zijn steeds veel kleiner dan die in α, maar in 't bijzonder is dit het geval in de periode, waarover zich de waarnemingen uitstrekken. Wel is echter uit de tabel voor $\Delta T = -4$ dagen op te maken, dat de positieve fouten in δ door wijziging van *T* niet geheel zullen verdwijnen.

Door een ruwe interpolatie leidde ik uit de 3 verschillen *W—B* in rechte klimming de volgende correcties af voor den doorgangstijd door het perihelium:

waarn. van 28 Aug.: $\Delta T = -0.0900$ dag
„ „ 25 Sept.: -0.0916 „
„ „ 10 Oct.: -0.0896 „

Gemiddeld wordt $\Delta T = -0.0904$ dag, wat bij een middelbare dagelijksche beweging van 517″448 correspondeert met een vergrooting der middelbare anomaliën van 46″8.

Als eersten stap tot verbetering van de aangenomen baanelementen heb ik daarom de 3 plaatsen berekend 1° in de onderstelling, dat alle middelbare anomaliën 40″, — 2° dat zij alle 50″ grooter zouden zijn. De zonnecoordinaten ten opzichte van het middelbaar aequinoctium van 1906.0 heb ik uit den Naut. Almanac geïnterpoleerd.

TABEL III.

1906	*X*	*Y*	*Z*
Aug. 28.540391	— 0.9134887	+ 0.3947635	+ 0.1712510
Sept. 25.495694	— 1.0018399	— 0.0318699	— 0.0138250
Oct. 10.339987	— 0.9565810	— 0.2616405	— 0.1135029

Ter herleiding op schijnbare plaats is aan de middelbare coördinaten der komeet aangebracht in $\alpha : f + g \sin (G + \alpha) \operatorname{tg} \delta$, en in $\delta : g \cos (G + \alpha)$. De volgende tabel geeft de berekende schijnbare plaatsen der komeet in beide onderstellingen.

TABEL IV.

N⁰.	$\Delta M = +40''$		$\Delta M = +50''$	
	α	δ	α	δ
	h m s	° ′ ″	h m s	° ′ ″
1	4 7 35.758	+ 42 30 34.72	4 7 37.266	+ 42 30 37.38
2	4 32 11.451	+ 47 34 31.46	4 32 13.248	+ 47 34 31.85
3	4 34 51.050	+ 49 54 42.20	4 34 53.060	+ 49 54 41.99

Een voldoende controle wordt hier verkregen door de vergelijking der waarden voor $\Delta M = 0''$ (efemeride), $\Delta M = +40''$ en $\Delta M = +50''$.

Door vergelijking met de waargenomen schijnbare, geocentrische plaatsen krijgt men de volgende verschillen $W - B$:

TABEL V.

	$\Delta M = +40''$		$\Delta M = +50''$	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	″	s	″
1	+ 0.939	+ 16.27	— 0.569	+ 13.61
2	+ 1.281	+ 15.49	— 0.516	+ 15.10
3	+ 1.185	+ 11.84	— 0.825	+ 12.05

Door interpolatie tusschen de waarden van $\Delta\alpha$ vindt men hieruit als middelwaarde: $\Delta M = +46''412$, met de volgende resteerende fouten:

N⁰.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	s	″
1	— 0.03	+ 14.7
2	+ 0.13	+ 15.2
3	— 0.10	+ 11.9

Hieruit blijkt, dat door een wijziging van M alleen wel aan de verschillen in α, maar niet voldoende aan die in δ kan worden voldaan. Van wijzigingen in π, φ of μ kon van te voren gezegd

worden, dat geen verdere verbetering te verwachten was; over deze elementen zal ik aan het slot nog een enkel woord zeggen. Anders echter is het met wijzigingen in de ligging van het baanvlak, dus van i en ☊, en daarom heb ik het verband nagegaan, dat tusschen deze, en de berekende plaatsen der komeet bestaat. Daar de rekening met $\Delta M = + 50''$ het dichtst bij de waarheid scheen te komen, heb ik daaraan v en r ontleend, en hiermee opnieuw de plaatsen der komeet berekend in de onderstelling 1°: dat i 10″ grooter was; 2°: dat de lengte van den knoop 10″ kleiner was. Wellicht was voor de tweede onderstelling een iets grooter correctie wenschelijk geweest. De volgende tabel geeft de wijzigingen, die α en δ in beide gevallen ondergaan.

TABEL VI.

N°.	$\Delta i = +10''$		Δ☊ $= -10''$	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
1	$-\overset{s}{0}.149$	$+\overset{''}{10}.00$	$+\overset{s}{0}.040$	$+\overset{''}{1}.26$
2	-0.108	$+11.95$	$+0.067$	$+0.83$
3	-0.111	$+12.88$	$+0.080$	$+0.56$

De getallen uit de tabellen V en VI geven de volgende waarden van de differentiaalquotienten van α en δ naar M, i en ☊, die als coefficienten in de foutenvergelijkingen dienst zullen doen:

	Aug. 28	Sept. 25	Oct. 10
$\frac{\partial\alpha}{\partial M}$	$+0.1508$	$+0.1797$	$+0.2010$
$\frac{\partial\delta}{\partial M}$	$+0.266$	$+0.039$	-0.021
$\frac{\partial\alpha}{\partial i}$	-0.0149	-0.0108	-0.0111
$\frac{\partial\delta}{\partial i}$	$+1.000$	$+1.195$	$+1.288$
$\frac{\partial\alpha}{\partial ☊}$	-0.0040	-0.0067	-0.0080
$\frac{\partial\delta}{\partial}$	-0.126	-0.083	$-0\ 056$

Hierbij is de tijdsecunde voor α en de boogsecunde voor alle andere grootheden als eenheid genomen.

De foutenvergelijkingen in α werden vermenigvuldigd met $15 \cos \delta$, en in plaats van $\Delta ☊$ werd $\frac{\Delta ☊}{10}$ als onbekende ingevoerd.

Foutenvergelijkingen.

a. Uit de Rechte Klimmingen

$$0.22202\ \Delta M + 9.21681_n\ \Delta i + 9.64568_n \frac{\Delta ☊}{10} = 0.79873_n$$

$$0.25966\ „ + 9.03853_n\ „ + 9.83118_n\ „ = 0.71776_n$$

$$0.28811\ „ + 9.03023_n\ „ + 9.88800_n\ „ = 0.90136_n$$

b. Uit de Declinaties

$$9.42488\ \Delta M + 0.00000\ \Delta i + 0.10037_n \frac{\Delta ☊}{10} = 1.13386$$

$$8.59106\ „ + 0.07737\ „ + 9.91908_n\ „ = 1.17898$$

$$8.32222_n\ „ + 0.10992\ „ + 9.74819_n\ „ = 1.08099$$

De coefficienten zijn logarithmisch; de tweede leden zijn ontleend aan kolom 4 en 5 van tabel V, zoodat de te vinden ΔM verbonden moet worden met de correctie van $+ 50''$.

Uit bovenstaande foutenvergelijkingen worden op de bekende wijze de volgende normaalvergelijkingen gevonden:

$$+ 9.9278\ \Delta M - 0.39596\ \Delta i - 3.8260 \frac{\Delta ☊}{10} = - 31.495$$

$$- 0.39596\ „ + 4.1375\ „ - 2.7434\ „ = + 49.637$$

$$- 3.8260\ „ - 2.7434\ „ + 3.8423\ „ = - 23.951$$

Deze vergelijkingen worden eenvoudiger, wanneer men, behalve ΔM, slechts één der beide andere onbekenden invoert. Wil men bijv. trachten door variatie alleen van M en i de waarnemingen voor te stellen, dan wordt niet alleen $\Delta ☊ = 0$, maar vervalt de 3e vergelijking.

1°. *Oplossing met* $\Delta ☊ = 0$.

De vergelijkingen geven

$$\Delta M = - 2''\ 7042$$

$$\Delta i = + 11.74$$

en de overblijvende fouten worden:

1.	$\Delta \alpha = + 0^s014$	$\Delta \delta = + 2''59$
2.	$= + 0.097$	$+ 1.18$
3.	$= - 0.151$	$- 3.13$

2°. *Oplossing met* $\Delta i = 0$.

In dit geval vindt men :

$$\Delta M = - \quad 9''0461$$
$$\Delta \Omega = - 2'32''41$$

en als overblijvende fouten :

1.	$\Delta\alpha = + 0^s185$	$\Delta\delta = - 3''18$
2.	$+ 0.089$	$+ 2.80$
3.	$- 0.226$	$+ 3.32$

3°. *Oplossing met de* 3 *onbekenden.*

Deze oplossing geeft :

$$\Delta M = - \quad 5''3045$$
$$\Delta i = + \quad 7.32$$
$$\Delta \Omega = - 1'\,2.90$$

en er blijven volgens de foutenvergelijkingen de volgende verschillen Waarn. — Berek. over :

1.	$\Delta\alpha = + 0^s088$	$\Delta\delta = - 0''23$
2.	$+ 0.095$	$+ 1.34$
3.	$- 0.181$	$- 1.01$

Zooals men ziet, voldoen de oplossingen met ΔM en Δi, en die met ΔM en $\Delta \Omega$ beide redelijk wel aan de waarnemingen, de eerste echter iets beter, vooral in rechte klimming. Toch blijft bij beide oplossingen nog een zekere gang in de overblijvende declinatiefouten niet te miskennen. Daarom geef ik voorloopig de voorkeur aan de oplossing met drie onbekenden, waarbij geen systematische gang in de fouten overblijft. Als meest plausibele elementen voor den terugkeer van 1906 beschouw ik dus de volgende :

Epoche 1906 Januari 16.0 M.T. Greenw.

$$M_0 = 1266456''838$$
$$= 351°47'36''838$$
$$\mu = 517''447665$$
$$\log a = 0.5574268$$
$$T = 1906 \text{ Maart } 14.09401$$
$$\varphi = 24°20'25''55$$
$$e = 0.4121574$$
$$\left.\begin{array}{l} i = 20°49'\ 0''62 \\ \pi = 346\ \ 2\ 31.63 \\ \Omega = 331\ 44\ 37.85 \end{array}\right\} 1906.0$$

Men zal echter inzien, dat uit den aard der zaak de zekerheid van deze elementen niet vergeleken kan worden met die, welke ik voor vroegere verschijningen der komeet heb kunnen afleiden. Vooreerst omvatten de waarnemingen slechts een tijdsverloop van 43 dagen, waarin de komeet met haar grooten periheliumafstand slechts een heliocentrischen boog van nog geen 12° heeft afgelegd. Ten tweede zijn 3 waarnemingen met hun onvermijdelijke onvolkomenheden in het algemeen slechts voldoende om een benaderd denkbeeld te krijgen van de baan. Het mag reeds worden beschouwd als een bewijs voor de bekwaamheid en nauwgezetheid der Heidelberger waarnemers, dat met hun kortfocale fotografische opnamen van een visueel nog geheel onzichtbaar neveltje, een nauwkeurigheid te bereiken was, vergelijkbaar met die van micrometer-metingen bij honderden malen helderder voorwerpen. Toch vergete men niet, dat reeds de verwerping van één der 4 vergelijkingssterren op de plaats van 28 Augustus een invloed had van 0^s16 in α en $1''6$ in declinatie, of van $2''39$ in boog van een grooten cirkel.

Als proef op de som heb ik de 3 waarnemingen ten slotte door directe berekening uit de gevonden elementen afgeleid.

Heliocentrische aequatoriale coördinaten:

$$x = [9.993\ 7648.63] \sin (v + 77°37'28''36)$$
$$y = [9.876\ 2140.59] \sin (v - 20\ 58\ 46.82)$$
$$z = [9.832\ 7020.56] \sin (v - \ 1\ 46\ 46.76)$$

De volgende tabel bevat de hiermee berekende schijnbare plaatsen der komeet, en de verschillen W—B.

TABEL VII.

N⁰.	α	δ	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
	h m s	° ' "	s	"
1	4 7 36.602	+ 42 30 51.32	+ 0.095	— 0.33
2	4 32 12.633	+ 47 34 45.69	+ 0.099	+ 1.26
3	4 34 52.412	+ 49 54 55.19	— 0.177	— 1.15

De overeenstemming tusschen deze direct gevonden verschillen, en de door substitutie in de foutenvergelijkingen verkregen waarden, is een voldoende controle op de geheele rekening.

De elementen μ, π en φ.

De elementen, waarop de voor 1906 gegeven efemeride berust,

zijn die van „Système VII" op p. 78 van mijn Deuxième Mémoire, door aanbrenging der Jupiterstoringen op 1906 herleid. De middelbare fout der daar gevonden waarde van μ is zoo klein, dat het, hoewel niet absoluut onmogelijk, toch zeer onwaarschijnlijk is, dat de gevonden correctie voor de middelbare anomalie geheel of zelfs grootendeels door een fout in μ verklaard kon worden. Rekent men, dat de gevonden ΔM eigenlijk geldt voor de middelste waarneming, dus voor 25 September, dan zou men hebben:

$$\Delta \mu = + \frac{44'' \, 6955}{2662.50} = + 0'' \, 016787$$

zoodat de werkelijke fout van μ 67 maal grooter zou zijn dan de middelbare. De middelbare anomaliën voor 28 Augustus en 10 October zouden dan respectievelijk slechts 0″ 469 kleiner en 0″ 249 grooter worden dan de aangenomene.

Veeleer is het aan te nemen, dat de gevonden correctie van M ontstaan is door de verwaarloosde storingen van dat element, met name door Saturnus. Deze storing heeft den vorm

$$\Delta M = \int_{t_0}^{t} \frac{dM}{dt} \, dt + \int\!\!\int_{t_0}^{t} \frac{d\mu}{dt} \, dt^2 .$$

Zelfs als men de waarde van beide termen afzonderlijk kende in plaats van hun som, ook dan nog zou het onmogelijk zijn, uit de waarde van het dubbelintegraal te besluiten tot de eindwaarde van $\int \frac{d\mu}{dt} \, dt$, d.i. tot de correctie van μ voor 1906. Eerst waarnemingen, die zich over veel langer periode uitstrekken, kunnen hieromtrent beslissen.

Iets dergelijks geldt van π en φ. Voor het korte tijdvak, door de waarnemingen omvat, kan zelfs een willekeurig deel van de correctie van M vervangen worden door een wijziging van de twee genoemde elementen. Houden we het baanvlak vast, dan hangt de schijnbare plaats van het hemellichaam, behoudens kleine veranderingen in den radius-vector, die nabij de oppositie van minder invloed zijn, geheel af van de lengte in de baan, dus van

$$l = \pi + v .$$

Men zal dus aan de elementen willekeurige kleine wijzigingen kunnen aanbrengen, zonder de berekende plaatsen merkbaar te veranderen, als slechts

$$\Delta l = \Delta \pi + \Delta v = 0$$

dus

$$\Delta \pi = - \Delta v.$$

Deze betrekking doet het middel aan de hand, om een deel van de voor M gevonden correctie op π of φ, of beide gezamenlijk te werpen. Voor het 1e geval heeft men te voldoen aan

$$\Delta \pi = - \frac{\partial v}{\partial M} \Delta M.$$

De waarden van $\frac{\partial v}{\partial M}$ zijn direct af te leiden door vergelijking van de twee vroegere rekeningen met $\Delta M = + 40''$ en $\Delta M = + 50''$. Zoodoende vind ik voor de drie waarnemingsdagen:

$$\Delta M = - 0.506 \, \Delta \pi$$
$$- 0.549 \, \Delta \pi$$
$$- 0.573 \, \Delta \pi$$

Houdt men π constant, en wil men een deel der correctie van M vervangen door een wijziging van φ, dan moet

$$\Delta v = 0$$

dus

$$\Delta M = \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{v \text{ const.}} \Delta \varphi.$$

De waarden van $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{v \text{ const.}}$ heb ik afgeleid door uit de drie waarden van v met een gewijzigde excentriciteit de bijbehoorende waarden der middelbare anomalie te berekenen. Dit gaf mij voor de drie waarnemingsdagen:

$$\Delta M = - 1.040 \, \Delta \varphi$$
$$- 1.186 \, \Delta \varphi$$
$$- 1.260 \, \Delta \varphi$$

Hoewel de coefficienten zoowel van $\Delta \pi$ als van $\Delta \varphi$ op een eenigszins veranderlijken invloed van die elementencorrecties wijzen, komt praktisch die invloed nog te veel overeen met een constante wijziging van M, om bij het spaarzame materiaal een scheiding toe te laten.

Leiden, November 1906.

Scheikunde. — De Heer P. v. ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van Dr. N. H. COHEN. *„Over het lupeol"* [1]).

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN)

Trots de vele en fraaie onderzoekingen van verschillende chemici is de structuur van het, ook uit physiologisch oogpunt, belangrijke cholesterine nog verre van bekend. Daarom stelde prof. VAN ROMBURGH mij voor een daarmede nauw verwante stof en wel lupeol, een phytosterine, nader te onderzoeken. De phytosterinen toch kunnen met de cholesterinen tot één groep, de cholesterineachtige lichamen, gerekend worden. Oorspronkelijk was 't de bedoeling het alstol, door SACK [2]) in bresk [3]) gevonden, te bestudeeren. Uit door mij onderzochte bresk werden echter niet alstol, alstonine en isoalstonine, welke SACK er in meent gevonden te hebben, afgezonderd, maar α- en β-amyrine en lupeol. Later bleek, dat het alstol van SACK geen chemisch individu is.

Lupeol werd het eerst gevonden door LIKIERNIK [4]) in de schillen van lupinezaden; daarna trof SACK [5]) het aan in den bast van Roucheria Griffithiana, terwijl VAN ROMBURGH en VAN DER LINDEN [6]) het in de hars van Palaquium calophyllum, als cinnamaat, aantoonden. Eindelijk bewees VAN ROMBURGH, dat het krystalalbaan van TSCHIRCH [7]) niets anders dan lupeolcinnamaat was. Het lupeol werd uit de bresk bereid door deze eerst met alcohol uit te trekken. Bij bekoelen zette zich hieruit een witte massa af, die zonder verder zuiveren met alcoholische kali verzeept werd. Het verzeepte product werd daarop met benzoylchloride en pyridine gebenzoyleerd, en het reactieproduct herhaaldelijk met aceton behandeld door op het waterbad tot even opkoken van de vloeistof te verhitten en dan snel af te filtreeren. Ten slotte bleef lupeolbenzoaat achter, dat, na herhaaldelijk omkrystalliseeren uit aceton, bestond uit mooie, platte naalden, smp. 265-266°, gecorr. 273-274°.

Gev.	C 83.71	83.81	Ber. voor $C_{38}H_{44}O_2$	84.07
	H 10.41	10.36		10.03

Deze, zoowel als alle volgende, elementairanalyses, werden met loodchromaat uitgevoerd.

---

1) Uitvoeriger beschrijving, Diss. N. H. COHEN. 1906, Utrecht.
2) SACK. Diss. 1901, Göttingen.
3) Bresk of djeloetoeng is het ingedroogde melksap van eenige Dyera-soorten.
4) Ztschr. f. physiol. Chem. 15. 415 (1891).
5) SACK l. c.
6) Ber. 37. 3440 (1904).
7) Arch. der Pharm. 241. 653 (1903).

$[\alpha]_D = + 60°,75$ in chloroform.

Door verzeepen van het lupeolbenzoaat met alcoholische kali en omkrystalliseeren uit alcohol of aceton, werd het lupeol in den vorm van mooie, lange naalden, smp. 211°, gecorr. 215°, verkregen.

Gev. C	84.62	84.65	84.40	84.50	Ber. voor $C_{31}H_{50}O$ 84.85
H	11.78	11.93	11.82	12.02	11.49

$[\alpha]_D = + 27°,2$ in chloroform.

In de eerste plaats scheen 't mij van belang om na te gaan of in lupeol dubbele bindingen voorkomen. Daartoe werd lupeol, in zwavelkoolstofoplossing, met broom, eveneens in zwavelkoolstof opgelost, behandeld. Er ontwikkelde zich broomwaterstof. Door omkrystalliseeren van het reactieproduct uit methylalcohol, scheidden zich naalden met één mol. krystalmethylalcohol af. Het smeltpunt van deze stof, op 100° gedroogd, was 184°, gecorr. 185°.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	Ber. voor $C_{31}H_{49}OBr$.
C	72.14	72.30						71.90
H	10.26	10.07	Carius		Liebig			9.55
Br			14.48	14.50	15.40	15.07	14.67	15.45

$[\alpha]_D = + 3°,8$ in chloroform.

Er was dus waarschijnlijk een monosubstitutieproduct ontstaan. Daarop trachtte ik van het benzoaat een additieproduct te verkrijgen. Opgelost in een mengsel van ijsazijn en zwavelkoolstof, gaf dit met broom, in ijsazijn opgelost, na verdampen van de zwavelkoolstof aan de lucht, mooie blaadjes. Door uittrekken van dit product met kokende aceton, bleef een moeilijker oplosbare stof achter, die een *monobromide* bleek te zijn. Na herhaald omkrystalliseeren uit aethylacetaat verkreeg ik fraaie, dikke krystallen, die onder ontleding smolten. Bij 240° in het bad geplaatst, was het smeltp. 243°.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
C	72.62	72.90	72.58	72.46	72.59					
H	8.85	8.88	8.72	9.09	8.84	Carius			Liebig	
Br						13.14	13.04	12.97	13.40	13.01

Ber. $C_{38}H_{53}O_2Br$, $C = 73.38$, $H = 8.61$, $Br. = 12.87$.

$[\alpha]_D = + 44°,9$ in chloroform.

Het broomatoom bevindt zich in de lupeolkern, daar door verzeepen een broomhoudende alcohol en benzoëzuur ontstaan.

Het makkelijker oplosbare gedeelte krystalliseert uit aceton in mooie blaadjes, Het is eveneens een monobromide, kon echter niet met zekerheid als een chemisch individu gekarakteriseerd worden.

Eén van de middelen, om de structuur van een lichaam op 't spoor te komen, is geleidelijke afbreking door oxydatie.

Het lupeol werd daarom met het mengsel van KILIANI[1]) geoxydeerd. Lupeol, opgelost in benzol, werd met een afgewogen hoeveelheid oxydatievloeistof, 6 atomen zuurstof berekend op één mol. lupeol, geschud. Titraties van de oxydatievloeistof met kaliumjodide en thiosulphaat maakten uit, dat na 6 uur één atoom zuurstof verbruikt was en dat verder de hoeveelheid chroomzuur niet meer verminderde en dus quantitatief één atoom zuurstof werd opgenomen. Het oxydatieproduct, dat uit alcohol in mooie, dikke naalden krystalliseerde, smolt bij 169°, gecorr. 170° en bleek een *keton* te zijn, waaraan ik den naam *lupeon* gaf.

Gev. C		84.95	84.91	85.07	84.76	Ber. voor $C_{31}H_{48}O$ 85.24
H	11.64	11.81	11.62	11.61	11.59	11.09

$[\alpha]_D = + 63°,1$ in chloroform.

Dr. JAEGER was zoo welwillend den krystalvorm van het lupeon na te gaan. Het behoort tot de rhombisch-bipyramidale klasse. Een volledige beschrijving zal elders verschijnen.

Met hydroxylamine werd een oxim van het lupeon verkregen, dat zeer moeilijk in alcohol oplosbaar is.

Uit aethylacetaat omgekrystalliseerd, vormt het witte, zachte, lichte naalden, die onder ontleding smelten.

Bij 278° in het bad gebracht, smelten zij bij 278°,5

Gev. C	81.98		ber. voor $C_{31}H_{48}NOH$ 82.41
H	11.44	met loodchr.	10.94
N		3.08	3.11

$[\alpha]_D = + 20°,5$ in chloroform.

Broom, opgelost in ijsazijn, gaf met lupeon, in ijsazijn opgelost, onder broomwaterstofontwikkeling, een dibromide, dat zich uit de ijsazijn afzette.

Omgekrystalliseerd uit een mengsel van benzol en ijsazijn, waren het mooie, harde naalden, die onder ontleding smolten. Bij 253° in het bad gebracht, was het smp. 254°.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
C	62.31	62.71	62.50	62.30						
H	8.13	8.26	8.05	8.06	CARIUS		LIEBIG			
Br					26.88	26.91	27.08	26.85	27.35	27.23

Ber. voor $C_{31}H_{46}OBr_2$, C = 62.58, H = 7.80, Br = 26.90.

$[\alpha]_D = + 21°,4$ in chloroform.

Opgelost in aether gaf lupeon met cyaanwaterstof, onder den invloed van een spoor ammoniak, een cyaanhydrine, dat zich na

[1]) Ber. 34. 3564 (1901).

eenigen tijd in den vorm van mooie, dikke naalden afzette. Deze stof ontleedt zich bij hoogere temperatuur en bij het smelten. Bij 192° in het bad geplaatst, smolt het bij 194°. Door de cyaanwaterstof, die door verhitten vrij komt, in kaliloog op te vangen en deze met zilvernitraat te titreeren, kon aldus het stikstofgehalte bepaald worden.

Gev.	I	II	III	IV	V	VI	VII	Ber. voor $C_{32}H_{49}ON$
C	82.63	82.76						82.86
H	11.25	11.26						10.66
			koperoxyde		loodchromaat	getitreerd		
N			3.92	3.94	3.30	2.87	2.70	3.03

Eén mol. cyaanhydrine gaf met één mol. aethylalcohol en één mol. zoutzuur een stof, die bij 230° in het bad geplaatst bij 235° smolt, deze was echter, zooals de elementairanalyse uitmaakte, niet de te verwachten aethylester van het correspondeerende zuur. Deze stof is niet verder onderzocht.

Lupeolbenzoaat op dezelfde wijze als lupeol met het mengsel van KILIANI behandeld, bleef onveranderd, evenals lupeon, dat, in benzol opgelost, bij 40° gedurende 4 uur daarmede geroerd werd.

Door inwerking van chroomzuuranhydride bij hoogere temperatuur op lupeon ontstonden zure producten, die niet krystallijn konden verkregen worden.

Het neutrale oxydatieproduct van lupeol met kaliumpermanganaat en zwavelzuur was een mengsel, dat zich uiterst moeilijk liet scheiden. Behalve lupeon kon er geen „einheitliche" stof uit afgezonderd worden. Daar SENKOWSKI [1]) uit cholzuur, door verhitten met alkalisch permanganaat, phtaalzuur verkreeg, behandelde ik 23 gram lupeol op dezelfde wijze. Het werd echter geheel weggeoxydeerd. Dit pleit dus *niet* voor een *benzolkern* in het lupeol.

Door oxydatie van lupeolacetaat in azijnzuur met chroomzuur verkreeg ik een product, waarvan de elementairanalyses getallen gaven, die voldoende overeenstemmen met de berekende waarden voor $C_{33}H_{52}O_4$.

Bij 285° in het bad geplaatst, smolt het bij 295° na sinteren tot een donkerbruine massa.

In alcoholische oplossing kleurde deze stof blauw lakmoes niet rood, ook niet bij verdunnen met water, toch liet ze zich zeer gemakkelijk titreeren met alcoholische kali, met phenolphtaleïne als indicator. Aannemende, dat één mol. één mol. KOH verbruikt, werd het M.G. uit deze titraties gevonden op 521 en 524; ber. voor $C_{33}H_{52}O_4$, M.G. = 512,5

---

[1]) Monatsch. f. Chem. 17. 1 (1896).

Gev. C 77.59 77.23 76.87 77.24 Ber. voor $C_{32}\ H_{52}\ O_4$ 77.28
H 10.75 10.49 10.09 10.79 10.23

Door verzeepen met alcoholische kali werd hieruit een stof verkregen, die uit aether in naalden krystalliseerde. Bij 260° in het bad gebracht, was het smp. 263—265°. Ten opzichte van lakmoes gedraagt deze stof zich evenals het onverzeepte product, terwijl het weer met alcoholische kali en phenolphtaleïne te titreeren is. Uit deze titraties werd voor het M.G. gevonden 452 en 461 ; ber. voor $C_{31}\ H_{50}\ O_3$, M.G. = 470,5

Gev. C 78.42 78.61 Ber. voor $C_{31}\ H_{50}\ O_3$ 79.08
H 11.07 11.05 10.71

De kaliumverbinding van deze stof is in alcohol moeilijk oplosbaar en krystalliseert hieruit in naalden.

Door behandelen van het verzeepte zoowel als het onverzeepte oxydatieproduct werd eenzelfde product verkregen, dat een di-geacetyleerd lichaam schijnt te zijn. De elementairanalyses gaven echter nogal uiteenloopende waarden ; wat daarvan de oorzaak was, heb ik nog niet kunnen vaststellen.

Gev. C 75.39 74.71 75.65 74.96 74.47 Ber. voor $C_{35}\ H_{54}\ O_5$ 75.75
H 10.12 10.16 10.51 10.24 9.81

Door koken met overmaat alcoholische kali en terugtitreeren met alcoholisch zwavelzuur werd voor het M. G. gevonden 549, aannemende, dat zich in het molecule twee acetylgroepen bevinden. Ber. $C_{35}\ H_{54}\ O_5$, M. G. = 554.5

Het is wenschelijk deze, voor de kennis van het lupeol zoo belangrijke, oxydatieproducten nog nader te onderzoeken, alvorens een verklaring te geven van hun ontstaan.

Door natrium en kokenden amylalcohol werd lupeol niet gereduceerd, terwijl lupeon door natrium en aethylalcohol weer tot lupeol werd. Zoo lupeon dus een dubbele binding heeft zal deze wel niet $\alpha\beta$ ten opzichte van de carbonylgroep staan.

Noch lupeol, noch lupeolacetaat werden in kokenden aceton door kaliumpermanganaat aangetast. Dit gedrag zou dus niet voor een dubbele binding in lupeol pleiten, echter kon deze door middel van de jodiumoplossing van Hübl vrij zeker in lupeol en lupeon aangetoond worden. Het oxydatieproduct $C_{32}\ H_{52}\ O_4$ bleek daarentegen de dubbele binding niet meer te bevatten. Op grond van de verschillende elementairanalyses en broombepalingen, vooral van dibroomlupeon, houd ik $C_{31}\ H_{50}\ O$ voor de meest waarschijnlijke formule voor lupeol. De formule $C_{26}\ H_{42}\ O$, die Likiernik [1]) en Sack [2]) geven, is zeker niet goed.

Utrecht, Org. Chem. Lab. d. Univ.

---

[1]) Likiernik l. c.
[2]) Sack l. c.

Scheikunde. — De Heer VAN ROMBURGH biedt eene mededeeling aan van Dr. N. H. COHEN: „*Over α- en β-amyrine uit bresk*".[1])

(Mede aangeboden door den Heer HOLLEMAN).

Over het β-amyrine, dat als acetaat in bresk of djeloetoeng aanwezig is, zijn reeds mededeelingen gedaan, (Versl. Koninkl. Akad. v. Wet. 1905, blz. 544). Sinds werd nog door mij het β-amyrinecinnamaat bereid. Uit aceton krystalliseert dit in kleine naaldjes, die bij 236,°5, gecorr. 241° smelten.

Behalve β-amyrine en lupeol werd uit de bresk nog een stof verkregen, die identiek bleek te zijn met het door VESTERBERG gevonden α-amyrine.

Deze stof krystalliseert uit alcohol in lange, dunne naalden, smp. 185°, gecorr. 186°. VESTERBERG geeft op smp. 181—181°,5.

Gev. C	84.22	84.30	Ber. voor $C_{30}H_{50}O$	84.43
H	11.91	12.02		11.82

Deze, evenals alle volgende elementairanalyses, zijn met loodchromaat uitgevoerd.

$[\alpha]_D = +82°,6$ in chloroform; in benzol werd gevonden, $[\alpha]_D = +88°,2$.[2])

Van het α-amyrine werden ter karakteriseering verschillende esters gemaakt.

Het α-amyrineacetaat werd door verhitten met azijnzuuranhydride en natriumacetaat verkregen.

Uit alcohol omgekrystalliseerd, vormt het naaldvormige blaadjes, smp. 220—221°, gecorr. 224—225°. VESTERBERG geeft op voor het α-amyrineacetaat, smp. 221°.

Gev. C	81.85	82.27	81.79	ber. voor $C_{32}H_{52}O_2$	81.98
H	11.34	11.40	11.33		11.19

$[\alpha]_D = +75°,8$ in chloroform.

Het α-amyrinebenzoaat werd verkregen met behulp van benzoylchloride en pyridine. Uit aceton krystalliseerde het in lange, prismatische naalden; smp. 192°, gecorr. 195°. VESTERBERG geeft op, smp. 192°.

Het α-amyrinecinnamaat, dat nog niet beschreven is, werd m.m. verkregen als het α-amyrinebenzoaat. Uit aceton herhaaldelijk omgekrystalliseerd, vormt het harde naaldjes, die bij 176,5—177°, gecorr. 178°, smelten.

Utrecht. *Org. Chem. Lab. d. Univ.*

---

1) Uitvoeriger beschrijving, Diss. N. H. COHEN. 1906, Utrecht.

2) VESTERBERG vond in benzol $[\alpha]_D = +91°,6$.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: *„Over stoffen, welke meerdere stabiele vloeistoftoestanden bezitten, en over de verschijnselen, welke bij anisotrope vloeistoffen kunnen worden waargenomen.*

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM.)

§ 1. De hier bestudeerde verbindingen behooren tot de reeks der vetzure cholesteryl-esters, waaromtrent ik reeds vóór korten tijd mededeeling heb gedaan [1]). Zij kunnen als aanvulling der daar gesyntheseerde esters beschouwd worden, en omvatten: *Cholesteryl-Heptylaat, -Nonylaat, -Lauraat, -Myristaat, -Palmitaat* en *-Stearaat.* De *palmitine*-zure ester is, naar bekend is, ook fysiologisch van beteekenis, daar hij, nevens het *Oleaat* (Smpt. 43° C.) standvastig in het *bloedserum* voorkomt [2]).

Ik heb deze verbindingen bereid, door samensmelten van gelijke gewichtshoeveelheden zuiver cholesterine en vetzuur, en zuivering door gefraktioneerde kristallisatie uit mengsels van aether en alkohol, of van aethylacetaat en alkohol. Bijzonderheden zal ik later, in een uitvoeriger opstel in 't Receuil, mededeelen. De stoffen werden als zuiver beschouwd, als hunne karakteristieke temperatuurgrenzen en de daarbij optredende, typische omzettingen, óók na nògmalig omkristalliseeren, onveranderd tot in bijzonderheden bleven, terwijl de vaste fase mikroskopisch bovendien geene heterogene bestanddeelen meer bleek te bevatten.

De meesten dezer esters werden verkregen in den vorm van prachtig-schitterende, als visch-schubben uitziende, zeer buigzame, plaatvormige kristallen; enkelen, o.a. het *heptylaat* en het *lauraat,* kristalliseeren in harde, lange naalden.

Het onderzoek heeft geleerd, dat deze esters der hoogere vetzuren, voor 't grootste deel, *drie stabiele vloeibare fasen* bezitten. Terwijl bij de eerste termen der reeks ééne dezer anisotrope fasen of beide *labiel* waren met betrekking tot de isotrope smelt, — zijn zij thans alle drie onder de gegeven omstandigheden *stabiel,* hoewel somtijds bepaalde irreversibele overgangen hier nog voorkomen. Opmerkelijk is 't, dat het *stearaat* weer meer analogie met de lagere termen gaat vertoonen, in zoo verre hier òf geene, òf slechts *labiele* vloeibaar-anisotrope fasen schijnen op te kunnen treden. Een verband en

---

1) F. M. JAEGER, Versl. Kon. Ak. v. Wet. Amsterd. 1906; Rec. d. Trav. d. Chim. d. Pays-Bas, T. XXIV, p. 334—351.

2) K. HÜRTHLE, Z. f. physiol. Chem. 21. 331. (1895); 't bloedserum werd onderzocht van: mensch, paard, rund, schaap, zwijn en hond.

overeenkomst tusschen begin- en eindtermen der homologe reeks is hier alleszins erkenbaar.

Eerst zal in 't volgende het thermisch, en vervolgens het mikroskopisch gedrag dezer lichamen beschreven worden.

§ 2. Het Thermometrisch Gedrag dezer Lichamen.

Het *Cholesteryl-Lauraat* vertoont de volgende verschijnselen: De isotrope smelt L van dit lichaam is bij 100° C. nog zoo dik-vloeibaar als glycerine, en wordt bij afkoeling allengs dikker in konsistentie. Bij 87°.8 C. ($= t_2$) treedt plotseling eene eigenaardige violette en groene opalisatie der fase op, welke aan het oppervlak beginnend, weldra de geheele fase omvat. De nog doorzichtige, dun-geleiachtige massa gelijkt geheel op eene koaguleerende kolloïdale oplossing; de opalisatie is analoog aan die, welke zich veelal bij de ontmenging van twee vloeistoflagen openbaart.

Bij verdere afkoeling wordt nu de massa, onder 't verdwijnen der opalisatie-kleuren, allengs minder doorzichtig, en tevens dunner vloeibaar. Ze is thans zelfs dunner dan de isotrope smelt L. Deze dubbelbrekende vloeistof A nu, stolt bij 82°.2 C. ($= t_1$) onder een duidelijk warmte-effekt, tot eene kristalmassa S.

Gaat men daarentegen van de vaste fase S uit, en smelt men deze op, dan is 't gedrag oogenschijnlijk geheel anders, De stof wordt week en levert na eenigen tijd eene dikke, dubbelbrekende massa, welke identiek zal blijken te zijn met de zooeven genoemde fase A. Bij verder verhitten neemt de viskositeit af, en wordt zelfs bij circa 86° zeer gering. Van eene dan optredende opalisatie, als bij de afkoeling, merkt men echter thans niets. Men kan de troebele massa tot over 90° C. verwarmen, zonder dat zij helder wordt, en een enkele maal schijnt het, alsof er in de vloeibare fase vaste deeltjes zweven. Bij 90°.6 C. ($= t_3$) gaat alles over in de isotrope smeltmassa L. Het mikroskopisch onderzoek leert dat tusschen A en L thans nog eene zwakker dubbelbrekende, stabiele vloeistoffase B doorloopen wordt, en dat, ingevolge van optredende vertragingen, de fase S voor enkele oogenblikken naast L te houden is, als A en B al reeds verdwenen zijn.

Hier is dus een geval, waarin eene stof enkele graden boven haar feitelijk smeltpunt verhit kan worden, zonder te smelten. [1])

Echter dient opgemerkt te worden, dat de volgorde der temperaturen hier volkomen onvereenigbaar is met de tot dusverre bij homogene stoffen als mogelijk beschouwde verschijnselen; de temperatuur van 90°.6, waarbij deze kristallen, in aanraking met L verdwijnen,

1) Zie hieromtrent eene analoge waarn. van Wallérant, Compt. rend. (1906). 695.

vindt in het *p-t*-diagram der figuur 1 geene plaats. Mogelijk ware zulk eene ligging der betr. temperaturen wèl, wanneer men het stelsel als een systeem van twee komponenten kon opvatten, zooals bv., indien hier van *tautomere* vormen, die met eindige snelheden in elkaar omgezet worden, sprake ware. Dat hier, bij al deze stoffen „vertragingsverschijnselen" echter eene groote rol spelen, acht ik hoogst waarschijnlijk; de enorme onderkoeling trouwens, welke de fase *A* kan ondergaan zonder transformatie, bewijst zulks voldoende, en wel bij 't grootste aantal dezer esters.

Het verschillend gedrag van 't lauraat bij opsmelting en bij afkoeling der gesmolten massa is zóó karakteritiek, dat aan de onomkeerbaarheid van elke reeks overgangen niet getwijfeld kan worden. Meer gedetailleerd is een en ander hieronder, bij het mikrofysisch onderzoek besproken.

§ 6. Het *Cholesteryl-Nonylaat* is bij 90° C., als isotrope, gesmolten massa nog zoo dik-vloeibaar als paraffine-olie. Bij afkoeling treedt er bij 89.°5 C. eene stabiele, eenigzins grauwige dubbelbrekende vloeistoffase *B* op, die gradueel dikker wordend, bij 72.°8 C. overgaat in eene tweede, sterk dubbelbrekende vloeistoffase *A*, welke overgang met schitterende kleurspelingen gepaard gaat. Alle drie deze vloeistoffen zijn binnen elk specifiek temperatuurtrajekt, volkomen stabiel. Zoowel bij opsmelting als bij de afkoeling der stof treden ze steeds in behoorlijke volgorde achter elkaar op.

Deze dikvloeibare, sterk dubbelbrekende vloeistoffase *A* nu, wordt bij afkoeling steeds meer viskeus, en gaat ten slotte in eene hoornachtige, doorschijnende massa over, die geen spoor van eene intredende kristallisatie vertoont. Ook na uren is de soms nog zeer taaie massa nog niet in kristallen overgegaan. Een stolpunt, en bij opsmelting evenmin eene temperatuur van vloeibaar-worden, is dus bij deze stof niet aan te geven. Oorzaak daarvan is, dat de dubbelbrekende vloeistof *A* enorm onderkoeld kan worden, en allengs in den vasten toestand overgaat, zonder te kristalliseeren.

Gelijk 't mikrofysisch onderzoek ook heeft geleerd, treedt dan later plotseling eene sferoliethenvorming in de massa op, welke ten slotte tot algeheele kristallisatie der stof leidt.

De snelheid, waarmee zich zulke sferoliethen vormen, bleek in enkele gevallen niet grooter te zijn dan 0.000035 tot 0.000070 m.m. per sekunde!

§ 4. Het *Cholesteryl-Myristaat* is bij 85° C. nog eene isotrope, paraffine-olieachtige vloeistof. Bij afkoeling wordt ze allengs dikker-

vloeibaar; dàn gaat bij 82.°6 C. ongeveer de glycerine-achtige fase onder violetblauwe opalisatie in eene dikke, sterk dubbelbrekende massa *A* over, die allengs dikker wordende in konsistentie, geleidelijk overgaat in eene hoornachtige massa, zonder dat een behoorlijk stolpunt kan worden aangegeven. In dit opzicht is de stof geheel analoog aan de vorige. Daarentegen gedraagt ze zich bij het opsmelten meer op de wijze van het lauraat, in zooverre ze dan nl. nog, vóór geheel in *L* over te gaan, — in eene dubbelbrekende vloeistof *B* overgaat. De overgangstemperatuur is ook hier niet scherp aan te geven; ik schat haar op circa 80° C.

§ 5. Het *Cholesteryl-Palmitaat* smelt bij 80° C. tot eene heldere, isotrope vloeistof, die zoo dik is als suikerstroop. Bij afkoeling gaat de isotrope fase bij 80° C. onder groene opalisatie over in eene vrij helder doorschijnende, dubbelbrekende gelei *A*, welke snel dunner wordt in konsistentie en tegelijk troebeler, om bij 77.°2 C., onder een merkbaar kalorisch effekt, te stollen tot eene kristalmassa *S*. Oók hier blijkt bij 't opsmelten, nog voor 't optreden der isotrope smelt *L*, eene dubbelbrekende fase *B* doorloopen te worden; ik schat de overgangstemperatuur op cirka 78° C.

§ 6. Bij het *Cholesteryl-Stearaat* gelukte het mij niet, 't optreden van eene dubbelbrekende vloeistof aan te toonen. De isotrope, dikvloeibare smelt, stolt bij 81° C. tot goedgevormde kristallen *S*.

§ 7. Het *Cholesteryl-Heptylaat* vertoont alleen in onderkoelde smelt ééne dubbelbrekende vloeistoffase, welke labiel is met betrekking tot de vaste fase *S*. De verbinding gedraagt zich thermisch analoog aan 't caprylaat. De stoltemperatuur der stof ligt bij 110.°5 C., de overgangstemperatuur van de labiele dubbelbrekende fase ligt slechts weinig lager.

Van 't *Cholesteryl-Arachaat* kon ik slechts een onzuiver produkt verkrijgen, waaromtrent derhalve verder geen mededeelingen worden gedaan. De zuivering kon niet naar behooren geschieden, daar de ester in bijna geen enkel oplosmiddel in eenigzins belangrijke hoeveelheid oplost. De stof, zooals zij verkregen werd, schijnt geen anisotroop-vloeibare fasen te vertoonen.

§ 8. **Mikrofysisch gedrag dezer lichamen.** Smelt men een weinigje van het zuivere, vaste *cholesteryl-lauraat* op een objektglaasje tot eene isotrope, heldere vloeistof *L* en laat deze zeer langzaam afkoelen, dan vormt zich gewoonlijk eerst eene sterkdubbelbrekende, zeer

strooperige, in levendige interferentie-kleuren schitterende, vloeibare fase. Zij bestaat uit groote, kogelronde droppels, die het zwarte assenkruis vertoonen, en bij afwisselende verwarming en afkoeling licht tot eene strooperige, kleurrijke, in hoofdtoon geelwitte vloeistof tezamen vloeien. Deze fase heete voortaan A. Bij afkoeling wordt ze gradueel dikker, tot dat geene beweging der massa, die een korrelstruktuur blijft vertoonen, meer is waar te nemen. Rondom deze massa bevindt zich eene isotrope randvloeistof. Eerst meende ik in deze taaie, isotrope vloeibare massa, die kennelijk van de smelt L verschillend is, eene afzonderlijke, van A verschillende, fase te moeten zien. Eechter bleek mij, bij 't werken met een dekglaasje, en 't aandrukken daarvan met een pincet, alsmede door roeren met een haarfijn platina-draadje, dat deze randvloeistof slechts „pseudo-isotroop" is (volgens de benaming van LEHMANN), en in waarheid *niet* van A verschillend is; slechts zijn de optische assen der vloeibare kristallen hier alle loodrecht op 't glasoppervlak gericht. Ook de andere cholesterylesters vertoonen dit verschijnsel. Bij verdere afkoeling kristalliseert deze fase A, evenals de pseudo-isotrope rand, tot eene zelfde, veelal sferolietische kristalmassa S. Tusschen de sferoliethen door ziet men vaak stroomingen der pseudo-isotrope randvloeistof.

Laat men de geheele massa nu tot S stollen, en smelt dan deze voorzichtig op, dan gaat ze onmiddellijk over in de vloeistof A, kenbaar aan hare hooge interferentiekleuren en hare trage stroomingen. Vervolgens treedt plotseling eene nieuwe, grauwige, uit kleinere individuën bestaande, zwakker dubbelbrekende vloeistof B op, die na korten tijd op eenmaal voor de isotrope smelt L plaats maakt. Koelt men L nu weer af, dan treedt *niet* eerst de fase B op, maar terstond A. Slechts een uiterst zwak grauwig schijnsel, gedurende een ondeelbaar oogenblik even lichtend, duidt op een vluchtig passeeren der fase B; geheel te realiseeren echter schijnt ze thans niet te zijn. Bij verder afkoelen ontstaat dan plotseling S, soms in meer plaatvormige kristallen. Is die kristallisatie eenmaal ingetreden, en verhit men nu de massa, dan zal S *niet*, zooals te verwachten was, smelten, maar juist *aangroeien*, en wel wordt thans de kristallisatie-snelheid vele malen vergroot. Op te merken valt, dat de aangroeiende platte naalden van S aan hunne omtrekken de vloeibare fase A onder hevige stroomingen voor zich uitstuwen. Als men nu iets langer verwarmt, kan men somtijds maken, dat, terwijl de plaatjes van S voor een gedeelte blijven bestaan, eerst A in de grauwe fase B en deze in de isotrope massa L overgaat. Dan heeft men naast L dus de vaste fase S over, *welke men aldus boven haar smeltpunt kan verhitten*, vóór ze tenslotte in de isotrope smelt L verdwijnt.

Uit een en ander blijkt, dat het *lauraat drie stabiele vloeibare fasen* bezit, en tevens, dat men bij afkoeling der isotrope smelt steeds B overslaat, daarentegen bij opsmelting der vaste stof, de fase B steeds realiseert. Schematisch laat zich een en ander in bijgaand p-t-diagram

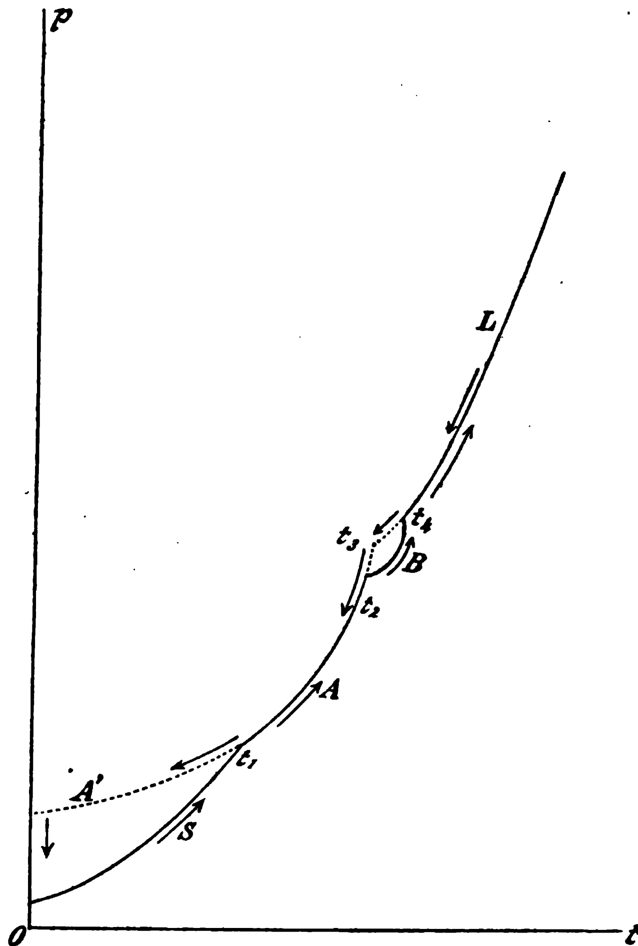


Fig. 1. Schematisch p-t-diagram voor Cholesteryl-Lauraat.

voorstellen; de pijltjes geven dus de volgorde der doorloopen fasen aan bij opsmelting en bij afkoeling. De fase A in hare quasi-onbewegelijke periode, is geruimen tijd bij kamertemperatuur vast te houden, en derhalve aanmerkelijk te onderkoelen, vóór ze in S overgaat. Ook in dien onderkoelden toestand is A, zooals ik door roeren der massa met een platinadraadje kon bewijzen, ondanks haar schijnbaar star voorkomen, nog eene taaie, dikke *vloeistof*.

Het punt (t_3) komt overeen met de bij afkoeling der isotrope smelt

intredende *opalisatie*; deze laatste geeft dus 't moment aan, *waarop de stabiele fase B wordt vervangen door de thans nog minder stabiele fase A*, die eerst kort daarna de stabielere wezen zal; een feit, dat toekomstig wellicht van belang kan zijn voor de verklaring van 't analoge verschijnsel bij de *ontmenging van twee vloeistoflagen*, en *'t koaguleeren eener kolloïdale oplossing* waargenomen. Inderdaad vertoont de overgang bij (t_s) geheel en al het aspekt van 't tot een gel worden van eene kolloïdale oplossing. De temperatuur van dit overgangspunt is onscherp op 87°.8 C. te bepalen. De temperatuur, waarbij men, de vaste stof opsmeltende, waarschijnlijk tengevolge van 't metastabiele aanwezig-zijn der plaatvormige kristalletjes van *S*, de vloeistof nog troebel houden kan, bepaalde ik op 90°.6 C., de stollingstemperatuur (l) ligt bij 82°.2 C.

Dat de bij afkoeling der isotrope smelt *L* verkregen randvloeistof, van *L* zelve verschillend was, kon op meer dan ééne wijze aangetoond worden. Door verhitting en afkoeling n.l. kan men 't zóóver brengen, dat er van *A* schijnbaar niets meer te zien is, maar alleen de randvloeistof over is, die dan bij bekoeling dadelijk tot *S* kristalliseert, waarbij soms een enkele maal hier of daar in de massa even de dubbelbrekende individuen van *A* voor een moment opduiken, om terstond weer te verdwijnen. Maar die aldus verkregen isotrope vloeistof is niet anders dan *A* zelve, wanneer door de temperatuurwisselingen zich alle individuen, evenals magneetjes, met hunne (optische) assen parallel gericht hebben, en 't geheel dus pseudo-isotroop is geworden. Dit zelfde verschijnsel treedt nu ook op bij de andere esters, zoo b.v. zeer schoon bij het nonylaat en bet myristaat. Het verschil van deze pseudo-isotrope fasen met de isotrope smeltmassa's *L* dezer lichamen, openbaart zich, o.m. ook dáárdoor, dat de pseudoisotrope massa van *A*, evenals 't dubbelbrekende deel daarvan, eene zeer dikvloeibare konsistentie heeft; de isotrope smelt *L*, van 't *lauraat* b.v., heeft meer de dikte van glycerine.

Wat ten slotte de vaste fase betreft, en haar overgang in den vloeibaren toestand, zoo laat zich óók hier weer niet bewijzen, dat een kontinue overgang tusschen de laatste vaste deeltjes en de eerste anisotroopvloeibare bestaat. Uit de snelheid, waarmee de diverse fasen voor elkaar plegen plaats te maken bij mikroskopische beschouwing, zou men juist geneigd zijn, te besluiten tot het tegendeel. De thermische waarneming der overgangen, welke laatste hier in 't algemeen slechts onbeduidende kalorische effekten openbaren, zou den waarnemer echter meer doen neigen tot opvatting von de zaak als eene ononderbroken aaneenschakeling van min of meer stabiele tusschen-toestanden, zooals dit reeds vroeger door mij bij het *cholesteryl-cinnamylaat* werd

opgemerkt. Slechts bij de kristallisatie der vaste fase treedt in enkele gevallen een eenigszins belangrijk warmte-effekt op, bij alle overige omslagen is de juiste temperatuur van overgang langs thermischen weg niet nauwkeurig te bepalen.

§ 9. Het *Cholesteryl-nonylaat* vertoont mikroskopisch de volgende verschijnselen ;

Uitgaande van de gekristalliseerde stof, werd deze eerst op een objektglaasje tot eene isotrope vloeistof L gesmolten. Bij afkoeling treedt eene grauwgekleurde, dubbelbrekende vloeistoffase B op, welke bij lager temperatuur voor eene zeer taaie, sterk dubbelbrekende, meest geelwitte fase A plaats maakt. Deze fase A is veelal door een isotropen rand omgeven; drukt men op 't dekglaasje, of roert men de massa met een zeer fijn platinadraadje, dan blijkt deze isotrope vloeistof identiek te zijn met A, en alleen pseudo-isotroop te zijn door homoeotropie. De optische assen der dubbelbrekende modifikatie A stellen zich dan weer loodrecht op 't dekglasoppervlak. Bij voortgezette afkoeling wordt A toenemend dikker vloeibaar; ten slotte is er nog alleen bij 't omroeren beweging in de massa te bespeuren. Na langeren tijd ontstaan er in deze taaie massa, van uit talrijke centra, fijnstralige sferoliethen, wier aangroeiingssnelheid slechts zeer gering is. Wanneer zich een aantal dezer sferoliethen hebben gevormd, en men verhit de massa nu voorzichtig, dan smelten de sferoliethen niet, maar *vermeerderen* zich juist, ingevolge de toename der kristallisatiesnelheid. Spoedig daarop echter, bij verdere verwarming, smelten zij tot de dubbelbrekende fase A, *waarbij de omtrekken der sferoliethen, en de zwarte assenkruisen een tijdlang behouden blijven*, zoodat het geheel veel op een vloeibaar mozaïek gelijkt[1]). Vervolgens treedt de fase B weder op, en dan de isotrope smelt L. De geheele reeks fasen wordt op *reversibele* wijze doorloopen; de vloeibare fase A kan echter zóózeer onderkoeld worden, dat een behoorlijk smelt- of stolpunt der stof niet op te geven is. In grootere massa's der stof treedt die kristallisatie soms eerst na uren in, en wordt de stof vóór dien tijd tot eene hoornachtige massa, welke steeds dubbelbrekend blijft, om ten slotte lokaal witte, ondoorschijnende plekken te gaan vertoonen, van waaruit de sferoliethenvorming zich dan langzaam voortplant door de geheele massa heen. Men zou geneigd zijn, dezen overgang van vloeibaar-anisotrope in gekristalliseerde stof, *kontinu* te noemen, ware het slechts mogelijk, om de tusschentoestanden bij dien overgang ook maar voor een oogenblik waar te nemen. Waar het experiment zulks niet vermag, en wellicht nimmer zal vermogen te doen, daar

[1]) Zie o.a. over 't analoge verschijnsel nog de zooeven verschenen mededeeling van: WALLÉRANT, Compt. rend. (1906). p. 606.

rest ons niets anders, dan thans dien overgang vooralsnog als diskontinu te veronderstellen.

Ook hier, en 't zelfde geldt voor de andere cholesteryl-esters evenzeer, is de *sferoliethen-struktuur* der vaste fase voor dezen geheelen overgang van onderkoelden, anisotroop-vloeibaren toestand in den vasten, van groot gewicht. Ik zal aan 't einde van deze mededeeling nog kortelijks eenige gevallen noemen, waardoor de bijzondere beteekenis van de sferoliethen-struktuur bij de overgangen tusschen anisotroop-vloeibare en anisotroop-vaste fasen, op eene andere wijze eveneens duidelijk blijkt.

§ 10. Het *Cholesteryl-Palmitaat* gedraagt zich geheel analoog: ook dáár nam ik ééne vaste fase, en drie vloeibare toestanden A, B en L waar; evenals bij 't *lauraat*, wordt B gewoonlijk alleen bij verwarming waargenomen. Echter geschiedt hier de opeenvolging der vloeibare en vaste fasen relatief snel, zoodat een werkelijk stolpunt waarneembaar is, gelijk de thermische onderzoeking ook heeft geleerd. De vaste fase kristalliseert in breede platte naalden, gesmolten en dan gestold, in aaneengesloten sferoliethen. Bij opsmelting, is de dikke, dubbelbrekende vloeistof A veelal georienteerd ten opzichte der vroegere vaste sferoliethen.

§ 11. Het *Cholesteryl-Stearaat* heb ik niet in dubbelbrekenden vloeistofvorm kunnen verkrijgen: steeds kristalliseert de isotrope smelt L dadelijk, onder snelle, roteerende bewegingen, tot kleine naaldjes, welke vaak in rosetten vereenigd zijn. Wellicht, dat door sterke onderkoeling of door toevoeging van eenig bijmengsel, zich labiele anisotrope fasen openbaren [1]).

§ 12. Het *Cholesteryl-Myristiaat* is een zeer schoon objekt voor de proefneming. Het gedraagt zich in hoofdzaak op dezelfde wijze als 't *lauraat*; de fase B is hier alleen bij verhitting, niet bij afkoeling der isotrope smelt L waarneembaar. Schitterend is de vorming van groote, kogelronde kristaldroppels der modifikatie A, benevens de kleurenzoom, die de vorming van A uit L bij afkoeling voorafgaat. Deze fase A vertoont ook het verschijnsel der pseudo-isotropie in bijzonder duidelijken vorm. Dearentegen is een voornaam verschil met het lauraat gelegen in de zeer veel geringere snelheid, waarmee zich uit A bij afkoeling de sferoliethen S vormen; in dit opzicht

[1]) Naar ik voor korten tijd van prof. LEHMANN vernam, bezit het stearaat inderdaad twee labiele, anisotrope vloeistoffasen.

vertoont de verbinding weer meer overeenkomst met het nonylaat Soms kan men zeer goed waarnemen, hoe in de fase *A*, die uit een enorm aantal aaneengereide, kogelronde kristaldroppels bestaat, welke ieder het zwarte kruis der sferoliethkristallen vertoonen, zich vanuit een aantal punten der massa, centrifugale stroomingslijnen ontwikkelen, waarlangs zich de kristaldroppels scharen. Na verloop van eenigen tijd ziet men die dubbelbrekende bolletjes verdwijnen, terwijl de stroomingslijnen nu tot stralen van den sferolieth geworden zijn. Ook hier dringt zich weer onwillekeurig de vraag aan den beschouwer op, of de overgang van de dubbelbrekende, langs de stroomingslijnen georienteerde vloeistofbolletjes in den waren sferoliethvorm, inderdaad niet kontinu plaats grijpt, en of wij eigenlijk dáárom weer alleen van een bruusken overgang spreken, omdat wij de doorloopen tusschenstadiën bij dezen overgang niet in staat zijn waar te nemen?

De vloeistofbolletjes der fase *A* vertoonen zèlve uiterlijk veel overeenkomst met eene soort van vloeibare sferoliethen; zelfs heb ik een enkele maal zulke „vloeibare sferoliethen" van grooter afmetingen kunnen waarnemen, welke snel tot vaste sferokristallen stolden. Ook bij dit lichaam dringt zich de overtuiging op, dat er tusschen sferoliethvorming eener stof, en haar vermogen om anisotroop-vloeibare fasen te vormen, een zeer intiem verband moet bestaan; van welken aard hoop ik later toe te lichten.

Het valt echter voorloopig al op te merken, dat bij alle overgangen: vloeibaar $\leftrightarrows$ vast, waar „vertragingsverschijnselen" optreden kunnen van eenigszins belangrijken aard, de onderkoeling of oversmelting b.v., gewoonlijk wordt opgeheven onder eene differentiatie der fase in *sferoliethen*. Alle hier bedoelde *cholesteryl*-derivaten vertoonen deze sferoliethenvorming. Dat een komplex, van een groot aantal dubbelbrekende, mikroskopische sferoliethen, de optische eigenaardigheden der zich ontmengende vloeibare fasen en der kolloïdale opalisatie kan nabootsen, heb ik kunnen demonstreeren aan *a-Phytosterylproprionaat*. Een en ander zou kunnen leiden, o.a. tot versterking van de vroegere opvatting der kolloïdale stolling als een ontmengingsverschijnsel van labiele vloeistoffen.

§ 13. Het *Cholesteryl-Heptylaat* bezit slechts *labiele* vloeibare anisotrope fasen. Het vertoont groote overeenkomst met het vroeger beschrevene *caprylaat*; slechts éene enkele, dikvloeibare fase *A* heb ik enkele malen uit de onderkoelde isotrope smelt *L* kunnen verkrijgen. De vaste fase kristalliseert snel, en wel in schoone, platte naalden, welke hooge interferentiekleuren vertoonen. De stof ver-

plaatst zich bij 't verwarmen gemakkelijk naar de koele deelen van 't objektglaasje.

§ 14. Tenslotte kan ik nog enkele gegevens meedeelen van verschijnselen, welke de beteekenis der sferoliethen-struktuur voor deze kwestie's duidelijk bewijzen.

Voor eenigen tijd heb ik een onderzoek gepubliceerd over de vetzure esters van 't *Phytosterine* uit Calabarvet, en daarbij meegedeeld, hoe zij alle in „sferoliethenvorm" plegen te kristalliseeren uit hun afgekoelde, isotrope smeltmassa, terwijl daarbij anisotrope vloeistoffasen *niet* werden waargenomen, met uitzondering van het *normale valeraat,* dat eene dikvloeibare anisotrope modifikatie bezit, en 't verschijnsel vertoont van het veranderlijke, en na langdurig liggen weer normaalwordende smeltpunt, een feit, dat ook bij enkele vetzure glycerine-esters is waargenomen. Sedert dien is door WINDAUS bewezen, dat het uit Calabarvet geëxtraheerde phytosterine een mengsel is van twee isomorfe, en door kristallisatie niet te scheiden phytosterinen. Bezig zijnde, uit het voornaamste dier twee phytosterinen, nl. uit de α-verbinding, (smpt: 136°), de zuivere vetzure esters te bereiden, ontdekte ik, dat 't gesmolten *propionaat* van het *α-phytosterine* (smpt: 108° C.), bij snelle afkoeling in koud water, de schitterendste interferentiekleuren vertoonde, zooals dit óók 't geval is bij diè cholesteryl-esters (acetaat bv.), welke *labiele* anisotrope vloeistoffasen bezitten. De gedachte lag natuurlijk onmiddellijk voor de hand, om deze verschijnselen aan 't optreden van vloeibare kristallen bij den thans *zuiveren* α-phytosterine-ester toe te schrijven. Een dergelijk gedrag vertoonde ook het volmaakt zuivere *α-phytosterine-acetaat,* hoewel met veel minder groote kleurenpracht. Opmerkelijk echter was het, dat het *α-phytosterine-propionaat,* ook nà volkomen vast-wording, *die kleuren nog onbepaald langen tijd bleef behouden,* vooral aan de wanden van het reageerbuisje, dáár, waar de laag der stof eene geringere dikte had, en zeer snel was afgekoeld.

Het mikroskopisch onderzoek liet nu erkennen, dat deze beide stoffen waarschijnlijk *geene,* of althans zeer snel verdwijnende anisotrope vloeibare fasen [1]) vertoonen, maar dat *'t genoemde kleuren-*

[1]) Terwijl de *phytosteryl*-esters uit Calabarvet, dus bij een bepaald gehalte aan het β-homoloog, *geene* vloeibare kristallen vertoonen, bleken de „zuivere" α-esters thans dit verschijnsel al van af 't *butyraat,* — misschien zelfs van af 't *propionaat,* wèl te vertoonen. Deze ontdekking is een gewichtig argument tegen de, met betrekking tot de *cholesteryl*-esters meermalen geuite beweringen, als zouden de merkwaardige, hier bestudeerde verschijnselen, aan bijmenging van homologe cholesterinen toe te schrijven zijn. Vreemde bijmengsels verhinderen in 't algemeen juist deze verschijnselen geheel en al; steèds echter worden ze eer bedorven dan verbeterd.

verschijnsel wordt teweeggebracht door een zeer eigenaardige sferoliethen-struktuur. Ik heb in 't volgende de beschrijving der stollingsverschijnselen van het *α-propionaat* gegeven, benevens eene figuur, welke de typische struktuur der gesmolten en daarna gestolde verbinding weergeeft, zooals deze aan de kleurige wandgedeelten aanwezig is.



Fig. 2.

Smelt men een weinig der vaste stof op een objektglaasje tot eene isotrope vloeistof, dan neemt men bij afkoeling het volgende waar: De massa stolt geheel en al sferoliethisch, en wel tot een konglomeraat van cirkelronde, koncentrisch gegroepeerde figuren, welke door eene reeks van banden met elkaar verbonden schijnen. Waar drie sferoliethen elkaar ontmoeten, sluiten zij aan elkaar volgens rechte lijnen, welke hoeken van circa 120° insluiten. De massa is zwak dubbelbrekend, en grauwig van kleur; de ringen en banden zijn lichtgrijzig op donkerder achtergrond. Elke sferolieth vertoont, behalve eene koncentrische struktuur, het zwarte kruis, echter gewoonlijk zeer flauw. Het geheel gelijkt op de teekening, die veelal bij gepolijst malachiet (b. v. uit den Oeral) wordt waargenomen, en ook wel bij sommige gepolijste agaten.

De wanddeelen nu van 't buisje of 't objektglas, die de bedoelde kleurverschijnselen vertoonen, hebben diezelfde struktuur, doch met dit onderscheid, dat de bolvormige, koncentrisch-gelaagde sferoliethen daar veel geringer afmetingen hebben, en veel dichter op elkaar sluiten. Elk sferoliethje heeft eveneens een kruis; dit is echter niet donker, maar gekleurd, met gele en violette armen. De sferolieth is evenzoo in de afwisselende cirkelkwadranten gekleurd.

Dit ensemble van kleine, kleurige sferoliethen nu is de oorzaak van de bedoelde, schitterende kleurverschijnselen; zij zijn volkomen analoog aan die, welke in 't geval van vloeibare kristallen plegen op te treden en blijven onbepaald langen tijd bestaan. Elk hunner vertoont één, of meestal twee lichtende puntjes in het midden; zij zijn sterk cirkulair polariseerend en linksdraaiend. Het geheel vertoont zich tusschen gekruiste nicols als een prachtig bont mozaiek van gekleurde, celvormige deelen. De grootte van elk individu is 0,5 tot 1 mikron.

Ook het acetaat vertoont iets dergelijks; dáár zijn de sferoliethen echter meer radiaal gebouwd, en is alles veel onduidelijker.

Ik hoop binnen kort over deze merkwaardige *phytosteryl*-verbin-

dingen nog meerdere gegevens te kunnen verstrekken; hier heb ik ze slechts aangehaald als bewijs van 't belang van dezen struktuurvorm voor de bij anisotroop-vloeibare fasen waargenomen, optische verschijnselen.

Zaandam, 14 November 1906.

Scheikunde. — De Heer FRANCHIMONT biedt eene mededeeling aan van den Heer F. M. JAEGER: „*Over irreversibele fase-overgangen bij stoffen, die meerdere vloeistoestanden kunnen vertoonen*".

(Mede aangeboden door den Heer BAKHUIS ROOZEBOOM.)

§ 1. De vetzure esters van het *α-Phytosterine* uit *Calabarvet*, welk phytosterine het in 't plantenrijk 't veelvuldigst voorkomende is, en dat o. a. uit de rogge en 't koren is geïsoleerd onder den naam van „sitosterine", — vertoonen in meer dan één opzicht hoogst merkwaardige eigenschappen.

Terloops heb ik in mijne vorige mededeeling reeds bericht omtrent de kleurverschijnselen en de sferoliethenstruktuur bij het *propionaat* en bij het *acetaat*. Bij dezen laatstgenoemden ester kon ik geene anisotrope vloeistoffasen waarnemen; bij 't propionaat is, even vóór 't smelten, eene dubbelbrekende fase waar te nemen, echter te kort, om 't temperatuurtrajekt nauwkeurig te kunnen meten.

Bij de vier volgende termen der reeks echter treden deze verschijnselen steeds duidelijker op, en wel onder zóó bijzonder gunstige konditie's, als wellicht tot nog toe bij geene der bekende stoffen dezer soort verwezenlijkt konden worden. Tevens vertoonen deze lichamen enorme vertragingsverschijnselen bij hunne diverse overgangen, en vaak eene typische onomkeerbaarheid daarvan, waarover ik thans hier een en ander wil mededeelen.

§ 2. **Termometrisch gedrag der vetzure *α*-phytosteryl-esters.**

A. Het *α-Phytosteryl-norm.-Butyraat* smelt, bij zeer langzame temperatuurstijging, bij 89°.5 C. tot eene troebele, dubbelbrekende vloeistof *A*, welke eerst zeer viskeus is, maar dàn snel dunner wordt, en bij 90°.6 overgaat in eene glycerine-dikke, heldere, isotrope smelt *L*.

Koelt men nu omgekeerd deze voorzichtig af, dan daalt de thermometer geleidelijk, terwijl de isotrope vloeistof steeds dikker in konsistentie wordt, doch volkomen helder blijft. Bij 80° C. kristalliseert dan opeens de geheele massa tot kleine kristalletjes *S*, onder zóó

groot kalorisch effekt, dat de thermometer tot 85° C. oploopt. Van anisotroop-vloeibare fasen is thans in 't geheel geen sprake. Men kan deze twee proeven naar willekeur herhalen, steeds met hetzelfde resultaat. Over den aard van de troebele fase zie men beneden, bij de beschrijving van 't mikrofysisch gedrag.

Koelt men de isotrope smelt plotseling af in koud water, dan krijgt men onder blauwgrijze kleuring, eene weeke, dubbelbrekende massa, die eerst na zeer langen tijd langzaam gaat kristalliseeren.

B. Het *a-Phytosteryl-Isobutyraat* smelt, op dezelfde manier onderzocht als boven, bij 101°.4 C. tot eene glycerine-dikke, troebele, dubbelbrekende vloeistof *A*, die geleidelijk de konsistentie van paraffine-olie verkrijgt, en bij ± 103°.2 C. schijnbaar kontinu in eene heldere smelt *L* overgaat.

Koelt men deze af, dan wordt ze weliswaar geleidelijk dikker vloeibaar, doch tevens blijft ze geheel helder en isotroop.

Bij 80°.4 C. wordt ze troebel en dubbelbrekend; dese fase is identiek met *A*, en hare konsistentie is dan als die van glycerine; bij 73° is ze als boter zoo dik geworden, bij 66° C. kan de thermometer er nog slechts noode in bewogen worden, terwijl men haar tot taaie, dubbelbrekende vloeistofdraden kan trekken. Bij 65° C. rijst de thermometer plotseling tot 68°.8 C., terwijl de massa tot lange, fijne naalden *S* kristalliseert.

Bij snelle afkoeling der smeltmassa, gaat deze, zonder dat kleurverschijnselen optreden, over in eene troebele, vetachtig uitziende, dubbelbrekende massa, welke eerst na zeer langen tijd langzaam in kristallen overgaat.

C. Het *a-Phytosteryl-norm.-Valeraat* smelt, in gekristalliseerden toestand, bij *geene* bepaalbare temperatuur. Bij 48° C. ongeveer begint de stof zichtbaar week te worden, bij 54° is hare konsistentie als dikke boter, bij 80° C. wordt ze al dunner, bij 85° C. is ze werkelijk vloeibaar maar nog steeds troebel en dubbelbrekend. *Alle deze overgangen gaan volkomen kontinu.* Bij ongeveer 97.°5 C. is de vloeistof helder en isotroop; ze heeft dan de dikte van paraffineolie.

Koelt men daarentegen de isotrope smeltmassa af, dan blijft de isotrope, paraffineolie-achtige vloeistof helder tot cirka 87.°3 C., waarbij eene troebele, dubbelbrekende fase ontstaat. Deze neemt nu bij verdere afkoeling geleidelijk in dikvloeibaarheid toe; bij 80° is ze als boter zoo dik, bij 66° haast niet meer om te roeren, en dan tot taaie vloeistofdraden te trekken. Men kan haar afkoelen tot kamertemperatuur zonder dat ze stolt. Uren achtereen blijft zij in dezen toestand, doch na 24 uren is ze weer in kristallen overgegaan. De stof heeft dus noch bepaalbaar stolpunt, noch smeltpunt.

D. Het *α-Phytosteryl-Isovaleraat* gedraagt zich volkomen analoog aan het norm. Valeraat. Ook hier is noch een smeltpunt, noch een stolpunt aan te wijzen. De massa wordt week bij ongeveer, 45° is bij 65° anisotroop-dikvloeibaar, en wordt bij 81° C. helder en isotroop. Bij afkoeling ontstaat bij 78.°1 een begin van troebeling; de vloeistof wordt gradueel dikker, en gaat bij geen bepaalbare temperatuur over in eene taaie, kleverige dubbelbrekende massa, die na 24 uren weer tot eene kristalmassa vastgeworden is.

§ 3. Het thermometrisch gedrag dezer merkwaardige lichamen, is voor 't geval van het normale *butyraat* en *isobutyraat* in een schematisch *p- t-* diagram, hiernevens weergegeven. De typische irreversibiliteit dezer verschijnselen springt aldus terstond in 't oog. Bij de twee *valeraten* kan men bovendien het geheele gedrag niet anders kwalificeeren, dan als een werkelijk geheel *geleidelijken* overgang vast ⇄ vloeibaar, onder intermediaire realiseering van een oneindig aantal optisch-anisotrope vloeistoffen.

§ 4. **Het mikrofysisch gedrag der vetzure α-phytosterylesters.** Er zijn wellicht geene stoffen bekend, welke de voor anisotrope vloeistoffen zoo karakteristieke verschijnselen mikroskopisch op zóó schoone en tevens zoo kurieuze wijze openbaren als deze esters; in dit opzicht munten vooral uit het isobutyraat en het valeraat. Bij

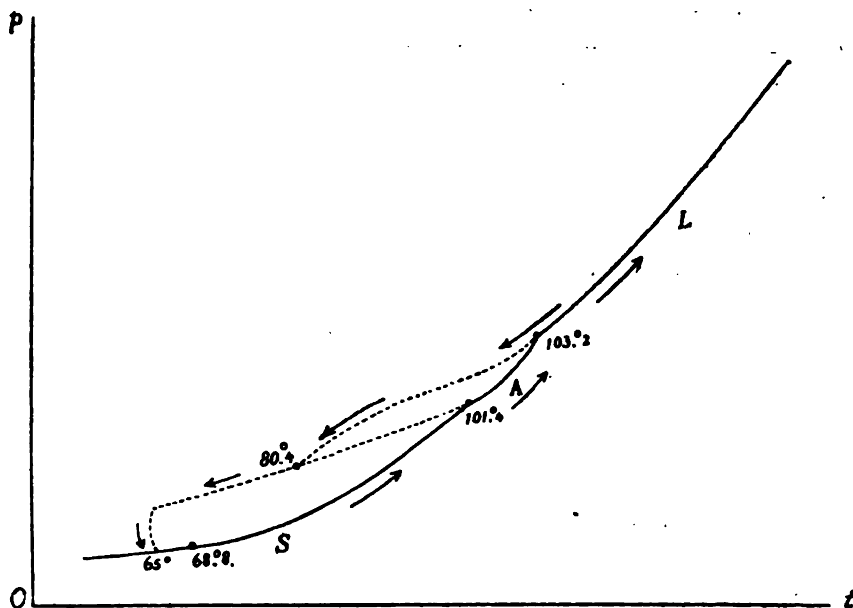


Fig. 1. Schematisch *p-t* diagram voor α-Phystoryl-Isobutyraat.

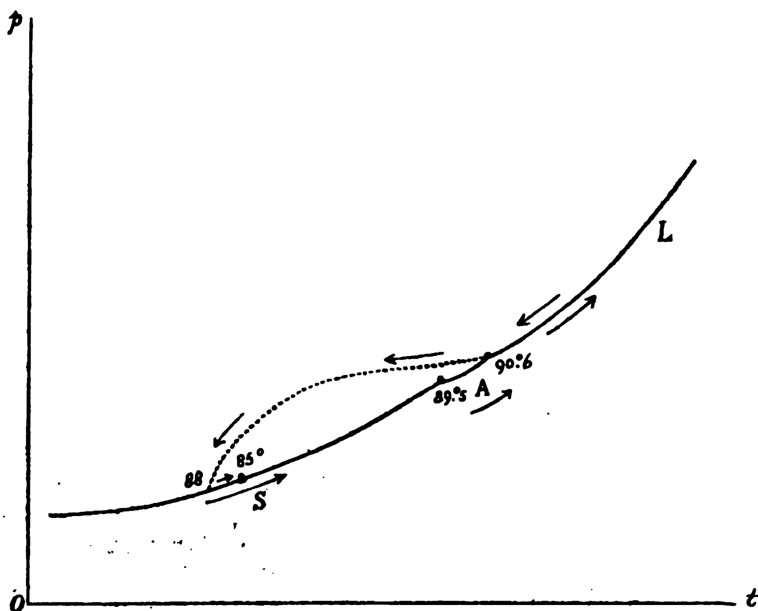


Fig. 2. Schematisch *p-t*-diagram voor *α*-Phytosteryl-*n*-Butyraat.

het normale butyraat is 't trajekt, waarover de vloeibare kristallen bestaanbaar zijn, wat erg klein. Daarom zal ik, hoewel 't gedrag der vier lichamen wel in details verschilt, hier meer in 't bijzonder 't gedrag van 't normale valeraat beschrijven, en van de andere hier en daar meedeelen, waarin ze van 't valeraat afwijken.

Van de thermisch waargenomene, zoo eigenaardige irreversibiliteit en geleidelijkheid der overgangen merkt men thans niets. Dit is het gevolg van de geheel andere omstandigheden, welke 't werken volgens de mikroskopische methode met zich brengt. De thermometrische methode verdient, voor de studie van 't wezen der diverse fase-overgangen zeker de voorkeur boven de mikroskopische, wijl bij de laatste de fijnere temperatuurveranderingen lang niet zóó beheerscht kunnen worden, als dit bij de eerste methode 't geval is. Daarom maken de fase-overgangen, mikroskopisch waargenomen, ook veel eer den indruk van bruusk te zijn, dan bij de thermische observatie.

Echter vult het mikroskoop hier de taak van den thermometer op niet te onderschatten wijze aan, daar ze een inzicht geeft in den bouw der diverse fasen, en veroorlooft hun verschil of identiteit vast te stellen.

§ 5. Smelt men een weinig van het schoongekristalliseerde norm. *valeraat* voorzichtig op een objektglas, dan gaat de stof bij eene bepaalde temperatuur, schijnbaar plotseling, over in een aggregaat

van een enorm aantal, kogelronde, zeer groote en sterk dubbelbrekende vloeistofdruppels, welke alle het bekende zwarte kruis der sferolieten vertoonen [1]), doch met dat al werkelijk vloeien kunnen. Men kan dezen toestand soms (zie Noot) willekeurig langen tijd bestendigen. Doch ook kunnen zij daarna samen stroomen tot grootere, eenigszins op scherpbegrensde kristallen gelijkende, plaatvormige, hooggekleurde vloeibare individuen. Deze zijn vaak veellingen van vloeistofdruppels; de grenzen tusschen de afzonderlijke individuen wisselen door temperatuurslingeringen telkens.

Opmerkelijk, en terstond in 't oog vallend, is hierbij de isotrope rand van de massa. Door druk of door verschuiving van 't dekglaasje, evenzoo bij de slierige stroomingen, die men hierin door temperatuurveranderingen kan teweeg brengen, kan licht aangetoond worden, dat deze isotrope rand, door eene parallele oriënteering der vloeibare individuen, slechts „pseudo-isotroop" is, en identiek met de rest der fase. Zelfs gelukt 't soms, door veelvuldig herhaalde verwarming en daarop volgende snelle afkoeling, om de geheele massa dit pseudoisotroop aspekt te bgeven [2]). Deze stof is van dit verschijnsel wel het best-bekende voorbeeld.

§ 6. Verhit men nu verder, en wel héél voorzichtig, dan ziet men de grootere vloeiende kristallen zoowel als de nog tusschen hen inliggende kleinere druppels in snelle beweging komen: de grootere individuen, die veelal uit twee-, en vierlingen bestaan, lossen zich weer op in een menigte bolvormige druppels, en deze verdwijnen mèt de kleinere, bij eene bepaalde temperatuur geheel in de isotrope vloeistof, die nu ook werkelijk isotroop *is*. De bolletjes van de vloeistof roteeren daarbij in rechtschen en linkschen zin, onder tordeering

---

[1]) Men kan echter veeltijds eene scheeve uittreding der optische symmetrie-as waarnemen, waardoor de indruk ontstaat, of men loodrecht op eene der optische assen van een twee-assig kristal ziet, of op een éénassig kristal, scheef op de optische as gesneden, Ook neemt men dan gekleurde ringen waar, die thans elliptischen vorm hebben. Hoogst merkwaardig is 't, dat, als de fase door afkoeling zeer taai-vloeibaar is geworden, deze ellipsoïdale droppels, voorzien van ringen en scheeve, doch onderling *parallel* gerichte assen langen tijd in schijnbaar onbewegelijken toestand te houden zijn te midden der pseudo-isotrope of zwak dubbelbrekende vloeistof. Zij richten zich onderling als ellipsoïdale magneetjes.

[2]) De anisotroop-vloeibare fase heeft, o.a. bij de twee *valeraten*, eene buitengewone neiging, om zich in dezen pseudo-isotropen toestand te verplaatsen. Men kan dit waarnemen, doordat de grens van den droppel zich veelal, onder verbreeding van de isotroop-lijkende strook, van zelf binnenwaarts verplaatst. Oók is 't opmerkelijk om te zien, hoe de vloeiende kristallen zich om eene luchtbel heen, normaal op de begrenzing daarvan, aaneengesloten heenleggen.

der massa, zooals aan de spiraalsgewijze vervormiug van 't zwarte kruis waar te nemen is. Soms kan men, vóór 't isotroop worden, nog eerst eene intredende vergrooting der „plaatvormige vloeiende kristallen" ten koste van de kleinere tusschenliggende bolletjes observeeren; een gevolg van de bij verwarming zich een oogenblik vergrootende kristallisatie-snelheid.

§ 7. Bij afkoeling der isotrope smelt, differentieert zich deze eerst in een onnoemelijk aantal der dubbelbrekende vloeistofbollen, welke dan lokaal hier en daar tot de meer plaatvormige vloeiende kristallen samenvloeien. Bij verdere afkoeling blijven deze laatste individuen geruimen tijd, ondanks de onderkoeling, bestaan, terwijl de bolletjes zich ondertusschen tot deze zelfde soort van plaatvormige individuen vereenigd hebben. Dit, in hooge interferentiekleuren schitterende aggregaat, wordt bij langer liggen geleidelijk taaier en taaier in konsistentie, terwijl de aggregatie, door eene schijnbare barsting, hoe langer zoo kleinkorreliger wordt. Echter blijft de fase, nog uren lang soms, anisotroop-vloeibaar, zooals men door verschuiving der massa, en door den pseudo-isotropen rand, welke fijne, dubbelbrekende stroomingslijnen gaat vertoonen, duidelijk bewijzen kan. Tenslotte gaat ze, nadat eerst de pseudo-isotrope vloeistof tot dezelfde, haast volmaakt onbewegelijke aggregatie van dubbelbrekende individuën is overgegaan als de rest, na zeer langen tijd *geleidelijk* over in een aggregaat van plaatjes en sferolietachtige massa's, met sterke dubbelbreking voorzien.

§ 8. Als men de, eenige uren gelegen hebbende, gedeeltelijk vaste massa, of wèl de eenmaal geheel vast geworden massa, voorzichtig opsmelt, dan gelukt 't soms, om bij de twee *valeraten*, de kristallen der fase S (dus de *vaste* kristallen), — nog eenige oogenblikken *nevens* de isotrope smelt L te houden, bij eene temperatuur, welke gelegen is *boven* 't hoogste omzettingspunt. Dit verschijnsel is derhalve weder geheel analoog aan dàt, hetwelk bij het *cholesteryl-lauraat* 't eerst door mij werd waargenomen, en dat als *eene verhitting eener vaste stof S boven haar smeltpunt zonder intredende smelting* zou kunnen gekwalificeerd worden. Voorloopig schijnt, volgens de bestaande opvattingen althans, dit gedrag slechts verklaard te kunnen worden, indien men hier een twee-komponenten-systeem, met b.v. aan sterke vertraging onderhevige tautomere omzettingen, wil aannemen.

Wanneer men de nauwelijks tot enkele vloeibare dubbelbrekende droppels afgekoelde isotrope smelt L voorzichtig verhit, dan kan men soms waarnemen, hoe daàr, waar een oogenblik te voren de sterk

lichtende, geelwitte bolletjes zichtbaar waren, thans grauwige, met zwart kruis voorziene bolletjes aanwezig zijn, welke allengs kleiner worden, en tevens donkerder, om tenslotte als (isotrope?) bolletjes in de isotrope smelt te verdwijnen [1]). Dit verschijnsel lijkt me, in verband met de hieronder nog te beschrijven, bij de verbinding $Fe_2 Cl_6$, 12 aq. opgemerkte fenomenen, en met alles, wat ik van dien aard bij de cholesterylesters kon waarnemen, van groote beteekenis voor de verklaring van het ontstaan der vloeibare kristallen.

§ 9. Eindelijk valt er nog iets op te merken omtrent de afscheiding van het *α-Phytosteryl-norm.-Valeraat* uit organische oplosmiddelen. Men kan de stof uit aethylacetaat + weinig alcohol in schoone, harde, goedgevormde kristalletjes verkrijgen. Wanneer men echter de verzadigde, *koude* oplossing in aethylacetaat, met veel *aceton* vermengt, (waarin n.l. de stof zeer weinig oplosbaar is), dan wordt de vloeistof plotseling tot eene melkwitte emulsie, die bij bezinking het lichaam afzet, echter *niet* in een fijn poeder, doch in den vorm van eene *dubbelbrekende zeer dikke en zeer kleverige vloeistof.*

Ik heb deze praecipitatie in een uitgehold objektglaasje onder het mikroskoop herhaald. De emulsie is een, van een onnoemelijk aantal *dubbelbrekende, kogelronde vloeistofbolletjes,* welke zich òf snel bewegen in de vloeistof, òf, tot grootere massa's vereenigd, geheel en al identiek lijken met de gewone, anisotroop-vloeibare fase *A*, als deze op kamertemperatuur is afgekoeld. Deze bolletjes vertoonen alle het kruis der sferoliethen en der dubbelbrekende vloeistoffen. Zij worden spoedig vast, en gaan dan in naaldjes en sferoliethachtige aggregaties's over. Dat de eerst afgezette bolletjes vloeibaar zijn, kan men door roeren gemakkelijk bewijzen; trouwens de dubbelbrekende massa's kommuniceeren veeltijds met elkaar door zeer smalle, dubbelbrekende stroomingen, terwijl zij veelal ook de verschijnselen der pseudo-isotropie vertoonen.

Hier heeft men dus blijkbaar de vloeibaar-anisotrope fase *A* uit eene oplossing door snelle praecipitatie bij kamertemperatuur verkregen, en wel in geïsoleerde droppels! Enkele andere *phytosterylesters* vertoonen analoge verschijnselen, welke ik later, in eene uitvoeriger mededeeling over deze lichamen, zal beschrijven.

§ 10. Hoogst merkwaaardig is bij het norm. *valeraat*, bij 't *isovaleraat* en *isobutyraat,* de differentiatie der isotrope smelt in een groot aantal kogelronde, dubbelbrekende vloeistofbollen van aanzien-

---

1) Vóór dien tijd ziet men de bolletjes soms zich hièr door samenvloeien, tot veellingen vergrooten, daàr een grooter overgaan in een kleiner, soms hièr een in de vloeistof verdwijnen, en elders, veelal er vlak naast, nieuwe individuen opduiken.

lijke afmetingen, welke als vetoogjes op een soep, over en langs elkander heendrijven, en zich veelal tot veellingen, wier afzonderlijke deelen nog erkenbaar blijven, vereenigen. Ook kransvormige aggregatie's der vloeistofbollen kan men soms waarnemen. In de meeste gevallen vertoonen de afzonderlijke vloeistofbollen het zwarte kruis en de vier lichtende kwadranten goed centrisch gegroepeerd. Men ziet ze echter ook meermalen rondwentelen, zoodat de uittreding der optische symmetrie-as thans excentrisch geschiedt. Door de enorme grootte der individuen en de lage grenstemperaturen, leenen zich deze esters voor de studie dezer verschijnselen zeker niet minder goed dan de p-azoxybenzoëzureaethylester van Vorländer.

Als men de temperatuur der in vloeistofbollen geheel gedifferentieerde massa, — en vooral 't *isobutyraat* is voor deze differentiatie bijzonder geschikt, — zeer weinig opvoert, dan ziet men de vloeistofbollen soms opeens verdwijnen, nadat ze een oogenblikje van te voren hunne grenzen even, als door eene *expansie*, hebben vergroot 't Is, of eene zeepbel barst door te sterke opblazing.

§ 11. Eindelijk wil ik nog opmerken, dat de in 't vorige beschreven thermische overgangen, en vooral die der twee *valeraten* werkelijk niet anders kunnen worden geïnterpreteerd, dan door aanname van een geheel en al kontinu verloop. Voor al deze geleidelijke transformatie's, zoowel bij opsmelting als bij de langzame stolling, is een meetbare tijd noodig, en nergens is eenige aanwijzing te ontdekken van een plotselingen sprong. Uitgezonderd is alleen hierop 't plotseling kristalliseeren der twee *butyraten*.

§ 12. Wat nu de differentiatie der smelt L in een aggregaat van anisotrope vloeistofbollen aangaat, zoo wil ik hier tenslotte mededeeling doen van eene proefneming omtrent het kristalliseeren van 't *ijzerchloridehexahydraat*, welke stof iets dergelijks vertoont, en, evenals haast alle onderkoelde smelten, en als vele der, de vloeibare kristallen vertoonende verbindingen, in typische *sferoliethen* kristalliseert.

Smelt men de verbinding: $Fe_2 Cl_6 + 12 H_2O$ voorzichtig in een buisje, zóó, dat geen water ontsnapt, en neemt men van deze bruinroode smelt een druppel op een objektglaasje, dan kan men de vrij liggende smelt, uren en uren lang bij kamer-temperatuur laten, zonder dat er een zweem van kristallisatie bemerkbaar is. De vloeistof is thans sterk onderkoeld, en verkeert in een toestand van metastabiel evenwicht. Met dat al heeft ze dezelfde chemische samenstelling als de vaste fase, waaruit ze ontstaan is.

Bij langer liggen treden nu in de vrij dikvloeibare massa, lokaal *kleine vloeistofbolletjes* op, waarschijnlijk dáár beginnende wegens

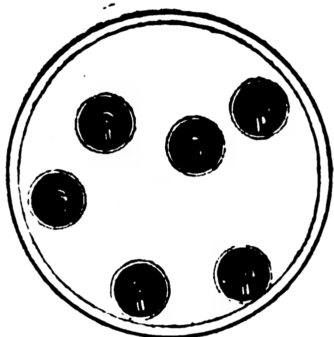


Fig. 3*a*.

plaatselijke afkoeling of door eenige spontane waterverdamping op die punten. Deze vloeistofbolletjes zijn volkomen isotroop, en omgeven door een fijnen, geelgekleurden aureool van anderen brekingsindex dan de rest der vloeistof (fig. 3*a*). De waarneming leert, dat de bollen optisch slechts weinig of niet dichter zijn dan deze moederloog; verder moet men uit het feit, dat ze later *in hun geheel* tot een sferolieth van het hexahydraat worden, wel besluiten, dat hunne chemische samenstelling niet van die der smeltmassa verschilt.

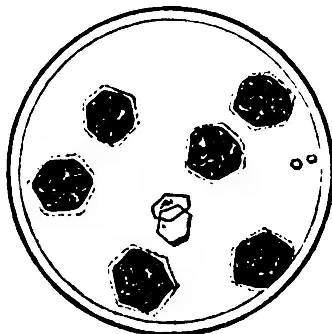


Fig. 3*b*.

Deze bollen van vloeistof nu, gaan allengs over in dubbelbrekende massa's, wier doorsnede diè is van een regelmatigen zeshoek met afgeronde hoeken: kristalindividuën zijn in de dubbelbrekende massa nog niet waarneembaar, en de lichtende hof om het geheel heen, blijft ook nù nog nog bestaan (fig. 3*b*). Hier en daar ziet men ook in de vloeistof zeshoekige, scherpbegrensde, zeer kleine plaatvormige kristallen ontstaan, *zonder* voorafgaande vloeistofbollen te dier plaatse [1]). Tenslotte wordt de dubbelbrekende zeshoekige massa, allengs door meer onregelmatige zijden begrensd, terwijl ook eene meerdere differentiatie der massa in lichte en donkere gedeelten op een langzaam intredend en vorderend kristallisatieproces wijst. Tenslotte kan men een *sferolieth* van het hexahydraat, met radiale struktuur waarnemen, die nu verder centrifugaal aangroeit tot de groote, welbekende, halfbolvormige sferoliethen van het ijzerchloride (fig. 3*c*).

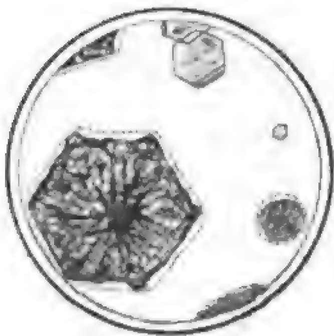


Fig. 3*c*.

§ 13. Deze proef bewijst, dat de opheffing van den metastabielen vloeistoftoestand of althans van een vloeistoftoestand, die onder den

---

[1]) Deze kunnen wellicht echter ook door de aanwezigheid van zeer kleine sporen salmiak ontstaan, waarvoor 't ijzerchloride een zeer gevoelig reagens is.

invloed van *vertragingsverschijnselen* mogelijk is, — kan geschieden door de vorming van *sferoliethen, die voorafgegaan worden door de differentiatie der smelt in een aggregaat van vloeistofbolletjes.* Wel is waar zijn deze laatste hier, in tegenstelling met de zooeven beschreven phytosteryl esters, isotroop; maar de anisotropie dezer laatste vloeistoffen kan óók 't gevolg zijn van faktoren, welke van ondergeschikt belang zijn voor den blijkbaar bestaanden samenhang tusschen: metastabiliteit van vloeistoftoestanden, opheffing daarvan door sferoliethenvorming, en 't mogelijk optreden van vloeistofbollen als intermediair verschijnsel. Ter loops wil ik er even aan herinneren, dat als men onder toevoeging van eene, de kristallisatie vertragende stof, eene oplossing laat uitkristalliseeren, deze kristallisatie begint met de afscheiding van oorspronkelijk isotrope vloeistofbolletjes, zoogenaamde globulieten, welker studie reeds indertijd door BEHRENDS en VOGELSANG begonnen werd.

Een en ander dringt het vermoeden op, dat de vorming der anisotrope vloeistoffasen, als agregaten van dubbelbrekende vloeistofbollen, eveneens hare oorzaak mag hebben in een soort van *vertragingsverschijnselen*, wier natuur ons echter momentaan nog onbekend is. Over niet te langen tijd hoop ik op deze kwestie nader terug te komen.

Zaandam, 21 November 1906.

Wiskunde. — De Heer W. KAPTEYN biedt eene mededeeling aan: *„Over eene bijzondere klasse van homogene lineaire differentiaalvergelijkingen, tweede orde.”*

Men weet dat de differentiaalvergelijking van LEGENDRE

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+n(n+1)y=0$$

voldaan wordt door een polynomium $P_n(x)$ van den n^{den} graad en door eene functie $Q_n(x)$ die o. a. geschreven kan worden in den vorm

$$Q_n(x)=\int_{-1}^{1}\frac{P_n(z)\,dz}{x-z}$$

waardoor zij echter niet bepaald is op het deel inliggende tusschen -1 en $+1$ van de reëele as, ter weerszijde waarvan deze functie waarden bezit die $2i\pi\,P_n(x)$ verschillen..

Naar aanleiding hiervan hebben wij de vraag gesteld alle homo-

gene lineaire differentiaalvergelijkingen tweede orde, van den vorm

$$R(x)\frac{d^2y}{dx^2}+S(x)\frac{dy}{dx}+Ty=0$$

waarin R, S en T polynomia voorstellen, te bepalen die de eigenschap bezitten, dat $y_1(x)$ een eerste particuliere integraal zijnde, de tweede kan geschreven worden in den vorm

$$y_2(x)=\int_\alpha^\beta \frac{y_1(z)\,dz}{x-z}$$

in de onderstelling namelijk dat deze integraal buiten de discontinuiteitslijn eene beteekenis heeft, terwijl α en β reëele waarden voorstellen.

Stellen we dat de polynomia van denzelfden graad zijn, dus

$$R(x)=\sum_0^\lambda r_p\,x^p \quad , \quad S(x)=\sum_0^\lambda s_p\,x^p \quad , \quad T(x)=\sum_0^\lambda t_p\,x^p$$

dan blijkt vooreerst dat deze polynomia moeten voldoen aan de voorwaarden

$$R(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\,r(x)=(x-\alpha)(x-\beta)\sum_0^{\lambda-2}\varrho_p\,x^p$$

$$S(x)=R'(x)+(x-\alpha)(x-\beta)\sum_0^{\lambda-2}h_p\,x^p.$$

Stelt men verder

$$G_p''=\int_\alpha^\beta z^p\,y_1''(z)\,dz \quad , \quad G_p'=\int_\alpha^\beta z^p\,y_1'(z)\,dz \quad , \quad G_p=\int_\alpha^\beta z^p\,y_1(z)\,dz$$

en

$$M=-G_0''$$
$$N=(\alpha+\beta)\,G_0''-G_1''-2G_0'$$
$$m=-G_0'$$
$$n=(\alpha+\beta)\,G_0'-G_1'-G_0$$

dan worden de verdere voorwaarden gevonden uit de vergelijking

$$I+J=0$$

waarin I en J polynomia van graad $\lambda-1$ voorstellen van de volgende vormen

$$I=\sum_{p=0}^{\lambda-1}(\varrho_p\,N+\varrho_{p-1}\,M)\,x^p$$
$$+\sum_{p=0}^{\lambda-1}[\{h_p+(p+1)\,\varrho_{p+1}\}\,n+\{h_{p-1}+p\varrho_p\}\,m]\,x^p$$

$$J = \sum_{p=0}^{\lambda-1}(r_{p+1}\, G_p'' + s_{p+1}\, G_p' + t_{p+1}\, G_p)$$
$$+ x \sum_{p=0}^{\lambda-2}(r_{p+2}\, G_p'' + s_{p+2}\, G_p' + t_{p+2}\, G_p)$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ x^{\lambda-2} \sum_{p=0}^{1}(r_{p+\lambda-1}\, G_p'' + s_{p+\lambda-1}\, G_p' + t_{p+\lambda-1}\, G_p)$$
$$+ x^{\lambda-1} \sum_{p=0}(r_{p+\lambda}\, G_p'' + s_{p+\lambda}\, G_p' + t_{p+\lambda}\, G_p).$$

Voor het geval dat $\lambda = 2$, vindt men hieruit dat de meest algemeene vergelijking, die de gevraagde eigenschap bezit, is

$$(x-\alpha)(x-\beta)\frac{d^2y}{dx^2} + [t_1(x-\alpha)(x-\beta) + 2x - \alpha - \beta]\frac{dy}{dx} + (t_0+t_1x)y = 0$$

waarin α, β, t_0 en t_1 onbepaald zijn,

Is $\lambda = 3$ dan blijkt de meest algemeene vergelijking te zijn

$$(x-\alpha)(x-\beta)(\varrho_1 x+\varrho_0)\frac{d^2y}{dx^2} + (t_2x^3+s_2x^2+s_1x+s_0)\frac{dy}{dx} +$$
$$+ (t_2x^2+t_1x+t_0)\,y = 0$$

waarin de grootheden $\alpha_1\, \beta_1\, \varrho_0\, \varrho_1\, s_0\, s_1\, s_2\, t_0\, t_1\, t_2$ voldoen aan de drie betrekkingen

$$s_1 + (\alpha+\beta)s_2 + (\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)t_2 = 2\varrho_0 + (\alpha+\beta)\varrho_1$$
$$s_0 - \alpha\beta s_2 - \alpha\beta(\alpha+\beta)t_2 = -(\alpha+\beta)\varrho_0 - 2\alpha\beta\varrho_1$$
$$(t_1-s_2+2\varrho_1)\,G_0 - t_2\,G_1 = 0.$$

Wiskunde. — De Heer SCHOUTE biedt namens den Heer F. SCHUH eene mededeeling aan: „*Over de meetkundige plaats van de gemeenschappelijke puntenparen en de omhullende van de gemeenschappelijke koorden der krommen van drie bundels.*" 1e gedeelte.

(Mede aangeboden door den Heer D. J. KORTEWEG).

1. *Gegeven zijn drie vlakke krommenbundels* (C_r), (C_s) *en* (C_t) *van de graden r, s en t. Gevraagd de meetkundige plaats M der puntenparen, waardoor een kromme van ieder dier bundels gaat.*

Zijn P en P' de punten van zulk een paar. Bij het zoeken naar de meetkundige plaats zullen we alleen op die punten P en P' letten, die voor ieder tweetal bundels *beweeglijke* (d. w. z. niet noodzakelijk in de basispunten vallende) snijpunten zijn, een onderscheiding, die alleen behoeft gemaakt te worden als de bundels gemeenschappelijke basispunten hebben. De zoo verkregen meetkundige plaats M zullen

we de *eigenlijke meetkundige plaats* noemen, ter onderscheiding van de *totale meetkundige plaats*, die men verkrijgt door toe te laten, dat een der punten P en P' een vast snijpunt voor twee der bundels is.

Onderstel nu, dat de bundels (C_s) en (C_t) α vaste snijpunten vertoonen en dat dit aantal voor de bundels (C_t) en (C_r) β en voor de bundels (C_r) en (C_s) γ bedraagt.

Den graad n van M bepalen we uit hare snijpunten met een willekeurige rechte l. Op l nemen we een willekeurig punt Q_{rs} aan en leggen daardoor een C_r en een C_s, die elkaar, behalve in basispunten en in Q_{rs}, nog in $rs - \gamma - 1$ punten snijden. Door ieder dier punten leggen we een C_t. Deze $rs - \gamma - 1$ krommen C_t snijden l in $t(rs - \gamma - 1)$ punten Q_t, die we met het punt Q_{rs} laten correspondeeren. Om omgekeerd te vinden hoeveel punten Q_{rs} met een gegeven punt Q_t van l correspondeeren, nemen we op l een willekeurig punt Q_r aan en leggen daardoor een C_r, die de door Q_t gaande C_t buiten de basispunten in $rt - \beta$ punten snijdt. Door ieder dier punten brengen we een C_s, waarvan we de snijpunten met l Q_s noemen. Met een punt Q_r correspondeeren nu $s(rt - \beta)$ punten Q_s en met een punt Q_s $r(st - \alpha)$ punten Q_r. De $2rst - \alpha r - \beta s$ coincidenties $Q_r Q_s$ zijn de t snijpunten van l met de door Q_t gaande C_t en de met Q_t correspondeerende punten Q_{rs}, die dus ten getale van $2rst - \alpha r - \beta s - t$ aanwezig zijn.

Tusschen de punten Q_{rs} en Q_t van l heeft men dus een $(rst - \gamma t - t,\ 2rst - \alpha r - \beta s - t)$- correspondentie. De $3rst - \alpha r - \beta s - \gamma t - 2t$ coincidenties zijn de snijpunten van l met M en de snijpunten van l met de aanrakingskromme der bundels (C_r) en (C_s), d. i. de meetkundige plaats van de raakpunten der elkaar rakende krommen C_r en C_s. Heeft men nu twee krommenstelsels (μ_1, ν_1) en (μ_2, ν_2) [1]), dan is graad dier aanrakingskromme

$$\mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1 + \mu_1\mu_2 \text{ }^{2)}.$$

[1]) Een krommenstelsel (μ, ν) is een enkelvoudig oneindig stelsel van krommen, waarvan er μ door een willekeurig gegeven punt gaan en ν een willekeurig gegeven rechte aanraken.

[2]) Deze graad wordt gevonden door de snijpunten met een willekeurige rechte l te tellen. Daartoe beschouwt men de omhullende der raaklijnen van de krommen van het stelsel (μ_1, ν_1) in hare snijpunten met de rechte l; deze omhullende is van de klasse $\mu_1 + \nu_1$, daar de door een willekeurig punt Q van l gaande raaklijnen dier omhullende zijn: de raaklijnen in Q aan de μ_1 door Q gaande krommen van het stelsel en de ν_1-maal tellende rechte l. Evenzoo geeft het stelsel (μ_2, ν_2) een omhullende van de klasse $\mu_2 + \nu_2$. De $(\mu_1 + \nu_1)(\mu_2 + \nu_2)$ gemeenschappelijke raaklijnen van beide omhullenden zijn de $\nu_1\nu_2$-maal tellende rechte l en $\mu_1\mu_2 + \mu_1\nu_2 + \mu_2\nu_1$ andere rechten, wier snijpunten met l de snijpunten van l met de aanrakingskromme aanwijzen. Voor een afleiding met behulp van de voorwaarden symboliek zie SCHUBERT, Kalkül der abzählenden Geometrie, p. 51—52.

Nemen we voor de stelsels de beide bundels (C_r) en (C_s), dan is $\mu_1 = \mu_2 = 1$ en (zooals onmiddellijk uit het correspondentiebeginsel volgt) $\nu_1 = 2(r-1)$, $\nu_2 = 2(s-1)$. De graad der aanrakingskromme wordt dus:

$$2r + 2s - 3.$$

Voor het aantal snijpunten van l met M blijft dus over:

$$3rst - \alpha r - \beta s - \gamma t - 2t - (2r + 2s - 3) = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t).$$

We vinden dus:

De meetkundige plaats M der uit twee beweeglijke punten bestaande paren, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, is van den graad

$$n = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t);$$

hierin is α het aantal vaste snijpunten der bundels (C_s) en (C_t), β dat der bundels (C_t) en (C_r) en γ dat der bundels (C_r) en (C_s).

2. Terwijl de voorgaande beschouwingen juist blijven als er van de basispunten van een zelfden bundel eenige samenvallen, zullen we in het volgende onderstellen, dat de bundels (C_r), (C_s) en (C_t) resp. r^2, s^2 en t^2 verschillende basispunten hebben, zoodat we nog alleen toelaten, dat de basispunten van den eenen bundel gedeeltelijk met die van een anderen bundel samenvallen. Dan is α het aantal gemeenschappelijke basispunten der bundels (C_s) en (C_t) (die echter ook nog wel tot (C_r) kunnen behooren), enz.

Hebben de bundels geen gemeenschappelijke basispunten ($\alpha = \beta = \gamma = 0$), dan wordt de graad der meetkundige plaats:

$$3(rst + 1) - 2(r + s + t).$$

Dit is ook bij gemeenschappelijke basispunten de graad der *totale* meetkundige plaats zoolang die bepaald is, d.i. zoolang er geen aan de drie bundels gemeenschappelijke basispunten zijn. Is er wel zulk een punt, dan levert dit te zamen met een geheel willekeurig punt een puntenpaar PP', waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, van welk puntenpaar nu echter slechts één punt beweeglijk is; de eigenlijke meetkundige plaats is dan evenwel nog steeds bepaald.

Een basispunt alleen van den bundel (C_r) noemen we A_r, een gemeenschappelijk basispunt der bundels (C_s) en (C_t), dat geen basispunt van den bundel (C_r) is, noemen we A_{st} en een gemeenschappelijk basispunt der drie bundels A_{rst}. Is σ het aantal punten A_{rst}, dan bedraagt het aantal punten A_{st} $\alpha' = \alpha - \sigma$, dat der punten A_{rt} $\beta' = \beta - \sigma$ en dat der punten A_{rs} $\gamma' = \gamma - \sigma$, terwijl het aantal punten A_r gelijk is aan $r^2 - \beta' - \gamma' - \sigma$, enz. Met invoering van

α', β', γ' en σ wordt de graad n der eigenlijke meetkundige plaats:

$$n = 3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha' r + \beta' s + \gamma' t) - \sigma(r + s + t).$$

Hieruit zien we, dat de graad der eigenlijke meetkundige plaats door een gemeenschappelijk basispunt A_{st} met r verlaagd wordt. Zijn er geen punten A_{rst} ($\sigma = 0$), dan kan men zich van die graadverlaging gemakkelijk rekenschap geven door op te merken, dat zich van de totale meetkundige plaats de door A_{st} gaande C_r afsplitst, die niet tot de eigenlijke meetkundige plaats behoort. Het punt A_{st} geeft nl. te zamen met een willekeurig punt dier C_r een aan de vraag voldoend puntenpaar, waarvan echter slechts het laatstgenoemde punt beweeglijk is [1]). Verder blijkt, dat een punt A_{rst} den graad M met $r + s + t$ vermindert, iets waarvan men zich, door het onbepaald worden der totale meetkundige plaats, niet door afsplitsing rekenschap kan geven [2]).

3. De eigenlijke meetkundige plaats M heeft in de basispunten der drie bundels meervoudige punten, waarvan de multipliciteiten gemakkelijk te bepalen zijn.

Een basispunt A_r alleen van den bundel (C_r) is een ($st - \alpha - 1$)-voudig punt van M. Immers de door A_r gaande krommen C_s en C_t hebben buiten A_r en de basispunten $st - \alpha - 1$ snijpunten, waarvan ieder met A_r gecombineerd een puntenpaar oplevert, dat aan de vraag voldoet. De raaklijnen in A_r aan de $st - \alpha - 1$ door de genoemde snijpunten gaande krommen C_r zijn de raaklijnen van M in het meervoudige punt.

Om de multipliciteit van een punt A_{st} te bepalen merken we op, dat om een aan de vraag voldoend puntenpaar te krijgen, waarvan een der beweeglijke punten in A_{st} valt, noodig is, dat C_r door A_{st} gaat (waardoor ze bepaald is), terwijl C_s en C_t, die steeds door A_{st} gaan, een beweeglijk snijpunt in A_{st} moeten werpen, dus elkaar in A_{st} moeten aanraken. De vraag is nu: Hoe dikwijls gebeurt het, dat twee elkaar in A_{st} rakende krommen C_s en C_t elkaar nog eens op de door A_{st} gaande C_r snijden? Om deze vraag te beantwoorden brengen wij een willekeurige C_s aan, die de genoemde C_r buiten de basispunten in $rs - \gamma - 1$ punten snijdt. Door ieder dier punten leggen we een C_t, waardoor er tusschen de krommen C_s en C_t (en

[1]) Telt A_{st} voor ε vaste snijpunten der krommen C_s en C_t, dan splitst zich de door A_{st} gaande C_r ε-maal tellend af.

[2]) Telt A_{rst} voor ε vaste snijpunten van C_s en C_t, ζ vaste snijpunten van C_r en C_t en η vaste snijpunten van C_r en C_s, dan verlaagt A_{rst} den graad van M met $\varepsilon r + \zeta s + \eta t$; dit geldt ook voor een punt A_{st}, maar dan zijn ζ en η als nul te beschouwen.

dus ook tusschen hare raaklijnen in A_{st} een correspondentie ontstaat, waarbij met een C_s $rs - \gamma - 1$ krommen C_t en met een C_t $rt - \beta - 1$ krommen C_s correspondeeren. Het gebeurt dus voor de elkaar in A_{st} rakende krommen C_s en C_t $(rs + rt - \beta - \gamma - 2)$-maal, dat C_s en C_r behalve A_{st} nog een tweede beweeglijk snijpunt hebben, dat ook beweeglijk snijpunt van C_t en C_r is. Hierbij is echter het geval medegeteld, waarin dit tweede snijpunt met A_{st} samenvalt, dus de krommen C_s en C_t in A_{st} aan de C_r raken; er valt dan nog steeds slechts één beweeglijk snijpunt van C_s en C_t in A_{st}, terwijl er geen ander beweeglijk snijpunt behoeft te zijn, dat op C_r ligt, zoodat we zoo geen puntenpaar krijgen, dat een door A_{st} gaanden tak van M oplevert. Het punt A_{st} is dus een $(rs + rt - \beta - \gamma - 3)$-voudig punt van M.

Om de multipliciteit van een punt A_{rst} te bepalen heeft men na te gaan hoe dikwijls het gebeurt, dat drie elkaar in A_{rst} rakende krommen C_r, C_s en C_t nog eens alle drie door hetzelfde punt gaan. Daartoe brengen we een willekeurige C_r aan en de C_s, die deze C_r in A_{rst} aanraakt. Door ieder der $rs - \gamma - 1$ buiten de basispunten gelegen snijpunten van deze C_r en C_s leggen we een C_t. De vraag is dan hoe dikwijls het gebeurt, dat deze C_t in A_{rst} aan C_r en C_s raakt. Noemen we l_{rs} de gemeenschappelijke raaklijn in A_{rst} van C_r en C_s en l_t de raaklijn van C_t in dat punt. Met l_{rs} komen nu $rs - \gamma - 1$ rechten l_t overeen. Om omgekeerd te vinden hoeveel rechten l_{rs} met een willekeurig gekozen rechte l_t correspondeeren, brengen we een willekeurige C_r aan, die de door l_t bepaalde C_t buiten de basispunten in $rt - \beta$ punten snijdt. Door ieder dier snijpunten leggen we een C_s. Zijn l_r en l_s de raaklijnen in A_{rst} van C_r en C_s, dan komen met l_r $rt - \beta$ rechten l_s en met l_s $st - \alpha$ rechten l_r overeen. De $rt + st - \alpha - \beta$ coincidentiestralen wijzen de met l_t correspondeerende rechten l_{rs} aan; tot die coincidentiestralen behoort echter de lijn l_t zelf, die niet medegeteld moet worden, zoodat er $rt + st - \alpha - \beta - 1$ met l_t correspondeerende rechten l_{rs} overblijven. Tusschen de rechten l_{rs} en l_t bestaat dus een $(rs - \gamma - 1, rt + st - \alpha - \beta - 1)$-correspondentie.

De gezochte rechten l_{rst} worden aangewezen door de $st + tr + rs - (\alpha + \beta + \gamma) - 2$ coincidentiestralen dezer correspondentie, waarvan er evenwel drie niet medegeteld moeten worden. Wanneer nl. de aanraking in A_{rst} van C_r en C_s een aanraking van de 2de orde wordt, valt een der $rs - \gamma - 1$ in het algemeen buiten de basispunten gelegen snijpunten van C_r en C_s in A_{rst} en wel in de richting van l_{rs}. De door dat snijpunt gaande C_t zal dus in A_{rst} aan l_{rs} raken, m. a. w. l_t valt met l_{rs} samen. Daar echter wel de krommen C_r en C_s, maar niet de krommen C en C_t en ook niet de krommen C_s en

en C_t in A_{rst} een aanraking van de 2[de] orde vertoonen, krijgt men zoo geen puntenpaar, dat aan de vraag voldoet. Nu komt het bij twee krommenbundels met een gemeenschappelijk basispunt, waartusschen een projectief verband daardoor is vastgelegd, dat de krommen elkaar in dat basispunt moeten aanraken, *driemaal* voor dat dit een aanraking van de 2[de] orde wordt, zoodat er van het aantal coincidentiestralen 3 moet worden afgetrokken om dat der gezochte rechten l_{rst} te vinden. Hieruit volgt, dat de multipliciteit van het punt A_{rst} $st + tr + rs - (\alpha + \beta + \gamma) - 5$ bedraagt.

We vinden dus:

Een basispunt alleen van den bundel (C_r) *is een*

$$(st - \alpha - 1)\text{-}$$

voudig punt der eigenlijke meetkundige plaats M. *Een gemeenschappelijk basispunt der bundels* (C_s) *en* (C_t), *dat geen basispunt van* (C_r) *is, is een*

$$(rs + rt - \beta - \gamma - 3)\text{-}$$

voudig en een gemeenschappelijk basispunt der drie bundels een

$$(st + tr + rs - \alpha - \beta - \gamma - 5)\text{-}$$

voudig punt van M [1]).

4. Met behulp van het voorgaande laten zich gemakkelijk de snijpunten van M met een willekeurige kromme van een der bundels, b.v. een C_r, aangeven. Deze zijn:

1°. De $r^2 - \beta - \gamma + \delta$ punten A_r, te zamen voor

$$(r^2 - \beta - \gamma + \delta)(st - \alpha - 1)$$

snijpunten tellend.

2°. De $\beta - \delta$ punten A_{rt}, te zamen voor

$$(\beta - \delta)(sr + st - \alpha - \gamma - 3)$$

snijpunten tellend.

---

[1]) Zijn er geen punten A_{rst} ($\delta = 0$) en is dus de totale meetkundige plaats niet onbepaald, dan kan men ook naar de multipliciteiten der punten A_r en A_{st} als punten van de totale meetkundige plaats vragen. Nu bestaat het oneigenlijke deel der meetkundige plaats uit α krommen C_r, β krommen C_s en γ krommen C_t. Hiervan gaan door een punt A_r de α krommen C_r en door een punt A_{st} de β krommen C_s, de γ krommen C_t en een der krommen C_r. Hieruit volgt:

Een punt A_r *is een* $(st - 1)$-, *en een punt* A_{st} *een* $(rs + rt - 2)$-*voudig punt der totale meetkundige plaats.*

De multipliciteit van A_r als punt der totale meetkundige plaats is dus door het samenvallen der basispunten niet veranderd, terwijl de multipliciteit van A_{st} gelijk is aan de som der multipliciteiten, die dit punt hebben zou als het alleen basispunt van den bundel (C_s) of alleen basispunt van den bundel (C_t) was.

3°. De $\gamma - \delta$ punten A_{rs}, gevend

$$(\gamma - \delta)(tr + ts - \alpha - \beta - 3)$$

snijpunten.

4°. De δ punten A_{rst}, gevend te zamen

$$\delta(st + tr + rs - \alpha - \beta - \gamma - 5)$$

snijpunten.

5°. De beweeglijke snijpunten van M met C_r, dit zijn die snijpunten, die zich verplaatsen als we een andere C_r kiezen. Deze worden gevonden als de gemeenschappelijke puntenparen van de enkelvoudig oneindige lineaire scharen van puntgroepen op C_r door de bundels (C_s) en (C_t) ingesneden. Het aantal daarvan vindt men uit de volgende stelling:

Heeft men op een kromme van het geslacht p twee enkelvoudig oneindige lineaire scharen van puntgroepen uit a en b punten bestaande, dan bedraagt het aantal gemeenschappelijke puntenparen dier scharen

$$(a - 1)(b - 1) - p.$$

In ons geval is $a = rs - \gamma$, $b = rt - \beta$ en (daar C_r een willekeurige kromme van den bundel (C_r) is) $p = \frac{1}{2}(r-1)(r-2)$. Voor het aantal gemeenschappelijke puntenparen vindt men dus:

$$(rs - \gamma - 1)(rt - \beta - 1) - \tfrac{1}{2}(r - 1)(r - 2),$$

en voor het aantal beweeglijke snijpunten van M en C_r:

$$2(rs - \gamma - 1)(rt - \beta - 1) - (r - 1)(r - 2).$$

Het totale aantal snijpunten wordt dus:

$$r(3rst + 3 - 2r - 2s - 2t - \alpha r - \beta s - \gamma t),$$

in overeenstemming met de waarde, die we voor den graad van M gevonden hebben.

5. De puntenparen PP', waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, bepalen op M een involutorische (1,1)-correspondentie; in het volgende zullen we P en P' als correspondeerende punten van M aanduiden.

Valt P in een buiten de basispunten gelegen dubbelpunt van M, dan zullen met P in het algemeen twee verschillende punten P' en P'' correspondeeren, al naar gelang men P als punt van den eenen of den anderen door P gaanden tak van M beschouwt. De door P gaande krommen der bundels hebben nu nog twee andere gemeenschappelijke punten P' en P'', zoodat men zoo een puntentripel $PP'P''$ krijgt, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is.

Het kan echter ook voorkomen, dat de punten P' en P'' samenvallen. In dat geval correspondeeren met de beide takken door P

twee takken door P', zoodat P' eveneens dubbelpunt van M is. De door P gaande krommen der bundels hebben nu nog slechts één ander gemeenschappelijk punt P', maar nu doet zich de bijzonderheid voor, dat men P of P' op twee wijzen zoo verplaatsen kan, dat het andere gemeenschappelijke punt behouden blijft. PP' is dan dus als een dubbel correspondeerend puntenpaar op te vatten.

Heeft men nu omgekeerd een puntentripel $PP'P''$, dat op krommen van ieder der bundels ligt, dan is P een dubbelpunt van M, daar met P zoowel P' als P'' correspondeert en het dus mogelijk moet zijn P zoo te verplaatsen, dat het correspondeerende punt een door P' gaanden tak beschrijft, en zoo dat een door P'' gaande tak beschreven wordt. De kromme M heeft dus twee door P gaande takken $P1$ en $P2$, waarmede de takken $P'1$ en $P''2$ correspondeeren. Door het punt P' (dat natuurlijk eveneens dubbelpunt van M is, evenals P'') gaat nog een tweede tak $P'3$ en door P'' een tweede tak $P''3$, welke takken onderling correspondeeren. Doorloopt een punt Q den tak $P1$, dan hebben de door Q gaande krommen C_r, C_s, C_t nog een tweede gemeenschappelijk punt, dat den tak $P'1$ beschrijft, terwijl er nog een derde gemeenschappelijk punt P'' ontstaat en weer verdwijnt als Q het punt P passeert. Dit derde gemeenschappelijke punt verplaatst zich (en wel langs den tak $P''2$) als Q den anderen door P gaanden tak doorloopt, terwijl dan juist het in P' vallende gemeenschappelijke punt ontstaat en verdwijnt.

Puntentripels $PP'P''$, en dus ook buiten de basispunten vallende dubbelpunten van M, zullen aanwezig zijn, daar een puntentripel van 6 parameters afhangt en het een 6-voudige voorwaarde is, dat er een kromme van ieder der bundels door gaat. Men heeft dus:

De kromme M heeft buiten de basispunten der bundels dubbelpunten, die drie aan drie bij elkaar behooren en de puntentripels vormen, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is. Met den eenen of den anderen tak door een dubbelpunt van zulk een drietal correspondeert een tak door het tweede resp. het derde dubbelpunt van dit drietal.

Bovendien kan M echter nog paren van dubbelpunten bezitten, die de dubbele correspondeerende puntenparen aanwijzen. Met de beide takken door een dubbelpunt van zulk een paar correspondeeren de takken door het andere dubbelpunt van het paar.

6. Het aantal coincidenties der correspondentie tusschen P en P' laat zich als volgt bepalen. De punten P en P' vallen samen als de door P gaande krommen C_r, C_s en C_t in P dezelfde raaklijn hebben. P moet dan liggen zoowel op de aanrakingskromme R_{rs} der bundels

(C_r) en (C_s) als op de aanrakingskromme R_{rt} van (C_r) en (C_t). Het aantal snijpunten dier aanrakingskrommen, die van den graad $2r+2s-3$ resp. $2r+2t-3$ zijn, bedraagt

$$(2r+2s-3)(2r+2t-3).$$

Sommige dezer snijpunten liggen echter niet op de derde aanrakingskromme R_{st} en moeten dus niet medegeteld worden. De kromme R_{rs} gaat nl. éénmaal door een basispunt A_r of A_s en driemaal door een gemeenschappelijk basispunt A_{rs} of A_{rst}; immers in een punt van R_{rs} vallen twee beweeglijke snijpunten van C_r en C_s samen, zoodat het punt A_{rs} als punt der aanrakingskromme wordt opgeleverd als C_r en C_s in A_{rs} een aanraking van de 2[de] orde vertoonen, hetgeen driemaal gebeurt. Verder gaat R_{rs} door de dubbelpunten der krommen C_r en C_s, waarvan het aantal voor den bundel (C_r) $3(r-1)^2$ en voor den bundel (C_s) $3(s-1)^2$ bedraagt, zooals onmiddellijk uit den graad van den discriminant volgt.

Ieder der $r^2-\beta'-\gamma'-\delta$ punten A_r is enkelvoudig snijpunt van R_{rs} en R_{rt} (enkelvoudig, daar de raaklijnen in A_r aan R_{rs} en R_{rt} de raaklijnen der door A_r gaande krommen C_s en C_t zijn en dus in het algemeen verschillen), echter geen punt van R_{st}. Ieder der α' punten A_{st} is een dubbel snijpunt van R_{rs} en R_{rt}, daar die aanrakingskrommen in A_{st} een enkelvoudig punt hebben met dezelfde raaklijn, nl. die der door A_{st} gaande C_r; deze punten zijn ook punten van R_{st} en wel drievoudige. Ieder der β' punten A_{rt} is drievoudig snijpunt van R_{rs} en R_{rt} (daar het enkelvoudig punt van R_{rs} en drievoudig punt van R_{rt} is) en ligt tevens op R_{st}; hetzelfde geldt voor de γ' punten A_{rs}. Ieder der δ punten A_{rst}, die basispunten der drie bundels zijn, is 9-voudig snijpunt van R_{rs} en R_{rt}, daar het van ieder dier krommen een 3-voudig punt is; tevens is het drievoudig punt van R_{st}. Eindelijk zijn de $3(r-1)^2$ dubbelpunten van den bundel (C_r) enkelvoudige snijpunten van R_{rs} en R_{rt}, echter geen punten van R_{st}; van de door zulk een dubbelpunt gaande krommen C_r, C_s en C_t voert wel C_r aan C_s en aan C_t een oneigenlijke aanraking uit, zonder dat evenwel C_s en C_t elkaar aanraken.

Hieruit ziet men, dat de aanrakingskrommen R_{rs} en R_{rt}

$$r^2-\beta'-\gamma'-\delta+3(r-1)^2=4r^2-6r+3-\beta'-\gamma'-\delta$$

snijpunten hebben, die geen punten van R_{st} zijn, en dus geen samenvallende punten P en P' opleveren. Bovendien hebben R_{rs} en R_{rt}

$$2\alpha'+3\beta'+3\gamma'+9\delta$$

in de gemeenschappelijke basispunten vallende snijpunten, die wel op R_{st} liggen, maar toch geen samenvallende punten P en P' opleveren, doordat daarvoor noodig is dat van drie door een zelfde

punt gaande krommen C_r, C_s en C_t ieder tweetal twee in dat punt vallende *beweeglijke* snijpunten vertoont. Voor het aantal samenvallende punten P en P' blijft derhalve over:

$$(2r + 2s - 3)(2r + 2t - 3) - (4r^2 - 6r + 3 - \beta' - \gamma' - \delta) -$$
$$- (2\alpha' + 3\beta' + 3\gamma' + 9\delta) =$$
$$= 4(st + tr + rs) - 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha' + \beta' + \gamma' + 4\delta).$$

We vinden dus:

Het gebeurt

$$4(st + tr + rs) - 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$$

maal, dat de beide punten P en P', waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, samenvallen.

7. Met behulp van dit resultaat laat zich de klasse der omhullende van de verbindingslijnen PP' gemakkelijk bepalen. Daartoe heeft men te tellen hoeveel rechten PP' door een willekeurig punt S gaan. Dit aantal vindt men door de correspondentie tusschen de stralen SP en SP' te beschouwen, die we l en l' noemen. Dit is een involutorische (n, n)-correspondentie, waarin n de graad van de meetkundige plaats M der punten P en P' voorstelt; immers op een willekeurigen straal l (of l') liggen n punten P (of P'), met ieder waarvan één punt P' (of P) correspondeert. Er zijn dus $2n$ coincidentiestralen, die daardoor kunnen worden opgeleverd, dat PP' door S gaat, of daardoor dat P en P' samenvallen.

Voor het aantal coincidentiestralen, waarbij PP' door S gaat, vindt men dus:

$$2\{3(rst + 1) - 2(r + s + t) - (\alpha r + \beta s + \gamma t)\} - \{4(st + tr + rs) -$$
$$- 6(r + s + t) + 6 - 2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)\} = 6rst - 4(st + tr + rs) +$$
$$+ 2(r + s + t) - 2\alpha(r - 1) - 2\beta(s - 1) - 2\gamma(t - 1) + 2\delta.$$

Deze coincidentiestralen vallen echter twee aan twee samen. Immers gaat de verbindingslijn der correspondeerende punten P_1 en P_1' door S, dan komen met P_1P_1', als lijn l beschouwd, n lijnen l' overeen, waarvan er twee met P_1P_1' samenvallen, daar als men het punt P van l in P_1 of in P_1' kiest het correspondeerende punt P' in P_1' resp. P_1 komt. Evenzoo komen met P_1P_1', als lijn l' beschouwd, n lijnen l overeen, waarvan er eveneens twee met P_1P_1' samenvallen, waaruit volgt, dat P_1P_1' een dubbele coincidentiestraal is[1]). Om het

---

[1]) Van de juistheid dezer gevolgtrekking kan men zich gemakkelijk overtuigen door de correspondentie tusschen de stralen SP en SP' in beeld te brengen. Daartoe beschouwen we de parameters der rechten SP en SP' als rechthoekige

aantal der door S gaande rechten PP', dus de klasse der omhullende, te vinden moet derhalve het bovengevonden aantal nog door 2 gedeeld worden, zoodat men heeft:

De omhullende der verbindingslijnen van puntenparen, waardoor een kromme van ieder der bundels mogelijk is, is van de klasse

$$3\,rst - 2\,(st + tr + rs) + (r + s + t) - \alpha(r-1) - \beta(s-1) - \gamma(t-1) + \delta =$$
$$= 3\,rst - 2\,(st + tr + rs) + (r + s + t) - \alpha'(r-1) - \beta'(s-1) - \gamma'(t-1) -$$
$$- \delta\,(r + s + t - 4).$$

8. Hebben de bundels geen gemeenschappelijke basispunten, dan is de klasse der omhullende $3\,rst - 2\,(st + tr + rs) + (r + s + t)$. Door een gemeenschappelijk basispunt A_{st} der bundels (C_s) en (C_t) wordt die klasse met $r - 1$ verlaagd. *Dit komt doordat het punt A_{st} zich $(r-1)$-maal tellend van de omhullende heeft afgesplitst.* Immers de door A_{st} gaande kromme C_r heeft zich van de meetkundige plaats der punten P en P' afgesplitst. Kiest men nu P willekeurig op deze C_r, dan valt het correspondeerende punt P' in A_{st}. Een willekeurige door A_{st} gaande rechte is dus $(r-1)$-maal als verbindingslijn PP' op te vatten, daar men nog ieder der $r-1$ buiten A_{st} gelegen snijpunten met C_r als het punt P kan kiezen.

Hebben de drie bundels een gemeenschappelijk basispunt A_{rst}, dan blijft de totale omhullende van PP' (in tegenstelling met de totale meetkundige plaats van P en P') bepaald. Wel kan P geheel willekeurig worden aangenomen, maar dan valt P' in een punt A_{rst}, zoodat de lijn PP' door dat punt A_{rst} gaat en dus niet geheel willekeurig uitvalt. Daar de klasse der eigenlijke omhullende door het punt A_{rst} met $r + s + t - 4$ verlaagd is, zoo blijkt, *dat A_{rst} zich $(r + s + t - 4)$-maal tellend van de omhullende afsplitst.* Door het totaal onbepaald worden van een der punten van het puntenpaar laat zich die multipliciteit, voor zoover ik zie, niet op eenvoudige wijze verklaren.

Cartesiaansche coördinaten x en y van een punt, dat dan beeldpunt dier twee rechten is. De beeldkromme (die, daar de correspondentie involutorisch is, symmetrisch is ten opzichte der lijn $y = x$) wijst door hare snijpunten met de lijn $y = x$ de coincidentiestralen aan. Is nu B het beeldpunt der in P_1P_1' samenvallende stralen l en l', dan wordt de beeldkromme zoowel door een rechte evenwijdig aan de y-as als door een rechte evenwijdig aan de x-as in twee samenvallende punten B gesneden, daar P_1P_1' als l of l' tweemaal met zich zelf als l' resp. l correspondeert. B is dus dubbelpunt der beeldkromme, zoodat de rechte $y = x$ twee in B vallende snijpunten oplevert.

Wiskunde. — De Heer J. C. KLUYVER biedt een mededeeling aan: *„Eenige formules aangaande de getallen kleiner dan n en ondeelbaar met n."*

Het aantal $\varphi(n)$ van de getallen ν kleiner dan n en ondeelbaar met n kan door middel van de deelers d worden uitgedrukt.

Men heeft

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, d', \qquad (dd' = n)$$

indien men door $\mu(q)$ aanduidt de rekenkundige functie, die gelijk is aan nul, als q deelbaar is door een kwadraat, en die overigens gelijk is aan $+1$ of -1, naargelang q het product is van een even of van een oneven aantal priemgetallen.

Deze vergelijking is een bijzonder geval van eene meer algemeene, met behulp waarvan zekere symmetrische functies van de getallen ν uitgedrukt kunnen worden door de deelers d.

Deze algemeene betrekking kan geschreven worden als volgt [1])

$$\sum_{\nu} f(\nu) = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k=1}^{k=d'} f(k\, d).$$

Voor het bewijs heeft men op te merken, dat in de onderstelling $(m, n) \sim D$ de term $f(m)$ in het rechter lid zoo dikwijls voorkomt, als d een deeler is van D. Daarom wordt de totale coëfficiënt van den term $f(m)$ in het rechterlid gelijk aan

$$\sum_{d/D} \mu(d),$$

en deze som is nul voor D grooter dan één, en gelijk aan één, wanneer m gelijk is aan een der getallen ν.

Van deze vergelijking van KRONECKER zullen eenige eenvoudige gevallen worden beschouwd.

Laat vooreerst zijn

$$f(y) = e^{xy}.$$

De vergelijking wordt

$$\sum_{\nu} e^{x\nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k=1}^{k=d'} e^{xkd} = \sum_{d/n} \mu(d)\, e^{xd} \frac{e^{xn} - 1}{e^{xd} - 1},$$

of omdat

$$\sum_{d/n} \mu(d) = 0$$

is,

$$\sum_{\nu} e^{x\nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{e^{xn} - 1}{e^{xd} - d}.$$

---

[1]) KRONECKER, Vorlesungen über Zahlentheorie. I, p. 251.

Schrijft men

$$\sum_{\nu} \frac{xe^{x\nu}}{e^{xn}-1} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{x}{e^{xd}-1},$$

dan kunnen de functies van BERNOULLI $f_k(\theta)$, bepaald door de vergelijking

$$\frac{e^{\theta x}-1}{e^{x}-1} = \theta + \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k f_k(\theta),$$

worden ingevoerd, en men kan op deze wijze aantoonen, dat

$$\sum_{\nu}\left\{\frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{k=\infty} x^k n^{k-1} f'_k\left(\frac{\nu}{n}\right)\right\} = \sum_{d/n} \frac{\mu(d)}{d}\left\{1 - \tfrac{1}{2}xd + \frac{B_1}{2!}x^2d^2 - \frac{B_2}{4!}x^4d^4 + \ldots\right\}.$$

Door de overeenkomstige termen in beide leden aan elkaar gelijk te stellen vindt men

$$\sum_{\nu} f'_{2m}\left(\frac{\nu}{n}\right) = (-1)^{m-1} \frac{B_m}{2m!} \sum_{d/n} \mu(d) d'^{-2m+1}$$

als eene eerste uitbreiding van de betrekking

$$\sum_{\nu} \nu^0 = \sum_{d/n} \mu(d) d'.$$

Als men opmerkt, dat

$$\sum_{d/n} \mu(d) d'^{-2m+1} = \frac{1}{n^{2m-1}} \sum_{d/n} \mu(d) d^{2m-1},$$

volgt er voor twee getallen n en n', die dezelfde priemfactoren hebben

$$\frac{\sum_{\nu} f'_{2m}\left(\frac{\nu}{n}\right)}{\sum_{\nu'} f'_{2m}\left(\frac{\nu'}{n'}\right)} = \left(\frac{n'}{n}\right)^{2m-1}.$$

Op dezelfde wijze kan eene uitdrukking voor de som van de k^{de}-machten der getallen ν worden verkregen. Als men beide leden der vergelijking

$$\sum_{\nu} e^{x\nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{e^{xn}-1}{e^{xd}-1}$$

ontwikkelt, vindt men

$$\frac{1}{k!} \sum_{\nu} \nu^k = \sum_{d/n} \mu(d) d^k f_k(d').$$

Andere betrekkingen van denzelfden aard, die goniometrische functies bevatten, kan men afleiden door x te veranderen in $2\pi ix$.

Uit

$$\sum_{\nu} e^{2\pi ix\nu} = \sum_{d/n} \mu(d) \frac{e^{2\pi ixn}-1}{e^{2\pi ixd}-1}$$

vindt men door de bestaanbare en de imaginaire stukken te scheiden

$$\sum_{\nu} \cos 2\pi x\nu = \tfrac{1}{2} \sin 2\pi x n \sum_{d/n} \mu(d) \cot \pi x d,$$

$$\sum_{\nu} \sin 2\pi x\nu = \sin^2 \pi x n \sum_{d/n} \mu(d) \cot \pi x d.$$

In het bijzonder geeft de eerste dezer vergelijkingen eene eenvoudige uitkomst, als men $x = \frac{1}{n} + \varepsilon$ stelt, waar ε is eene tot nul naderende grootheid.

Daar de factor $\sin 2\pi x n$ tegelijk met ε tot nul nadert, wordt het geheele rechter lid nul op den term na, waarin $d = n$. Op deze wijze komt er

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi\nu}{n} = \mu(n),$$

en men heeft de functie $\mu(n)$, die oorspronkelijk alleen afhing van de ondeelbare factoren van n, uitgedrukt als een functie van de getallen ondeelbaar met n.

Op eene dergelijke wijze kan men in de tweede vergelijking stellen $x = \frac{1}{2n}$, waardoor gevonden wordt

$$\sum_{\nu} \frac{\sin \pi\nu}{n} = \sum_{d/n} \mu(d) \cot \frac{\pi d}{2n}.$$

Nog eene andere goniometrische formule wordt verkregen uit de cosinus-betrekking door de substitutie $x = \frac{q}{n} + \varepsilon$. Laat D de grootste gemeene deeler zijn van de getallen n en q, zoodat men heeft

$$n = n_0 D \quad , \quad q = q_0 D.$$

In het rechterlid zijn dan, wanneer ε tot nul nadert, alleen die termen te behouden, in welke qd deelbaar is door n, of wat hetzelfde is, die termen voor welke de complementaire deeler d' deelbaar is op D.

Men heeft dus

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi q\nu}{n} = \sum_{d'/D} \mu\left(\frac{n}{d'}\right) d' = D \sum_{d/D} \mu(n_0 d) \frac{1}{d}. \qquad (dd' = D)$$

In plaats van hier de sommatie uit te strekken over alle deelers d van D, is het voldoende alleen in aanmerking te nemen die deelers δ van n, die ondeelbaar zijn met n_0. Aldus vindt men

$$D \sum_{d/D} \mu(n_0 d) \frac{1}{d} = \mu(n_0) D \sum_{\delta} \mu(\delta) \frac{1}{\delta},$$

en daar het rechterlid blijkbaar herleid kan worden tot

$$\mu(n_0) \frac{\varphi(n)}{\varphi(n_0)} = \mu\left(\frac{u}{D}\right) \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{D}\right)},$$

verkrijgt men voor elk willekeurig getal q, wanneer geldt $(n, q) \sim D$,

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi q\nu}{n} = \mu\left(\frac{u}{D}\right) \frac{\varphi(n)}{\varphi\left(\frac{n}{D}\right)}.$$

Aangaande de uitkomst

$$\sum_{\nu} \cos \frac{2\pi\nu}{n} = \mu(n)$$

kan nog eene enkele opmerking gemaakt worden. Aan elk getal ν is een tweede $\nu' = n - \nu$ toegevoegd; stelt men nu voor door ϱ_n eene onherleidbare breuk $< \frac{1}{2}$ met den noemer n, dan kan men dus schrijven

$$2\sum \cos 2\pi\varrho_n = \mu(n),$$

en ook

$$2\sum_{n \leq g} \cos 2\pi\varrho_n = \sum_{n \leq g} \mu(n).$$

Voor groote waarden van g nu zullen de breuken ϱ_n zich niet gelijkmatig maar toch min of meer geregeld over het vak $0 - \frac{1}{2}$ verspreiden, en er is eenige grond om te verwachten, dat de positieve en de negatieve termen van de som $\sum_{n \leq g} \cos 2\pi\varrho_n$ grootendeels elkaar zullen vernietigen; daarom is de vergelijking

$$2\sum_{n \leq g} \cos 2\pi\varrho_n = \sum_{n \leq g} \mu(n)$$

geheel in overeenstemming met de onderstelling van VON STERNECK, dat als g grooter en grooter wordt, de volstrekte waarde van $\sum_{n \leq g} \mu(n)$ de waarde $\sqrt{g}$ niet te boven gaat.

Men verkrijgt een ander stel formules door in de vergelijking van KRONECHER te nemen

$$f(y) = \log\left(e^{\frac{2\pi i x}{n}} - e^{\frac{2\pi i y}{n}}\right).$$

Er komt dan

$$\sum_{\nu} \log\left(e^{\frac{2\pi i x}{n}} - e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\right) = \sum_{d/n} \mu(d) \sum_{k=1}^{k=d'} \log\left(e^{\frac{2\pi i x}{n}} - e^{\frac{2\pi i k d}{n}}\right),$$

of

$$\sum_{\nu} \log\left(e^{\frac{2\pi i x}{n}} - e^{\frac{2\pi i \nu}{n}}\right) = \sum_{d/n} \mu(d) \log\left(e^{\frac{2\pi i x d'}{n}} - 1\right)$$

en na eenige herleiding

$$\sum_{\nu} \log 2 \sin \frac{\pi}{n}(\nu - x) = \sum_{d/n} \mu(d) \log 2 \sin \frac{\pi x}{d}.$$

Door herhaalde differentiaties ten opzichte van x, kan men uit

deze vergelijking verdere formules vinden, die in aard en strekking overeenkomen met de formule

$$\varphi(n) = \sum_{d/n} \mu(d)\, d.$$

Zoo bijv. vindt men door twee maal te differentieeren

$$\sum_{\nu} \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi\nu}{n}} = \frac{1}{3} \sum_{d/n} \mu(d)\, d^2$$

en komt er door die bewerking te herhalen

$$-\sum_{\nu} \left[\frac{d^{2m}}{dy^{2m}} \log \sin y\right]_{y=\frac{\pi\nu}{n}} = \frac{B_m 2^{2m}}{2m} \sum_{d/n} \mu(d)\, d^{2m},$$

eene uitkomst, bevat in de nog iets meer algemeene betrekking

$$n^s \sum_{\nu} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(nk-\nu)^s} = \zeta(s) \sum_{d/n} \mu(d)\, d^s,$$

die uit zichzelve evident is.

Terugkeerende tot de vergelijking

$$\sum_{\nu} \log 2 \sin y \frac{\pi}{n}(\nu - x) = \sum_{d/n} \mu(d) \log 2 \sin \frac{\pi x}{d},$$

leidt men af, als x tot nul nadert,

$$\sum_{\nu} \log 2 \sin \frac{\pi\nu}{n} = -\sum_{d/n} \mu(d) \log d.$$

Ten einde de waarde van het rechterlid te bepalen, merkt men op, dat voor $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$ geldt de vergelijking

$$-\sum_{d/n} \mu(d) \log d = -\left[\frac{d}{dy}(1 - e^{y \log p_1})(1 - e^{y \log p_2}) \ldots\right]_{y=0}.$$

Men ziet hieruit, dat als men stelt

$$-\sum_{d/n} \mu(d) \log d = \gamma(n),$$

de functie $\gamma(n)$ nul zal zijn voor alle getallen n, die verschillende ondeelbare factoren hebben, en dat deze functie de waarde $\log p$ zal hebben, als n is eenige macht van het ondeelbare getal p.

Men heeft alzoo

$$\prod_{\nu} 2 \sin \frac{\pi\nu}{n} = e^{\gamma(n)},$$

eene uitkomst door KRONECKER [1]) langs anderen weg afgeleid.

In de vergelijking

$$\prod_{\nu} 2 \sin \frac{\pi}{n}(\nu - x) = \prod_{d/n} \left(2 \sin \frac{\pi x}{d}\right)^{\mu(d)}$$

[1]) KRONECKER, Vorlesungen über Zahlentheorie. I, p. 296,

kan nog eene andere substitutie worden uitgevoerd; men kan x laten naderen tot $-\frac{n}{2}$.

Als n oneven is zijn alle deelers d en d' ook oneven, en men heeft onmiddellijk

$$\prod_{\nu} 2 \cos \frac{\pi\nu}{n} = \prod_{d/n} (-1)^{\frac{d'-1}{2}\mu(d)} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)}.$$

Als $n = 2m$ is en m is oneven, zal men hebben $\varphi(m) = \varphi(n)$. Voor de helft zullen de getallen $\varkappa$ ondeelbaar met m en kleiner dan m gelijk zijn aan eenig getal ν, voor de andere helft zullen de getallen $\varkappa$ zijn van de gedaante $\nu - m$.

Men heeft derhalve

$$\prod_{\nu} 2 \sin \frac{2\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa} 2 \sin \frac{2\pi\varkappa}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa} 2 \sin \frac{\pi\varkappa}{m},$$

waaruit volgt

$$\prod_{\nu} 2 \cos \frac{\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \frac{\prod_{\varkappa} 2 \sin \frac{\pi\varkappa}{m}}{\prod_{\nu} 2 \sin \frac{\pi\nu}{n}} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} e^{\gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \gamma(n)}$$

Eindelijk, als $n = 2m$ en m is even, zal men hebben $\varphi(m) = \frac{1}{2}\varphi(n)$. Nu zal elk der getallen $\varkappa$ ondeelbaar met m en kleiner dan m tegelijkertijd gelijk zijn aan eenig getal ν en ook aan der verschillen $\nu - m$.

De berekening geeft in dit geval

$$\prod_{\nu} 2 \sin \frac{2\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa} \left(2 \sin \frac{2\pi\varkappa}{n}\right)^2 = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \prod_{\varkappa} \left(2 \sin \frac{\pi\varkappa}{m}\right)^2.$$

en verder

$$\prod_{\nu} 2 \cos \frac{\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} \frac{\prod_{\varkappa} \left(2 \sin \frac{\pi\varkappa}{m}\right)}{\prod_{\nu} 2 \sin \frac{\pi\nu}{n}} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} e^{2\gamma\left(\frac{n}{2}\right) - \gamma(n)}.$$

Uit het bovenstaande kan men besluiten als volgt. Indien men stelt

$$\prod_{\nu} 2 \cos \frac{\pi\nu}{n} = (-1)^{\frac{1}{2}\varphi(n)} e^{\lambda(n)},$$

zal de rekenkundige functie $\lambda(n)$ alleen dan van nul verschillen, als n het dubbel is van eene macht van eenig priemgetal p, in welk geval $\lambda(n) = \log p$. Men kan hier opnieuw invoeren de onherleidbare

breuken $\varrho_n < \frac{1}{2}$ met den noemer n, en zal kunnen schrijven, wanneer men met $M(q)$ aanwijst het kleinste gemeene veelvoud van alle getallen, die q niet overtreffen,

$$2 \sum_{n \leqq g} \log 2 \sin \pi \varrho_n = \sum_{n \leqq g} \gamma(n) = \log M(g),$$

$$2 \sum_{n \leqq g} \log 2 \cos \pi \varrho_n = \sum_{n \leqq g} \lambda(n) = \log M\left(\frac{g}{2}\right).$$

Als men nu het quotient $\log M(g) : \log g$ als eene benaderde (maar altijd te kleine) waarde beschouwt van het aantal $A(g)$ der ondeelbare getallen kleiner dan g, kan men aan de uitkomst van KRONECKER

$$A(g) = \frac{2}{\log g} \sum_{n \leqq q} \log 2 \sin \pi \varrho_n$$

toevoegen de nieuwe vergelijking

$$A\left(\frac{g}{2}\right) = \frac{2}{\log \frac{g}{2}} \sum_{n \leqq g} \log 2 \cos \pi \varrho_n .$$

Natuurkunde. — De Heer ZEEMAN biedt namens den Heer E. E. MOGENDORFF te Leeuwarden eene mededeeling aan: „*Over eene nieuwe empirische spectraalformule.*"

(Mede aangeboden door den Heer J. D. VAN DER WAALS).

Door de fundamenteele onderzoekingen van KAYSER en RUNGE en van RYDBERG werd het bestaan van spectraalreeksen bewezen. Voor de eerste lijnen eener reeks geven echter de door deze natuurkundigen voorgeslagen formules in het algemeen te groote afwijkingen. Ik heb getracht de door RYDBERG gegeven formule

$$n = A - \frac{N_0}{(m + a)^2}$$

te verbeteren. In het bijzonder merkwaardig is in de formule van RYDBERG de daarin voorkomende universeele constante N_0. Voor waterstof volgt uit de formule van BALMER, die in RYDBERG's formule als bijzonder geval is opgesloten, voor de tot vacuum gereduceerde waarneming $N_0 = 109675$.

Ik heb, een oogenblik veronderstellende, dat de N_0 mede veranderlijk was voor de verschillende reeksen, de constanten A, a en N_0 uit 3 van de best waargenomen lijnen berekend. Voor N_0 werden de volgende waarden gevonden:

Hoofdreeks	Lithium	109996
„	Natrium	107178
„	Kalium	105638
„	Rubidium	104723
„	Caesium	104665
Eerste nevenreeks	Waterstof	109704
„ „	Helium	109703
„ „	Natrium	110262
„ „	Kalium	109081
„ „	Zilver	107162
„ „	Magnesium	108695
„ „	Zink	107489
„ „	Zuurstof	110660
Tweede „	Natrium	107819
„ „	Magnesium	105247
„ „	Calcium	103702
„ „	Zink	105399
„ „	Aluminium	105721

Deze waarden zijn berekend uit niet tot vacuum gereduceerde trillingsgetallen.

Zooals uit deze getallen blijkt is N_0 niet absoluut constant. Zooals KAYSER [1]) op andere wijze besloot, zien we echter dat N_0 relatief weinig van element tot element verandert. [2]) Het vermoeden ligt voor de hand, dat in de ware formule eene natuurconstante zal voorkomen.

---

[1]) KAYSER, Handbuch II. p. 553.

[2]) De B in de formule van KAYSER en RUNGE verandert tusschen aanmerkelijk ruimer grenzen, dan de N_0 uit RYDBERG's formule.

Voor de eerste nevenreeks van Aluminium geeft de berekening eene aanmerkelijke afwijking. Berekend uit de eerste termen dier reeks wordt $N_0 = 207620$ gevonden, uit de middenste lijnen $N_0 = 138032$ en uit de lijnen met kleinere λ $N_0 = 125048$.

De 1e nevenreeks van Al. gedraagt zich dus geheel abnormaal.

In de formule van Rydberg moet een andere functie van het ordegetal m, dan $(m + a)^{-2}$, gebruikt worden, om een betere aansluiting, vooral aan de begintermen van een reeks, te verkrijgen.

In mijn proefschrift, dat binnenkort zal verschijnen, heb ik onderzocht de formule:

$$n = A - \frac{109675}{\left(m + a + \frac{b}{m}\right)^2},$$

waarin n de tot vacuum gereduceerde trillingsgetallen, A, a en b te bepalen constanten voorstellen. Het ordegetal m doorloopt de rij der positieve, geheele getallen, te beginnen met $m = 1$. Met deze formule wordt in de meeste gevallen eene goede aansluiting verkregen, ook aan de eerste lijnen van een reeks. De nevenreeksen convergeeren vrij wel naar eenzelfde grens, terwijl ook aan de wet van Rydberg—Schuster goed wordt voldaan, in die gevallen, waar behalve nevenreeksen ook een hoofdreeks is waargenomen.

Ook door Ritz is eene spectraalformule voorgesteld [1]).

In mijne dissertatie heb ik tegen de formules van Ritz bezwaren ingebracht, daar ze aanleiding geeft tot hoogst onwaarschijnlijke combinaties van lijnen. Bij de metalen van de 2de kolom van het systeem van Mendelejeff is bovendien zijn beschouwing geheel niet in overeenstemming met de waarneming.

In de volgende tabellen wordt onder m het orde getal, onder λ_w de waargenomen golflengte in Å. E., onder F de foutengrens der waarneming, onder A de afwijking volgens de door mij voorgestelde formule, onder A. K. R. de afwijking volgens de formule van Kayser en Runge weergegeven. Door het teeken * rechts boven een golflengte wordt aangewezen, dat deze lijnen aan de berekening der constanten A, a en b ten grondslag werden gelegd.

De constanten zijn berekend uit de tot vacuum gereduceerde trillingsgetallen [2]).

---

1) Ann. d. Phys. Bd. 12, 1903, p. 264. W. Ritz, Zur Theorie der Serienspectren.

2) Deze getallen nam ik, zoo 't mogelijk was steeds uit de „Index of Spectra" van Marshall Watts.

Lithium.

Hoofdreeks : A = 43480,13; $a = + 0{,}95182$; $b = + 0{,}00722$
1e neven reeks: A = 28581,8 ; $a = + 1{,}998774$; $b = - 0{,}000822$
2e „ : A = 28581,8 ; $a = + 1{,}59872$; $b = - 0{,}00321$
3e „ ; A = 28581,8 ; $a = + 1{,}95085$; $b = + 0{,}00404$

De nevenreeksen convergeeren hier blijkbaar naar een zelfde grens. Het trillingsverschil tusschen de grenzen van hoofd- en nevenreeksen is 43480;13—21581,8=14898,33. Het trillingsgetal van de 1ste lijn der hoofdreeks is 14902,7. Aan de wet van RYDBERG-SCHUSTER voldoet de formule hier dus vrij goed.

HOOFDREEKS.

m	λ_w	F	K	A. K. R.
1	6708,2 *	0,20	0	+ 108
2	3232,77*	0,03	0	0
3	2741,39	0,03	— 0,06	0
4	2562,60*	0,03	0	0
5	2475,13	0,10	— 0,22	— 0,2
6	2425,55	0,10	— 0,18	— 0,01
7	2394,54	0,20	— 0,13	+ 0,30
8	2373,9 L. D.	?	+ 0,02	+ 0,75
9	2359,4 L. D.	?	+ 0,17	+ 1,18

EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	6103,77*	0,03	0	0
2	4602,37*	0,10	0	0
3	4132,44	0,20	— 0,11	0
4	3915,20*	0,20	0	— 0,20
5	3794,9	5,00	+ 0,09	— 0,35
6	3718.9	5,00	— 1,94	— 2,25
7	3670,6	5,00	— 1,06	— 1,41

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	8127,0* S	0,30	0	— 65
2	4972,11	0,10	— 0,13	0
3	4273,44*	0,20	0	0
4	3985,94	0,20	+ 0,22	0
5	3838,30	3,00	+ 2,40	— 0,2

DERDE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	6240,3* S	0,40	0	—
2	4636,3* S	0,40	0	—
3	4148,2 S	1,00	+ 1,6	—
4	3921,8 E H	?	— 0,88	

Met de hoofdletters achter de golflengten worden de waarnemers aangewezen: L. D. LIVEING en DEWAR; S. SAUNDERS en E. H. EXNER en HASCHEK. Waar geen verdere aanwijzing staat, is de waarneming van KAYSER en RUNGE.

Natrium.

Hoofdreeks (lijnen der doubletten met grootste λ)

$$A = 41447,09; \quad a = 1,147615; \quad b = -0,031484$$

Hoofdreeks (lijnen der doubletten met kleine λ)

$$A = 41445,20; \quad a = 1,148883; \quad b = -0,031908.$$

Voor de berekening van de grens der nevenreeksen is gebruik gemaakt van de wet van RYDBERG-SCHUSTER. Met het oog op de constante trillingsverschillen van de doubletten der nevenreeksen, heb ik de berekening alleen uitgevoerd voor de componenten met kleine golflengte.

Voor de 1e nevenreeks is $A = 24491,1$; $a = 1,98259$; $b = +0,00639$

Voor de 2e nevenreeks is $A = 24491,1$; $a = 1,65160$; $b = -0,01056$

HOOFDREEKS.

m	λw	F	A	A. K. R.
1	5896,16*	—	0	+ 78
1	5890,19*	—	0	+ 86
2	3303,07*	0,03	0	0
2	3302,47*	0,03	0	0
3	2852,91	0,05	— 0,14	0
3	2852,91	0,05	— 0,06	0
4	2680,46*	0,10	0	0
4	2680,46*	0,10	0	0
5	2593,98	0,10	+ 0,03	+ 0,03
5	2593,98	0,10	— 0,02	+ 0,09
6	2543,85 L. D.	0,10	— 0,06	+ 0,10
6	2543,85 L. D.	0,10	— 0,14	+ 0,24
7	2512,23 L. D.	0,20	+ 0,03	+ 0,50
7	2512,23 L. D.	0,20	— 0,10	+ 0,60

EERSTE NEVENREEKS

m	λw	F	A	A. K. R.
1	8184,33* L.	0,2	0	0
2	5682,90	0,15	0,01	0
3	4979,30*	0,20	0	0
4	4665,20	0,50	— 0,13	+ 0,52
5	4494,30	1,00	— 0,28	+ 0,50
6	4390,70 L. D.	?	+ 0,28	+ 1,30
7	4325,70 L. D.	?	+ 4,00	+ 1,76

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λw	F	A	A. K. R.
1	11404	?	+ 1,00	+ 100,—
2	6154,62*	0,10	0	0
3	5149,19*	0,10	0	0
4	4748,36	0,15	+ 0,12	0
5	4542,75	0,20	+ 0,65	+ 1,39
6	4420,20 L. D.	?	+ 0,02	+ 1,55
7	4343,70	?	+ 2,00	— 1,36

Zink.

Van dit element heb ik de formules berekend van de 1e en 2e nevenreeks, voor de componenten met grootste golflengte van de tripletten.

De grenzen werden voor beide reeksen afzonderlijk bepaald, voor de 1e nevenreeks gaf de berekening 42876,25 en voor de 2e nevenreeks bleek de grens te zijn 42876,70. Een zeer goede overeenstemming.

De formule wijst als 1e lijn van de 1e nevenreeks van Zink aan de lijn 8024,05, welke niet is waargenomen. De 8e lijn der 1e nevenreeks 2409,22 is ook niet waargenomen. Als 9e lijn dezer reeks werd 2393,93 berekend, die merkwaardig goed overeenkomt met de intense lijn 2393,88. Deze lijn was tot dusverre niet in het reeksverband opgenomen. De groote intensiteit van een lijn in de staart der reeks is wel vreemd; een onderzoek van de magnetische splitsing zou hier kunnen uitmaken, of het juist is die lijn onder de 1e nevenreeks te rangschikken.

De formule voor de 1e nevenreeks is:

$$n = 42876,25 - \frac{109675}{\left(m + 0,909103 - \frac{0,007085}{m}\right)^2}$$

en voor de 2e nevenreeks:

$$n = 42876,70 - \frac{109675}{\left(m + 1,286822 - \frac{0,058916}{m}\right)^2}$$

EERSTE NEVENREEKS.

m	λw	F	A	A. K. R.
1	—	—	—	—
2	3345,13*	0,03	0	— 0,08
3	2801,00*	0,03	0	+ 0,03
4	2608,65*	0,05	0	+ 0,06
5	2516,00	0,20	+ 0,04	— 0,11
6	2463,47	0,20	— 0,14	— 0,39
7	2430,74	0,30	+ 0,22	+ 9,00
8	—	—	—	—
9	2393,88	0,05	— 0,05	—

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	4810,71*	0,03	0	+ 58
2	3072,19*	0,05	0	0,00
3	2712,60*	0,05	0	+ 0,02
4	2567,99*	0,10	+ 0,11	— 0,01
5	2493,67	0,15	+ 0,12	— 0,04
6	2449,76	0,25	— 0,11	— 0,20

Thallium.

De formule voor de 1e nevenreeks is:

$$n = 41466,4 - \frac{109675}{\left(m + 1,90141 - \frac{0,00366}{m}\right)^2}$$

voor de satellieten:

$$n = 41466,4 - \frac{109675}{\left(m + 1,88956 - \frac{0,00085}{m}\right)^2}$$

en voor de 2e nevenreeks:

$$n = 41466,4 - \frac{109675}{\left(m + 1,26516 - \frac{0,07108}{m}\right)^2}$$

De grens is berekend uit 3 lijnen van de 1e nevenreeks; van de satellieten en van de 2e nevenreeks waren nu nog maar 2 lijnen noodig. In dit spectrum zijn dus alle constanten berekend uit 7 lijnen, en 31 lijnen worden door de formule goed weergegeven.

EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_w	F	A	A. K. R.
1	3519,39*	0,03	0	—
2	2918,43	0,03	— 0,04	—
3	2709,33*	0,03	0	—
4	2609,08	0,03	+ 0,04	—
5	2552,62*	0,10	0	—
6	2517,50	0,10	— 0,06	— 0,34
7	2494,00	0,10	— 0,03	— 0,19
8	2477,58	0,10	— 0,09	+ 0,06
9	2465,54	0,20	— 0,17	+ 0,24
10	2456,53	0,20	— 0,15	+ 0,47
11	2449,57	0,30	— 0,17	+ 0,68
12	2444,00	0,30	— 0,28	+ 0,79
13	2439,58	0,30	— 0,24	+ 0,95

SATELLIETEN.

m	λw	F	A	A. K. R.
1	3529,58*	0,03	0	+ 0,02
2	2921,63	0,03	+ 0,06	— 0,07
3	2710,77*	0,03	0	+ 0,13
4	2609,86	0,03	— 0,03	— 0,02
5	2553,07	0,10	— 0,05	— 0,12

TWEEDE NEVENREEKS.

m	λw	F	A	A. K. R.
1	5350,65*	0,03	0	— 168
2	3229,88*	0,03	0	— 21,7
3	2826,27	0,05	— 0,05	— 3,65
4	2665,67	0,05	— 1,32	— 1,69
5	2585,68	0,05	— 0,16	+ 0,01
6	2538,27	0,10	— 0,17	+ 0,04
7	2508,03	0,15	— 0,14	— 0,01
8	2487,57	0,20	— 0,06	+ 0,08
9	2427,65	0,20	— 0,34	— 0,21
10	2462,01	0,30	— 0,20	— 0,03
11	2453,87	0,30	— 0,17	+ 0,07
12	2447,59	0,30	— 0,05	+ 0,22
13	2442,24	0,30	— 0,37	— 0,01

Even wil ik nog stilstaan bij het spectrum van Aluminium. De 1ste nevenreeks van dit element wordt door geen van de tot dusverre gegeven formules ook maar eenigszins bevredigend weergegeven; evenmin bereikt men met mijne formule een voldoend resultaat. In het begin van deze mededeeling heb ik er op gewezen, dat zeer afwijkende waarden voor N_0 uit drie van de 1ste lijnen der reeks werden berekend.

De formule luidt:

$$n = 48287{,}9 - \frac{109675}{\left(m + 0{,}89436 + \frac{1{,}038060}{m}\right)^2}$$

De constanten zijn berekend uit de lijnen 4, 5 en 6.

ALUMINIUM. EERSTE NEVENREEKS.

m	λ_W	F	A	A. K. R.
1	3082,27	0,03	— 268,82	+ 384,8
2	2568,08	0,03	+ 3,46	+ 53,5
3	2367,16	0,03	+ 2,52	+ 6,1
4	2263,83*	0,10	0	+ 0,03
5	2204,73*	0,10	0	+ 0,17
6	2168,87*	0,10	0	— 0,13
7	2145,48	0,20	+ 0,06	— 0,31
8	2129,52	0,20	+ 0,11	— 0,21
9	2118,58	0,20	— 0,28	+ 0,44

De aansluiting aan de eerste lijnen (1, 2 en 3), laat veel te wenschen over. De waarde van de constante *b* is hier 1,03806, grooter dan de waarde van *a* in die formule; zoo iets komt bij geen van de andere reeksen voor.

Met 4 constanten, dus met

$$n = A - \frac{109675}{\left(m + a + \frac{b}{m} + \frac{c}{m^2}\right)^2}$$

bereikt men waarschijnlijk een beter resultaat. Wanneer de constanten *b* en hier waarschijnlijk ook de *c* niet klein zijn ten opzichte van *a*, dan is de invloed van die constanten vooral voor de kleine ordegetallen zeer groot. De afwijking voor de eerste lijn van bovenstaande reeks (3082,27) is echter zóó groot, dat ik betwijfel, of dit wel de 1ste lijn van deze reeks is.

Het gedrag van deze Aluminium reeks is zeker eigenaardig, en een verder onderzoek is gewenscht.

Voor de wijze, waarop de constanten in de formule berekend werden en voor de spectra van Kalium, Rubidium en Caesium, van Magnesium, Calcium, Cadmium en van Helium en Zuurstof verwijs ik naar mijne binnenkort verschijnende dissertatie.

Sterrenkunde. — De Heer J. A. C. Oudemans doet eene mededeeling over: „*Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter* in 1908."

TWEEDE AFDEELING. — VERDUISTERINGEN.

Medegedeeld in de vergadering van 27 October 1906.

Om van de bedekkingen over te gaan tot de verduisteringen is slechts één stap.

Er is tusschen deze beide verschijnselen dit verschil, dat de bedekkingen, zooals boven, blz. 180, is medegedeeld, meer dan eens zijn waargenomen, terwijl wij van die eener verduistering van den eenen wachter door den anderen, slechts één, en dan geen volledig bericht kennen uit een bijzonderen brief van den heer Stanley Williams van 7 December 1906. Hij schreef ons namelijk „With „regard to the heliocentric conjunctions there does seem to be one „observation of the rare phenomenon of the eclipse of a satellite „in the shadow of another one on record. It occurred on the 14th „August 1901 and was observed by Mr. J. Comas at Valls in Spain „and by the writer at Hove. Mr. Comas' observation was published „in the French periodical L'Astronomie, 1891, p. 397 (read 398) 1), „The following is an account of my observation. No particulars of „this have hitherto been published.

„ „1891 Aug. 14. $6^1/_2$ inch reflector, power 225. Definition good, „ „but interruptions from cloud. Satellite I. transitted on the S. Equa- „ „torial belt, (N. component). *Immediately* on its entering the disc „ „it became lost to view. At 11^h49^m a minute dark spot was seen „ „about in the position which the satellite should have then occupied. „ „The shadows of satellites I. and II. were confounded together at „ „this time, there seeming to be one very large, slightly oval, black „ „spot. At 11^h59^m the two shadows were seen neatly separated, „ „thus, ●• . The preceeding shadow must be that of II., the follo- „ „wing and *much smaller* one that of I.. At 12^h10^m satellite I. was „ „certainly visible as a dark spot, much smaller than the shadow „ „of either satellite. It had moved with respect to the shoulder of „ „the Red Spot Hollow, so that there could be no doubt of its „ „identity. It is on the north band of the north (south) equatorial „ „belt 2). Satellite I. [This should evidently be II.] shines brightly „ „on the disc near the limb. Definition good, but much thin cloud „ „about." "

„The foregoing is an almost literal transcript from my observation

„Book. I take it that when satellite I. entered on the disc of Jupiter, „it was already partly eclipsed by the shadow of II., so that it „became lost to view immediately, instead of shining, as usual, for „some time as a brillant disc. Also that the minute dark spot seen „at 11^h49^m was produced by the portion of the shadow of II., then „projected on I. Also that the small size of the following shadow „spot at 11^h59^m was due to a part only of the shadow of II. being „projected on the disc of Jupiter, other part of this shadow having „been intercepted by satellite I. 3)

— — — „But combining Mr. COMAS' observation with my own, „there can be no doubt but that satellite I. was actually partially „eclipsed by the shadow of II. on the night of August 14, 1891. „So far as I am aware, this is the only indubitable instance of one „satellite being eclipsed by the shadow of another.”.....

„P.S. The above times are Greenwich mean times. The Nautical „Almanac time for the transit ingress of satellite I. is 11^h33^m.” 4).

Alvorens tot de berekening der tijdstippen van dergelijke heliocentrische conjuncties over te gaan, hebben wij onderzocht in hoeverre in het algemeen verduisteringen van den eenen wachter door de schaduw van den anderen wachter mogelijk zijn. Dat zij kunnen plaats hebben, bewijzen ons de schaduwen der wachters op Jupiter zelven. De vraag was echter, 1°. of bij *alle* heliocentrische conjuncties der wachters de schaduw van den voorsten den achtersten bereikt en 2°. of er ook somstijds totale verduisteringen kunnen plaats hebben.

Om dit na te gaan, stelden wij ons voor, dat de loopbanen alle in één vlak liggen, dat verlengd zijnde, door het middelpunt der zon gaat, en dat eene lijn, die van de zon uitgaat, in het vlak der loopbanen, Jupiter voorbijgaat, op een afstand gelijk aan zijn' straal, dus op een afstand van het middelpunt gelijk aan zijne middellijn. (Zie Plaat I.) Deze lijn snijdt de vier loopbanen der wachters, ieder in twee punten, die wij, van de zon afgaande *g*, *e*, *c*, *a*, *b*, *d*, *f* en *h* zullen noemen. Duidelijkheidshalve hebben wij de figuur hierachter bijgevoegd, (zie Plaat II).

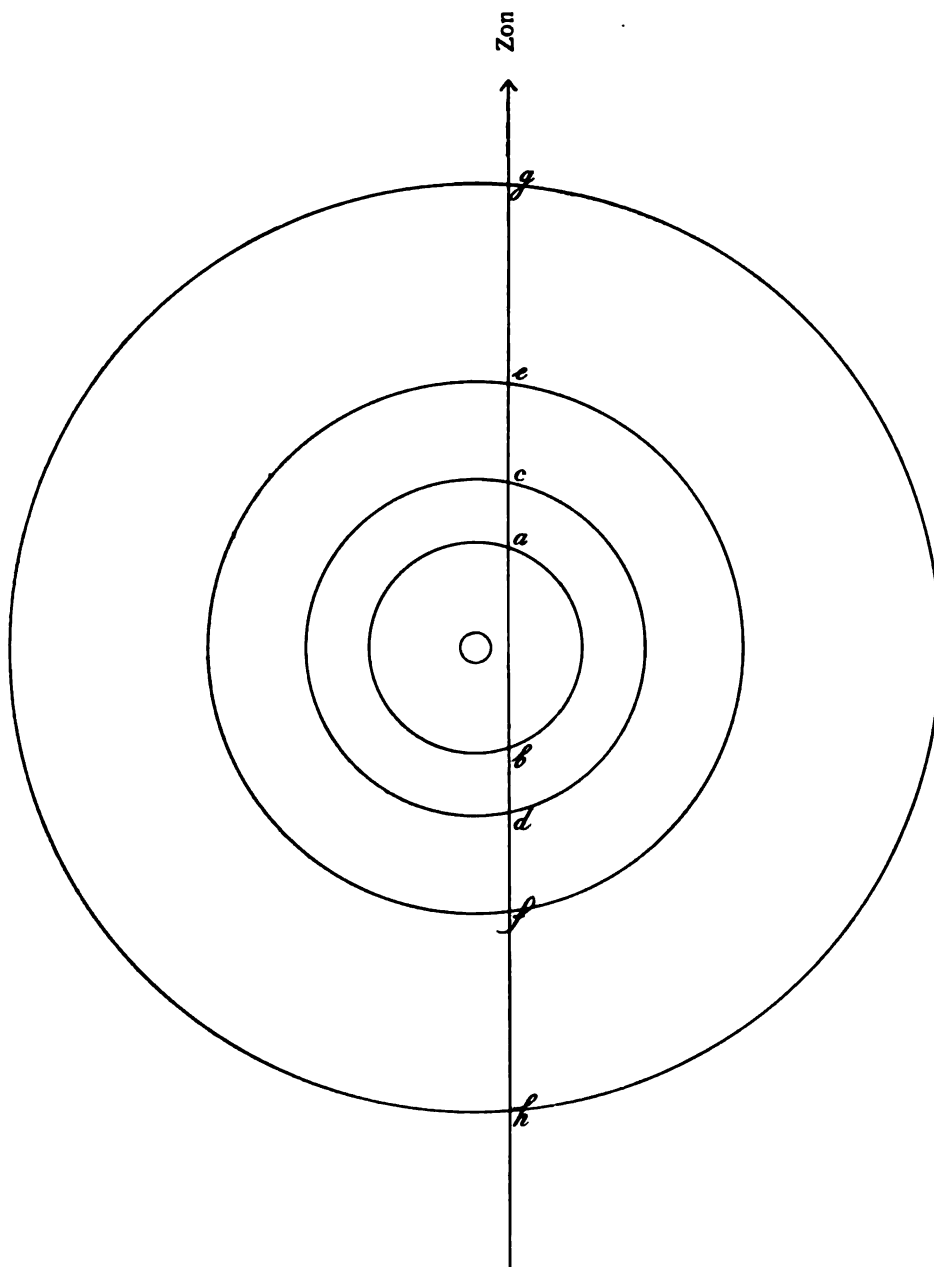
Stellen wij nu dat I zich òf in *a*, òf *b* bevindt, dan zullen in beide gevallen de andere wachters zich in zijn schaduwkegel bevinden, als zij komen: II_v in *d*, III_v in *f* en IV_v in *h*.

De snijpunten met de loopbaan van II zijn *c* en *d*. Bevindt zich II_n in *c*, dan kan ook I_n in *a* verduisterd worden, maar evenzoo I_v in *b*, III_v in *f* en IV_v in *h*.

Maar als II_v zich in *d* bevindt, dan kunnen alleen III_v en IV_v verduisterd worden, en wel III_v in *f* en IV_v in *g*.

De snijpunten met de loopbaan van III zijn *e* en *f*. Bevindt hij

J. A C. OUDEMANS. „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908." Tweede Afdeeling: Verduisteringen.



Schaal $\frac{1}{30\,168\,000\,000}$. Naar deze schaal heeft de zon eene middellijn van 0.24 m. en bevindt zij zich op 25,783 m. afstand

zich in *e*, dan kunnen II_n in *c*, I_n in *a*, I_v in *b*, II_v in *d* en IV_v in *h* verduisterd worden. Is hij daarentegen in *f*, dan kan dit alleen met IV_v in *h* het geval zijn.

IV kan natuurlijk alleen in *g* een anderen wachter verduisteren, en wel ieder der drie anderen in de beide reeds beschouwde snijpunten zijner loopbaan.

Elke wachter zou dus zes verschillende verduisteringen kunnen opleveren, maar berekent men de stralen der kernschaduwen voor de plaatsen der andere wachters, dan verkrijgt men in sommige gevallen eene negatieve uitkomst, een teeken dat de top van den kegel der kernschaduw den anderen wachter niet bereikt.

Nemen wij voor de stralen der wachters de in de eerste afdeeling dezer mededeeling genoemde waarden aan, doch verminderd met het bedrag der irradiatie, 5) dan blijkt, dat in slechts twee gevallen eene totale verduistering kan plaats hebben. III_n kan namelijk II_n en I_n totaal verduisteren; I_v op weinig na II_v. Bereikt de schaduw den anderen wachter niet, dan zou een bewoner van dezen laatsten eene ringvormige zoneklips zien.

Dit heeft nl. plaats voor I_n ten opzichte van IV_v.
„ II_n „ „ „ III_v en IV_v,
„ III_n „ „ „ IV_v,
„ IV_n „ „ „ II_v en III_v.

In de overige 15 gevallen kan er eene gedeeltelijke verduistering plaats hebben.

Het spreekt wel van zelf, dat dit toch alleen gebeuren kan, als bij de heliocentrische conjunctie het verschil der heliocentrische breedten $(y'-y)$, kleiner is dan de som der stralen. Daar het mij echter, bij toetsing der door de heeren FAUTH en NIJLAND waargenomene bedekkingen, gebleken is, dat volgens de tafels van DAMOISEAU het verschil in breedte wel eens iets grooter gevonden werd dan die som, de door die tafels berekende breedten dus niet geheel te vertrouwen zijn, zoo zijn in de volgende tabel *alle* heliocentrische conjuncties tusschen 1 April en 20 Mei 1908 (beide ingesloten) opgenomen.

Wij willen nog even opmerken dat de plaat opzettelijk geteekend is, om een ongunstig geval voor te stellen, althans voor het geval dat de eclipseerende wachter „nabij" en de „geëklipseerde „veraf" staat. Naarmate de schijnbare afstand (elongatie) van Jupiter af gerekend, grooter is, wordt voor dit geval de kans op verduistering grooter.

De voorbereiding voor de berekening, nl. het teekenen van de boopbanen der wachters, is dezelfde als bij het berekenen der geocentrische conjunctie (zie hiervoor de eerste afdeeling), maar uit de

aan den Nautical Almanac ontleende tijden der *geocentrische* bovenste conjuncties der wachters moeten eerst, met behulp van hunne uurbewegingen en den hoek G, d. i. den hoek Aarde—Jupiter—Zon de tijden der *heliocentrische* bovenste conjuncties afgeleid worden. Dan moet verder, zoodra de jovicentrische middelbare lengten voor de vereffeningen en storingen verbeterd zijn, in plaats van S—G, d. i. de *geocentrische* lengte van Jupiter, afgetrokken worden S, d. i. de *heliocentrische*.

Van de argumenten behoeft 3 niet berekend te worden, daar dit argument alleen dient om in verbinding met 1, de jovicentrische breedte der aarde te berekenen, waarvan de kennis hier niet noodig is. De schemas's bevatten dus voor elken wachter één kolom minder.

Onze uitkomsten zijn vervat in de hierachter gevoegde tabel. Van 1 April tot 20 Mei vonden wij 81 heliocentrische conjuncties, en zoo als de voorlaatste kolom $y-y'$ aantoont, schijnt bij zeer vele eene eklips mogelijk.

(1) Zie hier het bericht van den heer José Comas:

Ombres de deux satellites de Jupiter et éclipse. — Dans la nuit du 14 août, j'ai observé un phénomène bien rare: la coïncidence partielle, sur Jupiter des ombres de ses deux premiers satellites, et par suite l'éclipse de Soleil pour le satellitie I produit par le satellite II.

A 11^h (temps de Barcelone) [1]) l'ombre du satellite II est entrée sur la planète. Près du bord, elle n'était pas noire, mais d'un gris rougeâtre. Comme l'image était fort agitée, j'ai cessé d'observer, mais je suis retourné à l'obsersation vers 11^h37^m pour oberver l'immersion du premier satellite, qui a eu lieu à 11^h42^m (grossissement 100 fois; lunette de 4 pouces). J'ai été surpris de voir disparaître Io [2]) à son entrée sur le disque, ne se détachant pas en blanc, quoique'il se projetât sur la bande foncée équatoriale australe.

A 11^h52^m, avec des images plus tranquilles et un grossissement de 160, je remarquai que l'ombre complètement noire que l'on voyait était allongée dans une direction un peu inclinée vers la droite, relativement à l'axe de Jupiter. La phase maxima de l'éclipse du satellite I était déjà passée de quelques minutes. A 11^h56^m je pris le petit dessin que j'ai l'honneur de vous adresser; les deux

---

1) Barcelona ligt 2°10' Oost van Greenwich, de m. tijd te Barcelona is dus 8^m40^s later dan die van Greenwich.

2) De Nautical Almanac vermeldt sedert eenige jaren de door Simon Marius voorgestelde namen voor de wachters van Jupiter: Io, Europa, Ganymedes en Callisto.

ombres se touchaient encore [1]). Aussitôt elles se séparèrent et, quoique je n'aie pas pu noter l'instant du dernier contact, je crois être assez près de la vérité, en disant qu'il s'est effectué vers 11^{h}58^m.

L'empiètement d'une ombre sur l'autre pourrait être de la troisième partie du diamètre. Dans cette supposition la distance minima des centres des deux ombres a dû avoir lieu vers 11^{h}47^m et le premier contact vers 11^{h}37^m. Le premier satellite pénétra dans le disque de la planète à 11^{h}42^m, comme j'ai dit plus haut, donc l'éclipse a commencé quand le satellite se projetait encore dans l'espace, cinq minutes avant l'immersion.

L'invisibilité de l'ombre d'Europe sur Io peut s'expliquer par la mauvaise qualité des images. Toutefois, la pénombre et l'ombre du II satellite ont été suffisantes pour diminuer notablement l'éclat du premier.

(2) De bedoeling hiervan is blijkbaar dat in een *omkeerenden* kijker de donkere vlek op den noordelijken band van den noordelijken gordel scheen te staan, maar dat het in werkelijkheid de zuidelijke band van den zuidelijken gordel was. Het is ook bekend, dat de zoogenaamde *roode vlek* zich aldaar bevindt.

(3) Dat de Schrijver hier niet spreekt van het zichtbaar zijn eener schaduw van II op I, kan mijns inziens door het bestaan der irradiatie en diffractie verklaard worden.

(4) Voor de heliocentrische conjunctie der twee wachters geven de tafels van Damoiseau, tweede afdeeling: 23^{u}45^m burgerlijke tijd te Parijs, = 11^{u}36^m Grw. De Nautical Almanac van 1891 geeft voor 14 Augustus de volgende tijden:

II	Shadow.	Ingress	10^{h}51^m	M.	T.	Grw.
I	„	„	10 59	„	„	„
I	Transit	„	11 33	„	„	„
II	„	„	11 58	„	„	„
I	Shadow.	Egress	13 18	„	„	„
II	„	„	13 45	„	„	„
I	Transit	„	13 51	„	„	„
II	„	„	14 49	„	„	„

[1]) Deze teekening vertoont het rechtsche (volgende) gedeelte, in een omkeerenden kijker, van de bekende roode vlek in de zuidelijke helft van Jupiter. Daaronder op eenigen afstand een donkeren band, en daarop twee zwarte schaduwen ieder van 4 mm. middellijn, die nog met elkander één geheel uitmaken; de gemeenschappelijke koorde is 2,5 mm. lang, de geheele lengte der beide schaduwen vereenigd, 7,2 mm.; de richting der lijn die de middelpunten vereenigt, maakt een hoek van 40° met de vertikaal. De *beweging* der beide schaduwen moet echter nagenoeg horizontaal geweest zijn.

Berekent men uit den 1^{en}, 2^{en}, 5^{en} en 6^{en} regel, wanneer de schaduwen moesten samenvallen, dan verkrijgt men 11^{u}31^m, gevende een verschil van 5^m met het zoo even medegedeelde cijfer; maar men moet in aanmerking nemen, dat beide wachters denzelfden kant opgingen, en hunne relatieve beweging, ook natuurlijk die hunner schaduwen, in vijf minnten zeer gering was.

De heer STANLEY WILLIAMS schijnt niet voor 11^{u}49^m M. tijd te Greenwich eene schaduw gezien te hebben, terwijl de heer COMAS reeds te 11^{u}43^{m}20^s M. te Greenwich eene langwerpige schaduw ontwaarde; verder zag de heer STANLEY WILLIAMS de schaduw van II grooter dan die van I, de heer COMAS schatte hare middellijnen gelijk. Zonder twijfel ligt het gelijk hier aan de zijde van den Engelschen waarnemer.

(5) In het jaar 1901 heeft SEE met den 28 inch kijker te Washington herhaaldelijk de middellijnen der wachters van Jupiter gemeten. Hij gebruikte daarbij een dradenmikrometer, maar legde er zich op toe, de systematische fouten, die dit werktuig oplevert, onschadelijk te maken. (Zie Astron^e. Nachrichten, N°. 3764, 21 Jan, 1902. De mededeeling van SEE is gedateerd 19 Oct. 1901).

In de maanden Mei t/m Augustus van het jaar 1901 had hij die middellijnen steeds des nachts gemeten, en had daarbij zeer veel last van de golving der randen, ontstaande door de undulatie der lucht. Daarna heeft hij, in de maanden September en October van hetzelfde jaar, de metingen kort voor en kort na den zonsondergang herhaald, als wanneer kunstmatige verlichting onnoodig was, de wachters zich als rustige schijfjes voordeden, en bovendien een met koperchloride en pikrienzuur gevuld schermpje aan het veld en aan den wachter een groenachtig gele kleur mededeelde. De middellijnen werden nu alle kleiner bevonden dan te voren en het verschil wordt aan irradiatie toegeschreven. Ziehier zijne uitkomsten, herleid op den middelbaren afstand van de zon tot Jupiter (5,2028).

Wachter	Bij nacht	Bij dag	Verschil, aan irradiatie toegeschreven
I	1",077 ± 0",018	0",834 ± 0",006	0",243 ± 0",019
II	0 ,976 ± 0 ,043	0 ,747 ± 0 ,007	0 ,229 ± 0 ,0435
III	1 ,604 ± 0 ,038	1 ,265 ± 0 ,009	0 ,339 ± 0 ,039
IV	1 ,441 ± 0 ,018	1 ,169 ± 0 ,006	0 ,372 ± 0 ,019

Merkwaardig is het, dat de helderste wachter, III, ook de sterkste irradiatie vertoont. Beschouwt men dit verschil echter als onzeker, en vereenigt men de verschillende voor de irradiatie verkregene uitkomsten met in acht neming der uit de waarschijnlijke fouten afgeleide gewichten, dan verkrijgt men

$$\text{Irradiatie} = 0'',264 \pm 0'',012.$$

Dit betreft de geheele middellijn, zoodat men aan elke zijde de helft, d. i. 0'',132 irradiatie verkrijgt, welk getal echter alleen betrekking heeft op den kijker te Washington, bij welken, wegens de groote opening van zijn objectief, de diffractie uiterst gering moet zijn.

Ik kan niet nalaten, hier nog op te merken, hoe groot het verschil is tusschen de door denzelfden waarnemer in 1900 en 1901 gevondene middellijnen.

	1900	1901	1901—1900
I	0''672 ± 0''098	0'',834 ± 0'',006	+ 0''162
II	0,624 ± 0,078	0 ,747 ± 0 ,007	+ 0,121
III	1,361 ± 0,103	1 ,265 ± 0 ,009	— 0,096
IV	1,277 ± 0,083	1 ,169 ± 0 ,006	— 0,108

Stone, te Oxford, verhaalde mij eens dat Airy, in een gesprek over de bepalingen van declinaties met den meridiaancirkel, hem zeide: „I assure you, Stone, a second is a very small thing".

Men komt, als men de opgenoemde verschillen tusschen de resultaten van twee reeksen waarnemingen, beschouwt, die door denzelfden waarnemer in twee op elkander volgende jaren verkregen zijn, tot het besluit dat bij mikrometerwaarnemingen nog altijd geldt: „a tenth of a second is an exceedingly small thing".

Aanhangsel. *In hoeverre zijn de tafels van* Damoiseau *nog vertrouwbaar?*

Wij hebben reeds in de 1e afdeeling, blz. 194 en 195, vermeld, waarom wij ons gerechtigd achtten, voor deze vooruitberekeningen de tafels van Damoiseau te gebruiken. Wij willen hier nog aan toevoegen, dat wij ook nog onderzocht hebben, welke verschillen in eenige der laatste jaren de waarnemingen der eklipsen van de wachters, op verschillende sterrewachten verricht, met die tafels, of juister met de in den Nautrial Almanac opgegeven oogenblikken vertoond hebben. De heer Kress, amanuensis der sterrewacht te Utrecht, is ons daarin behulpzaam geweest, door met zorgvuldigheid

eenige deelen van de *Astronomische Nachrichten* en van de *Monthly Notices* door te zoeken, de waargenomene tijden van „verdwijnen en wederverschijnen” voor elken wachter afzonderlijk bij een te voegen, op den meridiaan van Greenwich te herleiden, en met de opgaven van den Nautical Almanac te vergelijken. Om het onderzoek te vereenvoudigen, lette hij op ons verzoek alleen op de waarneming van het laatste licht bij het verdwijnen, en op die van het eerste licht bij het wederverschijnen. [1]) Ons plan was, dit onderzoek van 1894 tot 1905 of 6 uit te voeren, maar toen een viertal jaren gereed waren, en wij kennis namen van de resultaten, kwam het ons voor, dat wij voldoende ingelicht waren, en dat het algemeen resultaat was, dat de tafels nog nauwkeurig genoeg waren voor ons doel, dat niet anders was dan de sterrekundigen voor te bereiden voor het waarnemen der onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters.

Nu het werk echter eenmaal gereed is, dat lang geen aanspraak maakt op eene trouwens niet nagestreefde volledigheid, (de in Frankrijk, Amerika, enz. verschenen tijdschriften waren niet onderzocht), willen wij toch de resultaten niet achterhouden.

De volgende sterrewachten hebben voor ons onderzoek bijgedragen:

	Opening van de objectieven der kijkers, in mm.
Greenwich	102, 170, 254, 714.
Utrecht	260
Uccle	150
Jena (WINKLER)	162
Halifax (GLEDHILL)	237
Pola	162
Christiania	74, 190
Kasan	66, 81, 84, 96, 244
Göttingen	161
Windsor (Tebbutt) bij Adelaïde	203
Lyon (ééne enkele waarneming)	2

[1]) DELAMBRE laat zich in de inleiding tot zijne tafels wel niet ondubbelzinnig er over uit, *welk* oogenblik zijne tafels naar zijne bedoeling moeten aangeven, maar uit enkele zinsneden is op te maken, dat ook hij *de hier genoemde* oogenblikken bedoeld heeft. Zoo zegt hij op blz. LIII, van onderen: *„Les demi-dureées ont été un peu diminuées, pour les rapprocher des observations qu'on a faites depuis la découverte des lunettes achromatiques”*.

En dat dit ook de opvatting van LAPLACE geweest is, blijkt uit Ch. VIII van het 8e boek der Mécanique Céleste.

Te Greenwich, Christiania en Kasan werden de eklipsen dikwijls door meer dan één waarnemer, door kijkers van verschillende openingen geobserveerd. Dan werd door ons alleen het oogenblik in de berekening opgenomen, waarop het verschijnsel in den kijker met de grootste opening gezien was. In den regel kon de waarnemer in dezen kijker den wachter bij de „verdwijning" langer volgen, en bij de „wederverschijning" eerder terugzien; hoewel op dien regel toch nu en dan ook uitzonderingen voorkwamen.

In de correcties van de opgaven in den Nautrial Almanac, voor de eklipsen in hetzelfde oppositie-tijdvak van Jupiter gevonden, was geen enkele maal een bepaalde gang te zien, zij slingerden telkens zoo om hetzelfde midden heen, dat er geen bezwaar in gezien kon worden er het arithmetisch midden uit te nemen, eene handelwijze die ook nog volkomen juist zou zijn, indien er een *regelmatig* toenemende of afnemende gang in was. Op de verschillende openingen van de objectieven der kijkers werd verder niet gelet; als die openingen een zeker bedrag, b.v. 150 mm^2 overtreffen, dan geven grootere openingen, theoretisch, zoowel als praktisch, slechts zeer kleine verschillen.

Ziehier nu de uitkomsten waartoe wij gekomen zijn:

Correctie der in den Nautical Almanac aangegeven tijden der eklipsen van de wachters van Jupiter.

Oppositie.	Gemiddelde Corr. N.A. Disapp.	Aantal.	Middelb. fout.	Gemiddelde Corr. N.A. Reapp.	Aantal.	Middelb. fout.	$\frac{1}{2}(D+R)$	*mf.*
				I.				
1894/95	+ 37^s	3	±14	− 18^s	25	+ 4^s	+ $9^s.5$	± 7^s
1895/96	+ 30	9	8	0	32	4	+ 15	4^5
1897	− 19^5	2	18	− 5	12	6	− 12	9^5
1898	+ 11	15	6	+ 7	13	6	+ 6	4
				II.				
1894	− 78	2	±32	0	7	±11^s	− 39^s	±17^s
1894/95	+ 52	4	22^5	− 42	15	7^5	+ 5	12
1895/96	+ 73	6	18	− 4	19	6^5	+ 34	10
1897	− 72	3	26	+ 11	10	9	− 30	14
1898	− 36	5	20	− 15	9	9^5	− 26	11

III.

1894	+151s	3	±22s	—242s	3	±38s	— 45s	±25s
1895	+101	4	19	—127	4	33	— 13	11s
1895/96	+ 87	9	13	— 50	9	22	+ 19	11s
1897	+181	4	19	+ 37	9	22	+109	14s
1898	+266	4	19	+ 10	1	66	+138	34
1899	+361	3	22	—126	4	33	+118	20

IV.

1895	+ 21m45s	3	—	— 17m 9s	2		+138s	
. . .	. . . .	. .	. .	. . . .	. .	. .	. .	. . .
1895/96	+ 3 49	10	±25	— 3 17	7	±22s	+ 16	±17s
1897	— 0 2	2	±57	+ 1 16	1	60	+ 37	—41

Middelbare fouten, door elkander, van ééne enkele waarneming.

	Disappearance	Reappearance	Gemiddeld	Delambre *) Introd. p. LIV
I	± 25s	± 20s	± 22s5	17s5
II	45	29	37	
III	37	66	51,5	{88,5 72,5 (met verwerping der waarnemingen, die meer dan 3 minuten afweken).
IV	80	60	70	

Het blijkt uit de hier medegedeelde cijfers wel, dat de klachten over de toegenomene onnauwkeurigheid der tafels van Damoiseau, althans voor de beide eerste wachters, niet van overdrijving zijn vrij te pleiten.

Lettende op de middelbare fouten, in de laatste kolom vermeld, zou de waarschijnlijkste correctie voor de epoche der jaren 1894—98

voor I bedragen + 8s,0 met eene m. fout = ± 2s,6

Evenzoo voor II — 3 ,8 „ „ „ „ = ± 5 ,4,

beide correcties, waarvoor moeielijk is in te staan.

Met III schijnt het anders gesteld te zijn. De negatieve correctie bij de wederverschijningen kan, evenals de positieve bij de verdwijningen, wel is waar aan het gebruik van sterkere kijkers toe te schrijven zijn; in de cijfers der voorlaatste kolom schijnt toch een zekere gang te bestaan, waarom nader onderzoek gewenscht is.

*) Delambre vermeldt de *gemiddelde* verschillen; wij hebben die met 1¼ vermenigvuldigd, om de *middelbare* fouten te verkrijgen.

Wat IV aangaat, het jaar 1895 gaf groote correcties, maar nadat gedurende een paar jaren van dezen wachter geene eklipsen hadden plaats gevonden, doordien de wachter bij de oppositie den schaduwkegel van Jupiter ten noorden voorbijging, begon in dit jaar het tijdvak der eklipsen op nieuw; in zulk een geval beschrijft de wachter, die zich dan lineair hoog boven het baanvlak van Jupiter verheft, slechts eene korte koorde in den schaduwkegel; eene kleine fout in zijne breedte veroorzaakt dan eene groote fout in den duur der eklips; duidelijk sprekend zijn daaromtrent de waarnemingen van den heer WINKLER te Jena en van den waarnemer op de Sterrewacht te Uccle bij Brussel, op 8 Maart 1895. Zij vonden namelijk

de correctie	Jena.	Brussel.	Gemiddeld.
van de verdwijning	$+19^m 48^s$	$+21^m 58^s$	$+20^m 53^s$
van de wereldverschijning	$-19\ 36$	$-18\ 33$	$-19\ 4,5$

waaruit duidelijk blijkt dat het niet zoo zeer de middelbare lengte van deze wachters was, die eene correctie behoefde. Eene verklaring dezer groote verschillen kan òf daarin liggen dat lengte òf knoop van de loopbaan van IV of de aangenomene afplatting van Jupiter eene correctie behoefden, òf dat bij dergelijke verduisteringen eene *zeer langzame* lichtvermindering plaats grijpt.

Wat overigens deze eklips betreft, zij zou, volgens den Nautical Almanac van 1895, de vierde zijn na het lange tijdperk, dat er geene eklips van dezen wachter geweest was. Zie hier de opgaven op blz. 450, 452, 454:

17 Jan^y.	D.	$1^h 36^m 16^s$	M. T. Gr., R.	$2^h 8^m 17^s$, dus duur	$32^m 1^s$
2 Feb^y.	„	19 26 12	„ „ „ „	20 36 58, „ „	1^h 10 46
19 „	„	13 24 6	„ „ „ „	14 59 3, „ „	1 34 57
8 March	„	7 24 14	„ „ „ „	9 18 28, „ „	1 54 14

maar naar de waarneming van SCOTT-HANSEN, die in de laatste Noordpoolreis onder NANSEN de sterrekundige waarnemingen bezorgde, is de wachter IV den 17^{en} Januari in het geheel niet bedekt geworden [1]).

Ook den 2$_{en}$ Februari 1895 moet IV niet bedekt zijn geweest; (ik herinner mij niet meer, waar ik deze negatieve waarneming gevonden heb;) den 19 Februari echter vond een waarnemer te Greenwich, met het Sheepshanks-equatoriaal, welks objectief 120 mm.

---

1) The Norwegian North Polar Expedition 1894—1896. Scientific Results, edited by FRIDTJOF NANSEN. VI. Astronomical Observations, arranged and reduced under the supervision of H. GEELMUYDEN, blz. XXIV.

opening heeft, bij de verdwijning van IV eene correctie van $+ 23^m 30^s$, hetgeen vrij wel uitkomt met de bovenvermelde, te Uccle en te Jena den 8en Maart verkregene uitkomsten.

De duur der verduistering was, indien wij het gemiddelde der waarnemingen te Brussel en te Jena aannemen, op dien dag $1^u 44^m 14^s - 39^m 57^s,5 = 1^u 14^m 16^s,5$, een getal, dat voor de verbetering der elementen van IV ook van dienst zou kunnen zijn.

Het bij deze gelegenheid gevonden verschil kan niet geweten worden aan eene te geringe afplatting, want de aangenomene afplatting, $\frac{1}{13,49}$, door Damoiseau aangenomen, is al sterker dan de door de meeste waarnemers door meting bepaalde; let men echter op de door den heer De Sitter verkregene resultaten, medegedeeld in de zitting dezer afdeeling van 31 Maart j.l., Dl. XIV, blz. 797, dan blijkt het dat de klimmende knoop van den 4en wachter eene vermeerdering van omtrent $+ 10^\circ$ in zijne lengte noodig heeft, terwijl de helling op het vaste vlak, $= 0^\circ,2504 = 15' 2''4$ gevonden wordt, nog geen volle minuut meer dan Damoiseau heeft.

De verdere verduisteringen van IV in 1895 en die van de twee volgende jaren gaven geene buitengewone afwijkingen. En daar in 1908 de eklipsen der wachters nagenoeg centraal zullen zijn, zooals uit de teekeningen in den Nautical Almanac te zien is, die de lijst dezer verschijnselen aldaar vergezellen, zoo is niet te vreezen, dat dergelijke groote verschillen zich in dat jaar bij IV zullen voordoen.

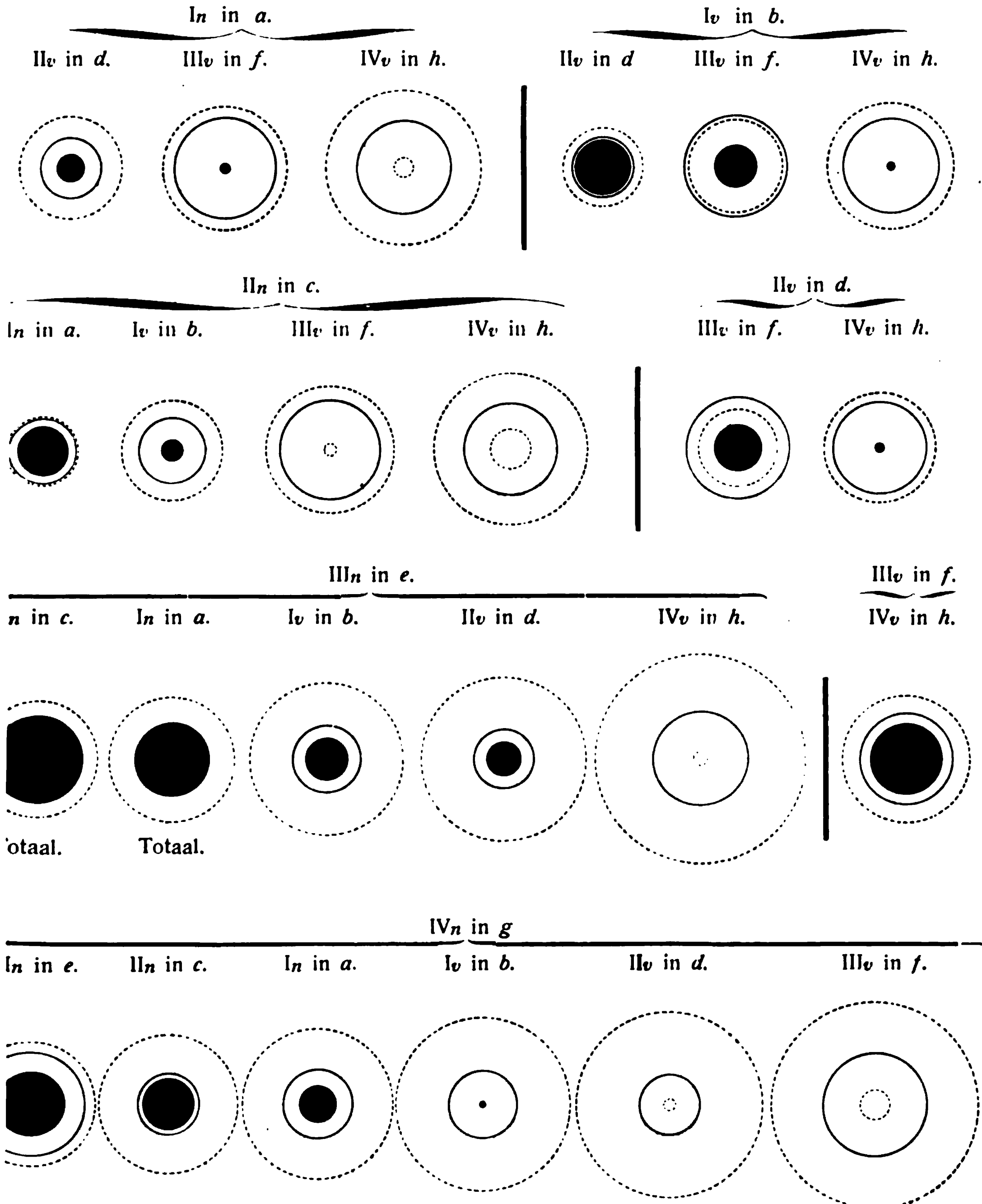
Ons resultaat is dus, dat voorloopig de Nautical Almanac, die met inachtneming van eenige als noodig erkende verbeteringen, naar de tafels van Damoiseau berekend is, — als men het geval van de eerste eklips van IV na een tijdvak van niet verduisterd worden uitzondert, — voor de voorbereiding tot de waarneming nog wel voldoende is,

Utrecht, 23 November 1906.

A. C. OUDEMANS. „Onderlinge bedekkingen en verduisteringen der wachters van Jupiter in 1908," Tweede Afdeeling: Verduisteringen.

B. De doorgetrokken cirkels geven de omtrekken der wachters aan, de gestippelde cirkels de bijschaduwen.

Schaal 1 : 314 250 000. 12mm = 1" heliocentrisch.



RESULTATEN.

Heliocentrische conjuncties der wachters onderling in April en Mei 1908.

N.B. A.A, = Ann Arbor; Fl. = Flagstaff; H.K. = Hong Kong; La Pl. = La Plata; P. = Perth; Tac. = Tacubaja; To = Tokio; We. = Wellington; Wi. = Windsor.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Geëklipseerde wachter	Eklipseerende wachter	$x=x'$	Geëklipseerde wachter y	Eklipseerende wachter y'	$y-y'$	Waar zichtbaar
1	1 April 4^u 8^m	I$_v$	II$_n$	+5^r,70	−0^{r}30	−0^{r}25^5	−0,04^5	Kas., Taschk, Madras, HK., Perth.
2	2 » 18 3	I$_v$	III$_n$	+3,21	−0,16	−0,20	+0,04	Lick, Fl., Tac.. AA., Harvard.
3	3 » 4 15	II$_v$	III$_n$	−2,49	+0,08	+0,10	−0,02	Kas.,Taschk.,Madr.,HK.,Perth,To.
4	3 » 9 51	II$_v$	I$_n$	+1,50	−0,10^5	−0,09	−0,01^5	Grw.,Pulk.,Kas.,Taschk.,La Pl.,Rio.
5	3 » 11 10	IV$_v$	III$_n$	−6,19^5	+0,40	+0,32	+0,08	Grw„ Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
6	3 » 16 26	IV$_v$	I$_n$	−4,03	+0,30	+0,19	+0,11	Lick, Fl., Tac„ AA., Harv., La Pl.
7	4 » 16 52	IV$_v$	II$_n$	+6,03	−0.20	−0,27	+0,07	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
8	4 » 17 21	I$_v$	II$_n$	+5,75	−0,31	−0,25	−0,06	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
9	5 » 19 56	III$_v$	II$_n$	−9,24	+0,54	+0,30	+0,24	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
10	6 » 20 12	III$_v$	I$_n$	+3,61	−0,18^5	−0,21	+0,02^5	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
11	6 » 22 58	II$_v$	I$_n$	+1,37	−0,10	−0,09	−0,01	Perth, Tokio, Wi., We.
12	8 » 6 31	I$_{o.e.}$	II$_n$	+5,82	−0,31	−0,25	−0,06	Bresl., Pulk., Kas., Taschk., Madras.
13	9 » 20 52	I$_v$	III$_n$	+3,85^5	−0,18	−0,24	+0,06	Wi., We., Lick, Fl.
14	10 » 7 28	II$_v$	III$_n$	−2,05^5	+0,06	+0,09^5	−0,03^5	Grw., Pulk., Kas., Taschk., Madras.
15	10 » 12 4	II$_v$	I$_n$	+1,24	−0,09	−0,08	−0,01	Grw., Pulk., Kas., Harv., La Pl.,Rio.
16	11 » } 11 » } 15 42 kleinste afstand	II	IV	II +7,87 / IV +7,96	−0,36	−0,48	+0,12	Lick,Fl.,Tac.,AA.,Harv.,La Pl.,Rio.
17	11 » 19 43	I$_{o.e.}$	II$_n$	+5,88	−0,31^5	−0,26	−0,05^5	Wi., We., Lick, Fl., Tac., AA.
18	11 » 20 24	I$_{o.e.}$	IV$_n$	+5,99	−0,32	−0,38	+0,06	Wi., We., Lick, Fl,
19	12 » 23 33	III$_v$	II$_{w.e.}$	−9,41	+0,54	+0,45	+0,09	Perth, HK., Tokio, Wi., We.
20	13 » 3 57	III$_v$	IV$_n$	−7,35	+0.42	+0,27	+0,15	Kasan, Taschk., Madr., HK.
21	13 » 23 22	III$_v$	I$_n$	+2,64	−0,16	−0,19	+0,03	HK., Perth, Tokio, Wi., We.
22	14 » 1 11	II$_v$	I$_n$	+1,11	−0,09	−0,06	−0,03	HK., Perth, Tokio, Wi.
23	15 » 8 57	I$_{o.e.}$	II$_n$	+5,93	−0,32	−0,26	−0,06	Grw., Pulk., Kas., Taschk., Rio.
24	16 » 23 44	I$_v$	III$_n$	+4,45^5	−0,23	−0.26	+0,03	HK., Pe., To., Wi., We.
25	17 » 10 41	II$_v$	III$_n$	−1,61	+0,03	+0,08	−0,05	Grw., Pulk., Kasan., La Pl., Rio.
26	17 » 14 17	II$_v$	I$_n$	+0,98	−0,09	−0,06	−0,03	Grw.,Fl.,Tac.,AA.,Harv.,La Pl.,Rio.
27	18 » 22 11	I$_{o.e.}$	II$_n$	+5,97	−0,32	−0,26	−0,06	Perth, To., Wi., We.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij v = veraf Geëklipseerde wachter	n = nabij v = veraf Eklipseerende wachter	$x = x'$	Geëklipseerde wachter y	Eklipseerende wachter y'	$y - y'$	Waar zichtbaar
28	19 April 5u15m	IV$_v$	III$_{w.e.}$	— 15r28	+ 0r80	+ 0r85	— 0r05	Karan, Taschk., Madras.
29	19 » 22 57	IV$_v$	II$_n$	— 8,69	+ 0,48	+ 0,43	+ 0,05	HK., Perth, Tokio, Wi., We.
30	20 » 3 14	III$_v$	II$_n$ w.e.	— 9,54	+ 0,55	+ 0,45	+ 0,10	Taschk., Madras, HK., Perth, To.
31	21 » 1 45	III$_v$	I$_n$	+ 2,27	— 0,12	— 0,13	+ 0,01	Madras, HK., P., Tokio.
32	21 » 1 46	IV$_v$	I$_n$	+ 2,26	— 0,05	— 0,12	+ 0,07	Madras, HK., P., Tokio.
33	21 » 1 52	IV$_v$	III$_v$	+ 2,33	— 0,05	— 0,12	+ 0,07	Madras, HK., P., Tokio.
34	21 » 3 23	II$_v$	I$_n$	+ 0,845	—0,088	— 0,044	— 0,044	Taschk., Madr., HK., P., Tokio.
	12 19	IV$_v$	II$_v$	+ 6,62	— 0,39	- 0,44	+ 0,05	Grw., Pulk., Harv., La Pl., Rio.
35	22 » 15 13	id. gr.	afst.	8,01" en 7.84	— 0.32	— 0,40	+ 0,08	Lick, Fl., Tac., A.A., Harv., La Pl.
	17 56	»	»	+ 8,88	— 0,38	— 0,44	+ 0,06	We., Lick., Fl., Tac., A.A., Harv.
36	22 » 9 41	IV$_v$	III$_{(o.e.)}$	+ 14,84	— 0,66	— 0,83	+ 0,17	Grw., Pulk., Kasan., La Pl., Rio.
37	22 » 11 27	I$_{(o.e.)}$	II$_n$	+ 6,01	— 0,32	— 0,26	— 0,06	Grw., Pulk., (Kasan), La Pl., Rio.
38	24 » 2 41	I$_v$	III$_n$	+ 5,02	— 0,255	— 0,28	+ 0,025	Taschk., Madr., HK., P., To.
39	26 » 0 41	I$_{o.e.}$	II$_n$	+ 6,03	— 0,33	— 0,25	— 0,08	HK., P.. To., Wi.
40	27 » 7 5	III$_v$	II$_v$	— 9,62	+ 0,54	+ 0,45	+ 0,09	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk
41	28 » 4 28^5	I$_v$	III$_n$	+ 1,57	— 0,08	— 0,09	+ 0,01	Kasan, Tuschk., Madr., HK.
42	28 » 5 36	II$_v$	I$_n$	+ 0,58	— 0,03	— 0,065	+ 0,035	Kasan, Taschk., Madras.
43	28 » 13 29	IV$_v$	III$_n$	+ 6,41	— 0,36	— 0,36	0,00	Grw., Tac.. AA., Harv., La Pl., Rio.
43*	28 » 16 18	II	III	II + 7,31 III + 7,80	— 0,38	— 0,49	+ 0,06	

$x - x'$ wordt langzamerhand absoluut kleiner, en bereikt zijn minimum 0,49 op den aangegeven tijd, wordt daarna weer grooter. Er heeft dus geene eklips plaats.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	Geëklipseerde wachter	Eklipseerende wachter	$x = x'$	y	y'	$y - y'$	Waar zichtbaar
44	29 » 3 45	I$_v$	IV$_n$	+ 0,27	— 0,02	— 0,08	+ 0,08	Taschk., Madr., HK.
45	29 » 13 57	I$_{o.e.}$	II$_n$	+ 6,05	— 0 33	— 0,26	— 0,07	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
46	1 Mei 17 5	II$_v$	III$_n$	— 0,74	— 0,01	— 0 62	+ 0,61	Lick, Fl , Tac., AA., Harv., La Pl.
47	1 » 18 43	II$_v$	I$_n$	+ 0,44	— 0,07	— 0,02	— 0,05	Lick, Fl., Tac., AA.
48	3 » 3 16	I$_{oe}$	II$_n$	+ 6,06	— 0,32^5	— 0,24	— 0,08^5	Taschk., Madr., HK., P., Tokio.
49	4 » 11 7	III$_v$	II$_{w.e.}$	— 9,61	+ 0,54	+ 0,45	+ 0,09	Grw., Pulkowa.
50	5 » 7 48	II$_v$	I$_n$	+ 0,31	— 0,07	— 0,02	— 0,05	Grw., Pulk., Kasan, Taschk.
51	5 » 8 17	III$_v$	I$_n$	— 0,10	— 0,09	— 0,01	— 0,08	Grw., Pulk., Kasan, (Taschk.).
	5 » 14 2	III$_v$	II$_v$	+ 4,63	— 0,26	— 0,26	0,00	Tac., A.A., Harv., La Pl., Rio.
52	5 » 17 57	grootste	afstand	+ 6,64''' + 6,85''	— 0 38	— 0,36	+ 0,02	We., Lick, Fl., Tac., AA
	5 » 21 39	III$_v$	II$_v$	+ 8,43	— 0,42	— 0,49	+ 0,07	To , Wi. We Lick.

No.	Middelbare tijd te Greenwich	n = nabij, v = veraf: Geëklipseerde wachter	n = nabij, v = veraf: Eklipseerende wachter	$x = x'$	Geëklipseerde wachter y	Eklipseerende wachter y'	$y - y'$	Waar zichtbaar
53	6 » 16u38m	I$_{o.z.}$	II$_n$	+ 6r03	— 0r215	— 0r24	+ 0r02^5	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
54	7 » 6 27	IV$_n$	I$_n$	— 3,27	+ 0,20	+ 0,18	+ 0,02	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
55	7 Mei 6 37 5	IV$_v$	II$_n$	— 3,18	+ 0,19	+ 0,20	— 0,01	Bresl. Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
56	8 » 7 4	IV$_v$	III$_n$	+ 6,90	— 0,38	— 0,29	— 0,09	Bresl., Pulk., Kasan, Taschk., Madr.
57	8 » 20 54	II$_v$	I$_n$	+ 0,18	— 0,06	— 0,00	— 0,06	Wi., Wellington.
58	8 » 23 25	I$_n$	III$_n$	— 2,04	+ 0,12	+ 0,13	— 0,01	Perth, Tokio, Windsor.
59	9 » 5 29	I$_{w.z.}$	III$_n$	— 5,36	+ 0,32	+ 0,34	— 0,02	Kasan, Taschk., Madras.
60	10 » 6 0	I$_n$ (o.z.)	II$_n$	+ 5,99	— 0 32	— 0,38	+ 0,06	Kasan, Taschk., Madras.
61	10 » 16 41	I$_n$	II$_n$	— 0,97	+ 0,05	+ 0,10	— 0,05	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
62	11 » 0 13	I$_n$	II$_n$	— 5,80	+ 0,32	+ 0.32	0,00	HK., P., Tokio.
63	11 » 15 26	III$_v$	II$_{w.z.}$	— 9,46	+ 0,25	+ 0,43	— 0,18	Lick., Fl., Tac., AA., Harvard.
64	12 » 9 54	III$_v$	I$_n$	+ 0,14	— 0,03	+ 0,01	— 0,04	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
65	12 » 10 0	II$_v$	I$_n$	+ 0,04	— 0,38	+ 0,12	— 0,50	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio.
66	12 » 10 44	III$_v$	II$_v$	+ 0,58	— 0,10	— 0,13	+ 0,03	Grw., Pulk., La Pl., Rio.
67	13 » 3 38	III$_v$	II$_v$	+ 9,32	— 0,55	— 0,45	— 0,10	Taschk., Madr., HK.
68	13 » 19 31	I$_n$	II$_n$	+ 5,89	— 0,33	— 0,25	— 0,08	We., Lick., Fl.
69	14 » 4 29	I$_n$	II$_n$	+ 0,10	— 0,05	+ 0,02	— 0,07	Taschk., Madras.
70	14 » 8 57	III$_n$ (o.z.)	IV$_n$	+ 15 17	— 0,87	— 0,75	— 0 12	Grw., Pulk., Rio.
71	14 » 13 46	I(w.z.)	II$_n$	— 5,93	+ 0,32	+ 0,33	— 0 01	Tac., AA., Harv., La Pl., Rio.
72	15 » 9 48	I$_v$	IV$_n$	+ 5 59	— 0,32	— 0,29	— 0,03	Grw., Pulk., Kasan, La Pl., Rio
73	15 » 22 59	II$_v$	IV$_v$	— 0 18	— 0,06	— 0,02	— 0,04	Perth, To., Wi.
74	15 » 23 7	II$_v$	I$_n$	— 0,09	— 0,06	+ 0,02	— 0,08	Perth, To., Wi.
75	16 » 11 59	I$_v$	IV$_n$	— 5,69	+ 0,30	+ 0,24	— 0,54	Grw., La Pl., Rio.
76	17 » 9 4	I$_n$	II$_n$	+ 5,75	— 0,31	— 0 23	— 0,08	Grw., Pulk., Kasan, La Pl, Rio.
77	17 » 11 22	III$_n$ (w.z.)	IV$_n$	— 14,82	+ 0,80	+ 0,70	+ 0,10	Grw., Pulk., La Pl., Rio.
78	17 » 16 9	I$_n$	II$_n$	+ 1,22	— 0,08^5	— 0,02	— 0,06^5	Lick, Fl., Tac., AA., Harvard.
79	18 » 3 12	I(w.z.)	II$_n$	— 6,00	+ 0,32	+ 0,32	0,00	Taschk., Madras, HK.
80	18 » 20 36	III$_v$	II$_v$	— 8,935	+ 0,51	+ 0,41	+ 0,10	Wi., Wellington.
81	20 » 8 8	III$_v$	II$_v$	+ 9,57	— 0,56	— 0,45	— 0,11	Grw., Pulk., Kasan.

Natuurkunde. — De Heer KAMERLINGH ONNES biedt aan Mededeeling n°. 96 uit het Natuurkundig Laboratorium te Leiden. *„Bijdragen tot de kennis van het ψ-vlak van* VAN DER WAALS XI. *Een gas, dat in eene vloeistof zinkt.*

Heeft men een ideaal gas en een onsamendrukbare vloeistof zonder dampspanning. waarin het gas niet oplost, zoo zal, onder de werking der zwaartekracht, bij genoegzaam lagen druk het gas zich boven de vloeistof verzamelen, bij hoog genoeg opgedreven druk daarentegen het samengeperste gas in de vloeistof zinken.

Een tot dit denkbeeldige geval naderend verschijnsel heb ik waargenomen bij eene proef, die ruw weg hierop neer kwam, dat helium gas boven vloeibare waterstof sterker en sterker werd samengeperst totdat het in de vloeibare waterstof zonk. Ruw weg, want een zoo eenvoudig geval als vooropgesteld werd laat zich niet verwezenlijken. Iedere proef, waarbij men een gas boven eene vloeistof samendrukt, wordt in werkelijkheid een toepassing van de theorie der binaire mengsels van VAN DER WAALS. Men zal bij zulk een proef de samendrukbaarheid der vloeistofphase en de wederzijdsche oplosbaarheid van gas en vloeistof niet mogen verwaarloozen, daar men gewoonlijk den druk zelfs vrij hoog zal moeten opvoeren voor de dichtheid der gasphase vergelijkbaar wordt met die der vloeistofphase.

Past men de theorie van VAN DER WAALS op proefnemingen van de bedoelde soort toe, dan ligt de vraag voor de hand of niet in de nabijheid der plooipuntsverschijnselen, waar gas en vloeistofphase zoozeer tot elkaar naderen, dat zij van den gewonen gas- en vloeistoftoestand nog slechts den naam hebben overgehouden, allicht de phase, die de gasphase genoemd moet worden, door een hooger gehalte aan de stof met grooter moleculair gewicht, specifiek zwaarder kan worden dan de phase, die de vloeistofphase genoemd moet worden [1]). Bij nader onderzoek blijkt het echter aan betrekkingen tusschen de physische eigenschappen en de samenstelling (dus ook het moleculair gewicht) der stoffen te wijten, dat het drijven van een vloeistofphase op een gasphase ook in dit gunstig gebied niet is waargenomen.

Des te meer trof mij eene onregelmatigheid, die zich bij eene bewerking met helium en waterstof in een gesloten metalen vat voordeed. Ik meende haar te kunnen verklaren door het bovengenoemde, nog niet waargenomen verschijnsel, en zoo vestigde zich bij mij de overtuiging, dat bij — 253° en 60 atmosfeeren druk de

---

1) Het grensgeval is, dat in het met de gewichtseenheid geconstrueerde ψ-vlak de projectie der connode koorde op het xv-vlak evenwijdig aan de tijn $v = 0$ loopt.

gasvormige, hoofdzakelijk uit helium bestaande phase in de vloeibare, hoofdzakelijk uit waterstof bestaande zinkt.

Ten einde mij hiervan te overtuigen drukte ik met behulp van den in Meded. N°. 54 beschreven kwikcompressor een mengsel van ongeveer 1 deel helium en 6 deelen waterstof samen in een glazen buisje, hetgeen boven een capillaire toevoerbuis en beneden een capillaire afvoerbuis had en dat in vloeibaar waterstof gedompeld was.

Tot 49 atmosfeeren zag men de vloeibare waterstof zich uit het gasmengsel afzetten en met een duidelijken hollen meniscus begrensd tegen het helium. Bij 49 atmosfeeren daalde op eens het helium, meer nauwkeurig de voornamelijk uit helium bestaande gasphase, als water door olie naar beneden en bleef als een groote droppel op den bodem liggen. Bij verdere samendrukking tot 60 atmosfeeren en nieuwe ontspanning tot 32 atmosfeeren bleek het volume van de bel de verandering van den druk als dat van een gas te volgen. Bij 32 atmosfeeren druk steeg de bel weder naar boven. Door drukverandering kon men de bel willekeurig laten stijgen en dalen.

Het nauwkeuriger onderzoek dezer verschijnselen in verband met de reeds sedert geruimen tijd ter hand genomen isothermen van het helium en de ψ-vlakken van H_2 en He is een omvangrijk werk, zoodat het zeker wel geoorloofd is in afwachting der waarschijnlijk eerst veel later af te sluiten uitkomsten, mij thans tot deze schetsmatige mededeeling te bepalen.

Eene opmerking moge hierbij echter nog eene plaats vinden. Het blijkt wel, dat de b van helium klein moet zijn, waaruit dan weder daar de kritische temperatuur, zoo zij bestaat, zeer laag moet liggen, een uiterst kleine waarde van a volgt. Hierop wijst ook een enkele plooipuntsbepaling van een mengsel van helium en waterstof, die ik reeds verrichtte. Of a werkelijk eene positieve waarde heeft, nul, of wat toch ook denkbaar ware negatief is zal de bepaling der isothermen van helium moeten uitmaken.

Physiologie. — Ter plaatsing in de Werken wordt aangeboden door den Heer WINKLER eene verhandeling van den Heer J. W. LANGELAAN: *„On congenital ataxia in a cat."*

De Voorzitter verzoekt de Heeren WINKLER en PLACE hierover verslag uit te brengen in de volgende vergadering.

Voor de Boekerij worden aangeboden door den heer VAN ROMBURGH 1°. de dissertatie van den Heer N. H. COHEN: *„Over Lupeol. Eene bijdrage tot de kennis der cholesterineachtige lichamen"* en 2°. van den Heer A. J. ULTEE: *„Bijdrage tot de kennis der Cyaanhydrinen."*

De vergadering wordt gesloten.

(5 December, 1906).

ERRATA.

p. 203, r. 3 v. o.: staat π_{IV}, lees Π.

„ 204, r. 8 v. b.: „ perihelielengte, lees perijovium-lengte.

„ „ r. 10 v. b.: „ π, lees Π.

„ „ r. 16 v. b.: „ 2°,64, lees 2°,62.

„ „ r. 17 v. b.: „ (hangt) van de middelbare anomalie van Jupiter af; lees; (hangt) af van de middelbare lengte des wachters, verminderd met die van den klimmenden knoop van Jupiter's equator.

„ „ r. 18 v. b.: staat $u_s - \pi_s$, lees $u_{IV} - \Pi$.

BOEKDRUKKERIJ
DE ROEVER KRÖBER & BAKELS
AMSTERDAM.

